

Orlicz 空間の構造と Hardy-Littlewood の最大値関数について

鹿児島大学・教育学部 北 広男 (Hiro-o Kita)

Faculty of Education
Kagoshima University

1. はじめに.

Orlicz 空間の研究は Banach 空間の研究と共に 1931 年に Z. W. Birnbaum and W. Orlicz [BO] によって提唱された. その後 W. Orlicz [Or1], [Or2], [Or3] によって更なる理論が展開された. 日本でも Orlicz 空間に関する研究が活発に行われた. H. Nakano [Na] による modular 空間の研究は Orlicz 空間の一般化とも言えるものである. 又, T. Andô [An1], [An2], [An3] によって N-function の分類や Orlicz 空間の回帰性についての研究がなされた. 近年, Orlicz 空間の重要性が再認識され, 様々な方面で再考察され, 又, 応用もなされている.

Orlicz 空間についての書籍としては M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii [KR] によるすばらしい本「Convex Functions and Orlicz Spaces」(English translation)がある. 又, M. M. Rao and Z. D. Ren [RR] による「Theory of Orlicz Spaces」の本が 1991 年に出版された. 最近, 同じ著者による「Applications of Orlicz Spaces」[RR2] が出版された. この本では, von Neumann-Jordan 定数や James 定数について Orlicz 空間との関連で記述されている. 岡山県立大学の高橋氏と九州工業大学の加藤氏の結果 [KaT] との関係についても詳しく書かれている.

日本でも近年, Orlicz 空間に詳しい専門家を招聘する機運も高くなっている. 1996 年には Orlicz の弟子の L. Maligranda 教授 (Luleå University) が, 大分大学で開催された実解析学シンポジウムで講演を行った. 2002 年には A. Gogatishvili 教授 (チェコ科学アカデミー) が鹿児島大学で行われた実解析学シンポジウムで講演を行った. その後, 関心を持つ日本の数学者も増え, 今後更なる発展が期待される.

次の section では, Orlicz 空間を定義するのに必要となる Young function と N-function の概念について説明する.

2. NOTATIONS AND DEFINITIONS.

我々が扱う関数は n 次元 Euclid 空間 R^n 上で定義された実数値可測関数とする. R^n の部分集合 E の Lebesgue 測度は $|E|$ で表すものとする. 解析学で重要な役割を果たす $L^p(R^n)$ 空間は $\int_{R^n} |f(x)|^p dx < \infty$ となる関数 f の集合として定義される. $\Phi(t) = t^p$ と置くと, すぐ前の積分は $\int_{R^n} \Phi(|f(x)|) ds < \infty$ となる. この関数の概念を一般化した Young function について説明する.

Definition 2.1. R^n 上で定義された measurable function $w(x)$ が R^n 上の weight function であるとは, 次の性質を持つときとする.

$$(2.1) \quad 0 < w(x) < +\infty \quad \text{for almost everywhere } x \in R^n ;$$

$$(2.2) \quad \int_Q w(x) dx < +\infty \quad \text{for any compact cube } Q \text{ in } R^n .$$

次に, Young function と N-function の概念について説明する.

Definition 2.2. $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が次の性質を持つとき, *Young function* と呼ばれる.

$$(2.3) \quad \Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s) ds \quad \text{for } t \in R$$

と表すことができる. ここで, $\varphi(s)$ は $[0, \infty)$ で定義された non-decreasing right continuous function で, $\varphi(0) \geq 0$ かつ, $\varphi(s) > 0$ ($s > 0$) を満たす関数である.

【注意】ここでは, 我々は $\varphi(s)$ が $s = 0$ の近傍で恒等的にゼロになる場合や, $s = +\infty$ の近傍で $+\infty$ となる場合はさけた.

Definition 2.3. $\Phi(t)$ を Young function とする. この $\Phi(t)$ が *N-function* であるとは, 次の条件を満たすときとする.

$$(2.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty.$$

関数 $\varphi(t)$ は (2.3) の中にあらわれる non-decreasing right continuous function とする. $\varphi(t)$ の *right inverse* は次の式で定義される.

$$(2.5) \quad \varphi^{-1}(s) := \sup\{u : \varphi(u) \leq s\} \quad s \geq 0.$$

関数 $\varphi^{-1}(s)$ を right derivative に持つ N-function, すなわち

$$(2.6) \quad \Psi(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(s) ds \quad t \in R^n$$

は $\Phi(t)$ の *complementary N-function* と言われる. 次に N-function の例を述べる.

例 1. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ($1 < p < \infty$) とする.

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} s^{p-1} ds = \frac{1}{p} |t|^p, \quad \Psi(t) = \int_0^{|t|} s^{p'-1} ds = \frac{1}{p'} |t|^{p'}.$$

例 2.

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} (e^s - 1) ds, \quad \Psi(t) = \int_0^{|t|} \log(s+1) ds.$$

Definition 2.4. $\Phi(t)$ をひとつの N-function とする. $\alpha > 0$ に対して,

$$(2.7) \quad \Phi(\alpha L) := \left\{ f : \int_{R^n} \Phi(\alpha |f(x)|) dx < +\infty \right\}$$

とおく.

空間 $\Phi(\alpha L)$ は一般に線形空間にならない. 実際, $R^n = R^1 = (-\infty, \infty)$ で考える. N-function $\Phi(t)$ として $\Phi(t) = \int_0^t (e^s - 1) ds = e^t - t - 1$, ($t > 0$) とする. 関数 $f(x)$ を

$f(x) = (1/2) \log(1/x)$ for $0 < x \leq 1$, $f(x) = 0$ otherwise とする. このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|f(x)|) dx < +\infty \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(2|f(x)|) dx = +\infty.$$

Definition 2.5. $\Phi(t)$ をひとつの Young function とし, $w(x)$ を R^n 上のひとつの weight とする. 関数空間を次のように定義する.

$$(2.8) \quad \Phi(\alpha L)_w := \left\{ f : \int_{R^n} \Phi(\alpha |f(x)|) w(x) dx < +\infty \right\} \quad \alpha > 0,$$

$$(2.9) \quad L_w^\Phi(R^n) := \bigcup_{\epsilon > 0} \Phi(\epsilon L)_w,$$

$$(2.10) \quad M_w^\Phi(R^n) := \bigcap_{\alpha > 0} \Phi(\alpha L)_w.$$

空間 $L_w^\Phi(R^n)$ は Orlicz 空間と呼ばれている. 又, $M_w^\Phi(R^n)$ は Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ の部分空間であり, Morse-Transue 空間と呼ばれている. 通常の $L_w^p(R^n)$ 空間は $\Phi(t) = |t|^p$ によって定められる. 又, 例 2 の $\Psi(t)$ によって定められる Orlicz 空間はよく知られている Zygmund class である. 又, $1 < p < q < +\infty$ とするとき, $\Phi(t) \approx \min(|t|^p, |t|^q)$ で定められる Orlicz 空間は $L_w^p(R^n) + L_w^q(R^n)$ となる. 又, $\Phi(t) \approx \max(|t|^p, |t|^q)$ で定められる Orlicz 空間は $L_w^p(R^n) \cap L_w^q(R^n)$ となる.

Definition 2.5 からすぐに次のことがわかる.

$$(2.11) \quad M_w^\Phi(R^n) \subseteq \Phi(L)_w \subseteq L_w^\Phi(R^n).$$

次に, Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ に Banach 空間の構造をいれる.

Definition 2.6. $\Phi(t)$ を N-function とする. $f \in L_w^\Phi(R^n)$ に対して,

$$(2.12) \quad \|f\|_{\Phi, w} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{R^n} \Phi \left(\frac{1}{\lambda} |f(x)| \right) w(x) dx \leq 1 \right\}$$

と置く.

上の (2.12) で定義される $\|f\|_{\Phi, w}$ は norm の性質を持ち, Luxemburg-Nakano norm と呼ばれる.

例 3. $1 < p < \infty$, $\Phi(t) = \frac{1}{p}t^p$, $t > 0$ とする. このとき

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Phi, w} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{R^n} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\lambda} |f(x)| \right)^p w(x) dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{R^n} \frac{1}{p} |f(x)|^p w(x) dx \leq \lambda^p \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \left\{ \int_{R^n} \frac{1}{p} |f(x)|^p w(x) dx \right\}^{1/p} \leq \lambda \right\} \\ &= \left\{ \int_{R^n} \frac{1}{p} |f(x)|^p w(x) dx \right\}^{1/p}.\end{aligned}$$

例 4. 簡単な計算により次のことがわかる. $1 < p < q < +\infty$ とする.

$\Phi(t) \approx \min(|t|^p, |t|^q)$, ならば,

$$L_w^\Phi(R^n) = L_w^p(R^n) + L_w^q(R^n), \quad \|f\|_{\Phi, w} \approx \|f_1\|_{L_w^p} + \|f_2\|_{L_w^q},$$

ここで, $f_1 = f\chi_{\{|f|>1\}} \in L_w^p(R^n)$, $f_2 = f\chi_{\{|f|\leq 1\}} \in L_w^q(R^n)$ で $\chi(E)$ は集合 E 上の特性関数を表す.

$\Phi(t) \approx \max(|t|^p, |t|^q)$, ならば,

$$L_w^\Phi(R^n) = L_w^p(R^n) \cap L_w^q(R^n), \quad \|f\|_{\Phi, w} \approx \max\{\|f\|_{L_w^p}, \|f\|_{L_w^q}\}.$$

3. ORLICZ 空間の構造と関数列の収束について.

前の section で Orlicz 空間に Luxemburg-Nakano norm を入れることにより, Banach 空間の構造を入れた. 関数列 $\{f_n; n \geq 1\}$ を Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ における関数列とする. この関数列 $\{f_n; n \geq 1\}$ が Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ の関数 f に Luxemburg-Nakano norm の意味で収束するとはどのような事かを考えて見る. はじめに Δ_2 -条件について述べる.

Definition 3.1. $\Phi(t)$ をひとつの Young function とする. Φ が $[0, \infty)$ で, Δ_2 -条件を満足するとは, ある正の数 $C > 0$ が存在して

$$(3.1) \quad \Phi(2t) \leq C\Phi(t) \quad \text{for all} \quad 0 \leq t < +\infty$$

が成立することとする.

例として, $\Phi(t) = |t|^p$, $(1 \leq p < +\infty)$ は $[0, +\infty)$ で Δ_2 -条件を満足する. $\Phi(t) \approx e^t$ は $t \rightarrow +\infty$ で Δ_2 -条件を満足しない. 次の結果が知られている.

Theorem 3.1. $M_w^\Phi(R^n) = L_w^\Phi(R^n)$ となるための必要十分条件は, Φ が Δ_2 -条件を満足することである.

Orlicz 空間においては, $M_w^\Phi(R^n) \subsetneq L_w^\Phi(R^n)$ の場合がたいへん興味深い.

Definition 3.2. Φ をひとつの N -function とし, Ψ を Φ の complementary N -function とする. Orlicz norm $\|\cdot\|_{L_w^\Phi}$ を次の式で定義する.

(3.2)

$$\|f\|_{L_w^\Phi} := \sup \left\{ \left| \int_{R^n} f(x)g(x)w(x)dx \right| : \int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \leq 1 \right\}, \quad f \in L_w^\Phi(R^n).$$

Orlicz norm を計算するには次の Young の不等式が有益である.

Lemma 3.2. Φ をひとつの N -function とし, Ψ を Φ の complementary N -function とする. このとき

$$(3.3) \quad st \leq \Phi(s) + \Psi(t) \quad \text{for all } s, t \geq 0$$

次のことに注意しよう. $f \in L_w^\Phi(R^n)$ ならば, $\|f\|_{L_w^\Phi} < +\infty$. 実際, $f \in L_w^\Phi(R^n)$ だから, 十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在して,

$$\int_{R^n} \Phi(\varepsilon_0|f(x)|)w(x)dx < +\infty$$

とできる. このとき Young の不等式より, $\int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \leq 1$ なら,

$$\begin{aligned} \left| \int_{R^n} f(x)g(x)w(x)dx \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{R^n} \varepsilon_0|f(x)| \cdot |g(x)|w(x)dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{R^n} \{\Phi(\varepsilon_0|f(x)|) + \Psi(|g(x)|)\}w(x)dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ \int_{R^n} \Phi(\varepsilon_0|f(x)|)w(x)dx + \int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \right\} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ \int_{R^n} \Phi(\varepsilon_0|f(x)|)w(x)dx + 1 \right\} < +\infty. \end{aligned}$$

ここで, g について sup をとって $\|f\|_{L_w^\Phi} < +\infty$ がわかった. □

Orlicz norm $\|f\|_{L_w^\Phi}$ と Luxemburg-Nakano norm $\|f\|_{\Phi,w}$ の関係について述べる. はじめにいくつかの Lemma を述べる.

Lemma 3.3. $f \in L_w^\Phi(R^n)$ とする. もし

$$(3.4) \quad \|f\|_{L_w^\Phi} \leq 1 \quad \text{ならば} \quad \int_{R^n} \Phi(|f(x)|)w(x)dx \leq \|f\|_{L_w^\Phi}$$

証明については, [KR], [RR] を参照.

Lemma 3.4. $f \in L_w^\Phi(R^n)$, $f \neq 0$ とする. このとき

$$(3.5) \quad \int_{R^n} \Phi \left(\frac{1}{\|f\|_{L_w^\Phi}} |f(x)| \right) w(x) dx \leq 1$$

が成立する.

Proof. $f_1(x) = f(x)/\|f\|_{L_w^\Phi}$ とおく. このとき $\|f_1\|_{L_w^\Phi} = 1$ だから, Lemma 3.3 より,

$$\int_{R^n} \Phi(|f_1(x)|) w(x) dx \leq \|f_1\|_{L_w^\Phi} = 1$$

よって,

$$\int_{R^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_w^\Phi}} \right) w(x) dx \leq 1$$

となり, (3.5) が示された. $\square$

Lemma 3.5. Φ を N -function とする. このとき次の不等式が成立する.

$$(3.6) \quad \|f\|_{\Phi, w} \leq \|f\|_{L_w^\Phi} \leq 2\|f\|_{\Phi, w} \quad \text{for all } f \in L_w^\Phi.$$

Proof. はじめの不等式は, (3.5) と norm $\|f\|_{\Phi, w}$ の定義から明らかである. 後半の不等式を示す. Young の不等式より,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_w^\Phi} &= \sup \left\{ \left| \int_{R^n} f(x)g(x)w(x)dx \right| : \int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \int_{R^n} \Phi(|f(x)|)w(x)dx + 1. \end{aligned}$$

ここで, f のかわりに $|f(x)|/\|f\|_{\Phi, w}$ で考えると,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f}{\|f\|_{\Phi, w}} \right\|_{L_w^\Phi} &\leq \int_{R^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi, w}} \right) w(x)dx + 1 \\ &\leq 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

ここで, $\int_{R^n} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi, w}} \right) w(x)dx \leq 1$ となることは, norm $\|\cdot\|_{\Phi, w}$ の定義から明らかである. よって, $\|f\|_{L_w^\Phi} \leq 2\|f\|_{\Phi, w}$ が示された. $\square$

さて, 関数列の収束について次の性質が成り立つ.

Theorem 3.6. Φ をひとつの N -function とする. 関数列 $\{f_j : j \geq 1\}$ は $f_j \in M_w^\Phi$ ($j \geq 1$), $f \in M_w^\Phi$ とする. このとき

$$(3.7) \quad \|f_j - f\|_{\Phi, w} \rightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow +\infty$$

となるための必要十分条件は,

$$(3.8) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx = 0 \quad \text{for every } \alpha > 0.$$

Proof. はじめに (3.8) を仮定して (3.7) を示す. ここで, $g(x)$ を $\int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \leq 1$ となる任意の関数とする. ここで, Ψ は Φ の complementary Young function. このとき $\alpha > 1$ とすると, Young の不等式より

$$\begin{aligned} I_j &:= \left| \int_{R^n} (f_j(x) - f(x))g(x)w(x)dx \right| \leq \int_{R^n} |f_j(x) - f(x)||g(x)|w(x)dx \\ &= \int_{R^n} (\alpha|f_j(x) - f(x)|) \left(\frac{1}{\alpha}|g(x)| \right) w(x)dx \\ &\leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \int_{R^n} \Psi\left(\frac{1}{\alpha}|g(x)|\right)w(x)dx \\ &\leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha} \int_{R^n} \Psi(|g(x)|)w(x)dx \\ &\leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha} \cdot 1. \end{aligned}$$

g について sup をとると,

$$\|f_j - f\|_{L_w^\Phi} \leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha} \cdot 1.$$

Lemma 3.5 の不等式 (3.6) より,

$$\|f_j - f\|_{\Phi, w} \leq \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx + \frac{1}{\alpha} \cdot 1.$$

よって, $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{\Phi, w} \leq 1/\alpha$. $\alpha > 1$ は任意だから, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{\Phi, w} = 0$.

逆を示す. $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{\Phi, w} = 0$ を仮定する. $\alpha > 0$ を任意に固定する. 仮定より, ある十分大きな自然数 $j_0 \in N$ が存在して,

$$(3.9) \quad \alpha\|f_j - f\|_{\Phi, w} \leq \frac{1}{2} \quad \text{for } j \geq j_0.$$

このとき, Lemma 3.5 より, $j \geq j_0$ のとき

$$\|\alpha(f_j - f)\|_{L_w^\Phi} \leq 2\|\alpha(f_j - f)\|_{\Phi, w} = 2\alpha\|f_j - f\|_{\Phi, w} \leq 1.$$

よって

$$\|\alpha(f_j - f)\|_{L_w^\Phi} \leq 1 \quad \text{for } j \geq j_0.$$

よって, Lemma 3.3 と Lemma 3.5 より, $j \geq j_0$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx &\leq \|\alpha(f_j - f)\|_{L_w^\Phi} \\ &\leq 2\|\alpha(f_j - f)\|_{\Phi, w} \\ &= 2\alpha\|(f_j - f)\|_{\Phi, w} \rightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{R^n} \Phi(\alpha|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx = 0$$

が示された. □

さて、空間 $\Phi(L)$ は一般に線形空間にならないが、次のような平均収束が考えられている。

$$\int_{R^n} \Phi(|f_j(x) - f(x)|)w(x)dx \rightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

よって、 $\Phi(L)$ より広い Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ では次のような収束を考えるのは自然であるように思われる。ある十分小さな正の数 ε_0 が存在して

$$(3.10) \quad \int_{R^n} \Phi(\varepsilon_0 |f_j(x) - f(x)|)w(x)dx \rightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

Orlicz 空間 L_w^Φ に ranked space (階位空間) の構造をいれて、(3.10) の収束と同値にできることが知られている [KY3].

Orlicz space は Banach space となるのでたいへん魅力的であり、種々の norm 不等式を導くことができる。Young function が Δ_2 -条件を満足しない場合には Orlicz space の構造としては ranked space としての構造を入れて考察するほうが自然であるように思われる。ただし、ranked space としての取り扱いが単純ではないので、今後の研究が更に必要となる。

4. 一般化された ORLICZ SPACE 及び, MODULAR FUNCTION SPACE について.

Orlicz 空間 $L_w^\Phi(R^n)$ を定義するための N-function は convex function であった。convex 性は、三角不等式

$$\|f + g\|_{\Phi, w} \leq \|f\|_{\Phi, w} + \|g\|_{\Phi, w}$$

と密接に関係している。しかし、実際の応用の場合には convex でない Φ を扱う必要が生じてくる。次のような不等式の例がある。

$$\begin{aligned} & \int_{Mf \leq 1} \frac{Mf(x)w(x)dx}{(1 - \log Mf(x))(1 + \log(1 - \log Mf(x)))^{1+\varepsilon}} + \int_{Mf > 1} \frac{Mf(x)w(x)dx}{(1 + \log Mf(x))^{1-\varepsilon}} \\ & \leq \frac{C}{\varepsilon} \left\{ \int_{|f| \leq 1} \frac{|f(x)|w(x)dx}{(1 + \log(1 - \log |f(x)|))^{\varepsilon}} + \int_{|f| > 1} |f(x)|(1 + \log |f(x)|)^{\varepsilon}w(x)dx \right\}. \end{aligned}$$

ここで、 $0 < \varepsilon < 1$, M は Hardy-Littlewood の最大値関数、

$$Mf(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy,$$

sup は軸に平行なすべての cubes $Q \subseteq R^n$ についてとられるものとする。上の不等式に対応する関数 $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ は

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \begin{cases} \frac{t}{(1 - \log t)(1 + \log(1 - \log t))^{1+\varepsilon}}, & 0 < t \leq 1; \\ \frac{t}{(1 + \log t)^{1-\varepsilon}}, & t > 1 \end{cases} \\ \Psi(t) &= \begin{cases} \frac{t}{\varepsilon(1 + \log(1 - \log t))^{\varepsilon}}, & 0 < t \leq 1; \\ \frac{1}{\varepsilon} t(1 + \log t)^{\varepsilon}, & t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

このとき、すぐ前でのべた不等式は、

$$\int_{R^n} \Phi(Mf(x))w(x)dx \leq C \int_{R^n} \Psi(|f(x)|)w(x)dx$$

となる. 関数 $\Phi(t)$ は convex ではない. convex でない関数 $\Phi(t)$ に対応する関数空間を考える.

Definition 4.1. $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が φ -function であるとは, 次の性質を満足するときとする.

- (1) $\Phi(0) = 0$;
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = +\infty$;
- (3) Φ は strictly increasing
- (4) Φ は continuous ;

Definition 4.2. Φ をひとつの φ -function とする. このとき

$$\rho_{\Phi}(f) := \int_{R^n} \Phi(|f(x)|) w(x) dx$$

によって functional ρ_{Φ} を定める.

ρ_{Φ} は次に述べる modular functional の重要な例である. $\mathcal{M}$ を R^n 上で定義された extended real valued measurable functions の全体とする.

Definition 4.3. functional $\rho : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ が modular functional on $\mathcal{M}$ であるとは次の性質を持つときとする.

- (MF-1) : $\rho(f) = 0$ if and only if $f = 0$;
- (MF-2) : $\rho(f) = \rho(|f|)$ for all $f \in \mathcal{M}$;
- (MF-3) : $\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ for all $f, g \in \mathcal{M}$, ここで $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$;
- (MF-4) : $0 \leq g \leq f$ a.e. $\implies \rho(g) \leq \rho(f)$;
- (MF-5) : $0 \leq f_j \uparrow f$ as $j \rightarrow \infty$ a.e. $\implies \rho(f_j) \uparrow \rho(f)$ as $j \rightarrow \infty$;
- (MF-6) : $|E| < \infty, \implies \rho(\frac{1}{\lambda} \chi_E) < \infty$ for some $\lambda > 0$;
- (MF-7) : $\rho(f) < \infty, f \in \mathcal{M} \implies f(x)$ is finite a.e. $x \in R^n$.

modular functional ρ を用いて関数空間 X_{ρ}^*, X_{ρ} を次のように定義する.

$$X_{\rho}^* := \{f \in \mathcal{M} : \rho(\lambda f) < \infty \text{ for some } \lambda > 0\},$$

$$X_{\rho} := \{f \in \mathcal{M} : \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \rho(\lambda f) = 0\}.$$

(明らかに $X_{\rho} \subseteq X_{\rho}^*$)

又, $f \in X_{\rho}^*$ の F-norm $|f|_{\rho}$ を次のように定義する.

$$|f|_{\rho} := \inf\{u > 0 : \rho(f/u) \leq u\}$$

このとき, $|f|_\rho < +\infty$ となるための必要十分条件は $f \in X_\rho^*$ であることが知られている.

Theorem 4.1. $|f|_\rho$ について次の性質が成り立つ.

- (1): $|f|_\rho = 0 \iff f \in X_\rho^* \iff f = 0$;
- (2): $|-f|_\rho = |f|_\rho$ for all $f \in X_\rho^*$;
- (3): $|f+g|_\rho \leq |f|_\rho + |g|_\rho$ all $f, g \in X_\rho^*$;
- (4): $f_k \in X_\rho^*, f \in X_\rho$ とする
 $\alpha_k \rightarrow \alpha, |f_k - f|_\rho \rightarrow 0 \Rightarrow |\alpha_k f_k - \alpha f|_\rho \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$

modular function space についての詳細については, H. Kita, T. Miyamoto and K. Yoneda, *Modular function spaces and control functions of almost everywhere convergence*, Commentationes Mathematicae (Poznan). **41** (2001) 99–133. を参照してほしい.

5. HARDY LITTLEWOOD の最大値関数について.

はじめに, いくつかの notations と definitions を与えることから始めよう. R^n によって, n 次元 Euclidean 空間を表す. 我々は R^n 上で定義された real valued measurable functions f を考える. ここでは $|E|$ は R^n の measurable subset E の the Lebesgue measure を意味する.

Definition 5.1. 古典的な Hardy-Littlewood の最大値関数は次の式で定義される.

$$Mf(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

ここで, supremum は $x \in Q$ となるすべての cubes Q (cube はいつでも軸に平行な辺を持つ cube を意味する) にわたって取られる.

Definition 5.2. A locally integrable almost everywhere positive function $w : R^n \rightarrow [0, \infty)$ は weight function と言われる.

Muckenhoupt は [Muc] の中で, Hardy-Littlewood の最大値関数が $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ で bounded となるための w のすばらしい特徴付けを与えた. 即ち次の結果をあたえた.

Theorem 5.1. (Muckenhoupt) $1 < p < \infty$ とする. Hardy-Littlewood の最大値関数 M が $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ 上で bounded となるための必要十分条件は, weight w が次の性質を持つことである. ある正数 $C > 0$ が存在して,

$$(5.1) \quad \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C \text{ for all cubes } Q \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

A weight function w が (5.1) を満足するとき, w は A_p condition を満足するという. $w \in A_p$ と表す.

Kerman and Torchinsky [KT] は weighted Orlicz spaces の場合に Muckenhoupt の結果を拡張した. 彼らは weight function の class として A_Φ を定義した (see Definition 5.4). Bagby [Ba] は Hardy-Littlewood の 最大値関数が weak type の不等式

$$\int_{\{x: Mf(x) > \lambda\}} w(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(C|f(x)|/\lambda) w(x) dx \quad \text{for all } \lambda > 0 \quad \text{and all } f$$

を満足するような weight の class B_Φ を導入した. (see Definition 5.6).

この節では, 我々はふたつの weight class A_Φ と B_Φ の関係を論議し, いくつかの新しい結果を与える.

Kerman and Torchinsky [KT] は Φ と $\tilde{\Phi}$ がともに Δ_2 に属するとき A_p weight の概念を拡張して次の A_Φ weight の概念を与えた.

Definition 5.3. Φ をひとつの Young function とし, $\tilde{\Phi}$ をその complementary Young function とする. $\Phi, \tilde{\Phi}$ がともに Δ_2 条件を満足するとする. このとき, weight w が A_Φ weight (A_Φ 条件を満たす) とは, ($w \in A_\Phi$ とあらわす), ある正の定数 $C > 0$ が存在して,

$$(5.2) \quad \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \leq C$$

がすべての cube Q とすべての $\varepsilon > 0$ にたいして成立する. ここで, φ は Φ の right derivative で φ^{-1} は φ の right inverse である.

Kerman and Torchinsky [KT] の中で次の結果が与えられている.

Theorem 5.2. (Kerman and Torchinsky) Φ を Young function とする. $\Phi, \tilde{\Phi}$ がともに Δ_2 条件を満足するとする. w をひとつの weight function とする. このとき Hardy-Littlewood の maximal function M について次の不等式

$$(5.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(Mf(x)) w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) w(x) dx \quad \text{for all } f$$

が成立するための必要十分条件は $w \in A_\Phi$ となることである.

この論文では, Φ が必ずしも Δ_2 条件を満足しない場合にも適用したいので, A_Φ weight の定義を少し拡張しておく.

Definition 5.4. Φ をひとつの N-function とし, $\tilde{\Phi}$ をその complementary N-function とする. $\Phi, \tilde{\Phi}$ の right derivative をそれぞれ φ, φ^{-1} とする. このとき, weight w が A_Φ^e weight (A_Φ^e 条件を満たす) とは, ($w \in A_\Phi^e$ とあらわす), ある正の定数 $C_1 > 0$ (十分小) と $C_2 > 0$ (十分大) が存在して,

$$(5.4) \quad \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \leq C_2$$

がすべての cube Q とすべての $\varepsilon > 0$ にたいして成立することとする.

上で与えられた定義は, Kokilashvili and Krbeć ([KK] p. 43) の中で与えられている定義と同値である. 即ち, 次の Lemma が成立する.

Lemma 5.3. Φ をひとつの N -function とし, $\tilde{\Phi}$ をその complementary N -function とする. 更に, $R_\Phi(t) = \Phi(t)/t$, $S_\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t)/t$ とおく. このとき, weight w が A_Φ^e weight となるための必要十分条件は, ある正の定数 $C_1 > 0$ (十分小) と $C_2 > 0$ (十分大) が存在して,

$$(5.5) \quad \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) R_\Phi \left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q S_\Phi \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \leq C_2$$

がすべての cube Q とすべての $\varepsilon > 0$ にたいして成立することである.

Proof. はじめに $w \in A_\Phi^e$ であると仮定する. このとき, ある正の定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して, (5.4) の不等式が成立する. 即ち,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \leq C_2$$

がすべての cubes Q とすべての $\varepsilon > 0$ に対して成立する. 又, $R_\Phi(t), S_\Phi(t)$ の定義より

$$\begin{aligned} R_\Phi(t) &= \frac{\Phi(t)}{t} = \frac{\int_0^t \varphi(s) ds}{t} \leq \frac{t\varphi(t)}{t} = \varphi(t), \\ S_\Phi(t) &= \frac{\tilde{\Phi}(t)}{t} = \frac{\int_0^t \varphi^{-1}(s) ds}{t} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{t} = \varphi^{-1}(t). \end{aligned}$$

よって (5.4) より,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) R_\Phi \left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q S_\Phi \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \leq C_2 \end{aligned}$$

となり (5.5) がすべての cube Q と $\varepsilon > 0$ に対して成立することがわかった.

次に, 逆を示す. 即ち, ある正の定数 C_1 と C_2 が存在して, (5.5) が成立したとする. 又, R_Φ 及び S_Φ の定義より

$$\begin{aligned} 2R_\Phi(2t) &= \frac{2\Phi(t)}{2t} = \frac{\int_0^{2t} \varphi(s) ds}{t} \geq \frac{\int_t^{2t} \varphi(s) ds}{t} \geq \frac{t\varphi(t)}{t} = \varphi(t), \\ 2S_\Phi(2t) &= \frac{2\tilde{\Phi}(t)}{2t} = \frac{\int_0^{2t} \varphi^{-1}(s) ds}{t} \geq \frac{\int_t^{2t} \varphi^{-1}(s) ds}{t} \geq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{t} = \varphi^{-1}(t). \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (2\varepsilon)w(x)dx \right) \varphi \left(\frac{C_1}{4|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{(2\varepsilon)w(x)} \right) dx \right) \\
 & \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (2\varepsilon)w(x)dx \right) \varphi \left(\frac{C_1}{4|Q|} \int_Q 2S_\Phi \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \\
 & = 2 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x)dx \right) \varphi \left(\frac{C_1}{2|Q|} \int_Q S_\Phi \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \\
 & \leq 2 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x)dx \right) 2R_\Phi \left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q S_\Phi \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \\
 & = 4 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x)dx \right) R_\Phi \left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q S_\Phi \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \leq 4C_2.
 \end{aligned}$$

よって, $2\varepsilon = \varepsilon'$, $(1/4)C_1 = C'_1$, $4C_2 = C'_2$ とおくと, 次の不等式が成立することがわかった.

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon' w(x)dx \right) \varphi \left(\frac{C'_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon' w(x)} \right) dx \right) \leq C'_2,$$

ここで, $Q, \varepsilon' > 0$ は任意であった. よって $w \in A_\Phi^*$ がわかった. $\square$

また, Bagby [Ba] は Hardy-Littlewood の maximal operator M の weak type の不等式に関して weight class B_Φ を導入した.

Definition 5.5. ひとつの weight w が doubling measure であるとは, ある正の定数 $C > 0$ が存在して,

$$(5.6) \quad w(2Q) \leq Cw(Q) \quad \text{for all cubes } Q,$$

ここで, $2Q$ は中心が Q と同じで, 1 辺の長さが Q の 2 倍の cube である.

次に, weight class B_Φ を定義する.

Definition 5.6. w をひとつの nontrivial weight とし, Φ をひとつの N-function とする. w が B_Φ 条件を満足するとは, $(w \in B_\Phi)$, ある正の定数 $C > 0$ が存在して

$$(5.7) \quad w\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{C|f(x)|}{\lambda} \right) w(x)dx$$

がすべての $\lambda > 0$ とすべての $f \in L^\Phi(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ に対して成立するときとする.

Definition 5.7. Φ をひとつの N-function とし, w をひとつの weight function とする. 任意の cube $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ をひとつ固定する. このとき,

$$(5.8) \quad \|f\|_{\Phi, w, Q} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x)dx \leq w(Q) \right\}$$

と置く. $\|f\|_{\Phi, w, Q} < +\infty$ となる f の全体を $L^\Phi(Q, \frac{w(x)}{w(Q)}dx)$ で表す.

この概念を利用して, Bagby [Ba] は次の重要な結果を示した.

Theorem 5.4 (Bagby). Φ をひとつの N -function とし, w をひとつの *nontrivial weight* とする. このとき, $w \in B_\Phi$ となるための必要十分条件は w がひとつの *doubling measure* であってかつ, ある正の定数 $C > 0$ が存在して

$$(5.9) \quad \frac{w(Q)}{|Q|} \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \leq C \quad \text{for all cubes } Q$$

となることである.

不等式 (5.9) は次の不等式の statement と同値であることは, Definition 5.7 からすぐわかる. 即ち, 十分小さな正の定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して,

$$(5.10) \quad \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{\varepsilon_0 w(Q)}{|Q|} \cdot \frac{1}{w(x)} \right) w(x) dx \leq w(Q) \quad \text{for all cubes } Q \subseteq \mathbb{R}^n.$$

次に, weight class A_Φ^* と B_Φ との関係について論議する. 前に述べた Kerman and Torchinsky の結果より. 次のことがすぐに分かる.

Theorem 5.5. Φ をひとつの N -function とする. もし, $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$ ならば, $A_\Phi^* \subseteq B_\Phi$ が成立する.

Proof. Φ をひとつの Young function とし, Φ の right derivative を φ とする. $\Phi \in \Delta_2$ のとき φ もまた $\varphi \in \Delta_2$ であることに注意しておく. 実際, $\Phi \in \Delta_2$ だから

$$\Phi(4t) = \Phi(2 \cdot 2t) \leq C\Phi(2t) \leq C^2\Phi(t) \quad \text{for } t \geq 0,$$

ここで, 定数 $C > 0$ は Definition 2.4 の中の定数である. よって $t \geq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} (2t)\varphi(2t) &\leq \int_{2t}^{4t} \varphi(s) ds \leq \int_0^{4t} \varphi(s) ds = \Phi(4t) \\ &\leq C^2\Phi(t) = C^2 \int_0^t \varphi(s) ds \leq C^2 t \varphi(t). \end{aligned}$$

よって $t > 0$ のとき両辺を $2t > 0$ で割ると,

$$\varphi(2t) \leq \frac{C^2}{2} \varphi(t)$$

となる. $t = 0$ のときには φ の右連続性により, もし $\varphi(0) = 0$ なら上の式は両辺ともゼロで成立する. もし $a = \varphi(0+) > 0$ なら, $C > 0$ をあらためて $C^2/2 \geq 1$ と取りなおせば上の式は $t = 0$ でも成立する. よって $\varphi \in \Delta_2$ が成立する.

さて, $w \in A_\Phi^*$ を任意の weight とする. $\varphi \in \Delta_2$ であつたから weight の定義より $w \in A_\Phi$ となる. また, この定理の仮定より $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$ だから, Kerman Torchinsky の定理 Theorem 5.2 より strong type の不等式 (5.3) が成立する. 不等式 (5.3) で f の代わりに f/λ で置き換える. ここで $\lambda > 0$ は任意. このとき

$$(5.11) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{1}{\lambda} Mf(x) \right) w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{1}{\lambda} |f(x)| \right) w(x) dx \quad \text{for all } f$$

次に, 集合 $E(\lambda)$ を $E(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ と置く. このとき, (5.11) より

$$\Phi(1) \int_{E(\lambda)} w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left(\frac{1}{\lambda} |f(x)| \right) w(x) dx \quad \text{for all } f.$$

$\Phi \in \Delta_2$ だから $\Phi(t) > 0$ がすべての $t > 0$ が成立するから, $\Phi(1) > 0$ となる. よって必要ならば $C > 0$ を十分大きく取り直して $C/\Phi(1) > 1$ としておく. このとき $C_1 = C/\Phi(1) > 1$ とおいたとき, Φ の凸性により次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} w(E(\lambda)) &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) w(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{C_1}{\lambda}|f(x)|\right) w(x) dx. \end{aligned}$$

よって, Definition 5.6 の不等式 (5.7) が成立することがわかった. よって $w \in B_\Phi$ が示された. $\square$

Theorem 5.5 においては, Φ と $\tilde{\Phi}$ の両方が Δ_2 -条件を満足することが仮定されている. Φ の Δ_2 -条件を仮定しない場合については, Kokilashvili and Krbeč [KK] p. 43 の中で次の結果が与えられている.

Theorem 5.6. Φ をひとつの N -function とし, $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ とする. w を weight function on $\mathbb{R}^1$ (一次元) で, もし $w \in A_\Phi^*$ ならば, ある正の数 $C > 0$ が存在して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(Mf(x))w(x)dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|f(x)|)w(x)dx \quad \text{for all } f$$

上の結果は一次元の場合であることに注意してほしい. この結果からすぐに次の結果が得られる.

Theorem 5.7. Φ をひとつの N -function とし, $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ とする. もし w が $\mathbb{R}^1$ (一次元) 上の weight function で, $w \in A_\Phi^*$ ならば, $w \in B_\Phi$ となる. すなわち, $A_\Phi^* \subseteq B_\Phi$ となる.

Proof. Φ をひとつの Young function とし, $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ とする. $w \in A_\Phi^*$ ならば, Theorem 5.6 より,

$$(5.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(Mf(x))w(x)dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|f(x)|)w(x)dx \quad \text{for all } f$$

が成り立つ. 今, Φ は $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = +\infty$ だから, 十分大きな定数 $C_1 > 0$ が存在して, $\Phi(C_1) > 0$ とできる. 必要ならば, (5.12) の定数 $C > 0$ を大きくとりなおして $C/\Phi(C_1) > 1$ としておく. $\lambda > 0$ を任意の正数として, f の代わりに $C_1 f/\lambda$ で置き換える. このとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1 Mf(x)}{\lambda}\right) w(x)dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1 |f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx \quad \text{for all } f$$

次に, $E(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^1 : Mf(x) > \lambda\}$ と置く. 上の不等式より,

$$\Phi(C_1) \int_{E(\lambda)} w(x)dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1 |f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx.$$

$\Phi(C_1) > 0$ だから

$$w(E(\lambda)) \leq \frac{C}{\Phi(C_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_1|f(x)|}{\lambda}\right) w(x) dx.$$

となる. また, $C/\Phi(C_1) > 1$ であり, Φ は convex だから,

$$w(E(\lambda)) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{C_2|f(x)|}{\lambda}\right) w(x) dx \quad \text{for all } \lambda > 0,$$

ここで, $C_2 = CC_1/\Phi(C_1)$ である. よって $w \in B_\Phi$ が示された. $\square$

我々の目的は, $A_\Phi^e \subseteq B_\Phi$ となることを, より一般的に直接, Hardy-Littlewood の maximal function を使うことなしに証明することである. Fiorenza [Fi] は, N-function Φ に条件をつけることにより次の結果を証明した.

Theorem 5.8 (Fiorenza). N -function Φ は次の性質を持つものとする. Φ の right derivative $\varphi(s)$ は continuous, nondecreasing で次の性質を持つものとする.

$$(5.13) \quad \varphi(s) > 0 \quad \text{if } s > 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = +\infty.$$

更に, $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ と仮定する. このとき, $A_\Phi \subseteq B_\Phi$ が成立する.

Fiorenza の論文の中では, Φ の Δ_2 条件を仮定することなしに, 又 Hardy-Littlewood の maximal function を使うことなく証明が与えられている. 我々は上の Theorem 5.8 をより一般的な条件のもと (Φ の Δ_2 条件を仮定せず, $\tilde{\Phi}$ の Δ_2 条件も仮定せず, 又 Hardy-Littlewood の maximal function も使用しない) で次の結果を得ることができた.

Theorem 5.9. Φ をひとつの N -function とする. このとき, 次の包含関係が成立する.

$$(5.14) \quad A_\Phi^e \subseteq B_\Phi$$

Proof. $w \in A_\Phi^e$ を任意に取り出す. このとき, A_Φ^e weight の定義の Definition 5.4 よりある正の定数 C_1, C_2 が存在して,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx\right) \varphi\left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right) dx\right) \leq C_2$$

具体的な $\varepsilon > 0$ は後ほど与える. このとき

$$\varphi\left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right) dx\right) \leq \frac{C_2|Q|}{\varepsilon \cdot w(Q)}$$

が成立する. 又, 関数 φ^{-1} は nondecreasing だから

$$(5.15) \quad \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{C_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon w(x)}\right) dx\right)\right) \leq \varphi^{-1}\left(\frac{C_2|Q|}{\varepsilon \cdot w(Q)}\right).$$

さて, φ は Φ の right derivative で φ^{-1} は $\tilde{\Phi}$ の right derivative だから, φ, φ^{-1} は共に right continuous である. よって,

$$\varphi^{-1}(\varphi(a)) \geq a \quad \text{for all } a \geq 0.$$

が成立する. よって, (5.15) より次の不等式が成立する.

$$\frac{C_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \leq \varphi^{-1} \left(\frac{C_2 |Q|}{\varepsilon \cdot w(Q)} \right) \quad \text{for every cube } Q \text{ and } \varepsilon > 0.$$

よって次の結果が得られた.

$$(5.16) \quad \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \leq \frac{|Q|}{C_1} \varphi^{-1} \left(\frac{C_2 |Q|}{\varepsilon \cdot w(Q)} \right) \quad \text{for every cube } Q \text{ and } \varepsilon > 0.$$

次に, 正の定数 C_0 を十分大きくとって

$$(5.17) \quad C_0 > \max \left(C_2, \frac{\varphi^{-1}(1)}{C_1} \right)$$

となるようにしておく, C_0 は cube Q や $\varepsilon > 0$ に無関係な定数. 又, $\tilde{\Phi}(t) = \int_0^t \varphi^{-1}(s) ds \leq t\varphi^{-1}(t)$ だから,

$$\begin{aligned} \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{w(Q)}{C_0 |Q| w(x)} \right) w(x) dx \\ \leq \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{w(Q)}{C_0 |Q| w(x)} \right) \cdot \frac{w(Q)}{C_0 |Q| w(x)} \cdot w(x) dx \\ = \frac{w(Q)}{C_0 |Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{w(Q)}{C_0 |Q| w(x)} \right) dx. \end{aligned}$$

よって, 次の不等式が得られる.

$$\int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{w(Q)}{C_0 |Q| w(x)} \right) w(x) dx \leq \frac{w(Q)}{C_0 |Q|} \cdot \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\frac{w(Q)}{C_0 |Q|}} \cdot \frac{1}{w(x)} \right) dx.$$

ここで, (5.16) の不等式で, $\varepsilon = \frac{C_0 |Q|}{w(Q)}$ と置く, このとき

$$\begin{aligned} \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{w(Q)}{C_0 |Q| w(x)} \right) w(x) dx \\ \leq \frac{w(Q)}{C_0 |Q|} \cdot \frac{|Q|}{C_1} \cdot \varphi^{-1} \left(\frac{w(Q)}{C_0 |Q|} \cdot \frac{C_2 |Q|}{w(Q)} \right) = \frac{w(Q)}{C_0 C_1} \cdot \varphi^{-1} \left(\frac{C_2}{C_0} \right). \end{aligned}$$

このとき, (5.17) より, $0 < C_2/C_0 < 1$ で $\varphi^{-1}(1)/C_0 C_1 < 1$ だから次の不等式が得られる.

$$\int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{w(Q)}{C_0 |Q| w(x)} \right) w(x) dx \leq \frac{w(Q)}{C_0 C_1} \varphi^{-1}(1) \leq w(Q).$$

よって, Theorem 5.4 及び (5.10) より $w \in B_\Phi$ がわかった. $\square$

次に, 我々は今までの問題の逆を考える. 即ち, 次のような問題を考える.

【問題】関数 $w(x)$ を B_Φ の任意の weight とする. Young function $\Phi(t)$ がどのような条件を満たせば $w(x) \in A_\Phi^*$ となるか?

このことについては, Fiorenza [Fi] の論文の中でいくつかの結果が与えられている. 彼の論文の中では Young function Φ の right derivative φ の連続性が仮定されている. こ

ここでは φ の連続性を仮定しなくとも同様の結果が成立することを示す。はじめに次の定義を与える。

Definition 5.8. 関数 Φ をひとつの Young function とする。 $\Phi \in \Delta'$ であるとは、ある正の定数 $C > 0$ が存在して、

$$(5.18) \quad \Phi(st) \leq C\Phi(s)\Phi(t) \quad \text{for all } s, t \geq 0$$

が成立することとする。

ここで、 Δ' を満足する Young function Φ の基本的な性質をまとめておこう。

Lemma 5.10. Φ をひとつの Young function とする。もし、 $\Phi \in \Delta'$ ならば $\Phi \in \Delta_2$ が成立する。

Proof. $\Phi \in \Delta'$ とする。このとき、ある正の定数 C が存在して、

$$\Phi(st) \leq C\Phi(s)\Phi(t) \quad \text{for all } s, t \geq 0.$$

が成立する。ここで、 $s = 2$ とすると、

$$\Phi(2t) \leq C\Phi(2)\Phi(t) \quad \text{for all } t \geq 0$$

となり、 $\Phi \in \Delta_2$ がわかった。 $\square$

Remark. $\Phi \in \Delta'$ ならば、 $\Phi(t)$ は $t = 0$ の近傍で恒等的にゼロになることはない。

Lemma 5.11. $\Phi \in \Delta'$ とする。このとき

$$(5.19) \quad \Phi(t) \leq t\varphi(t) \leq C_1\Phi(t) \quad \text{for all } t \geq 0,$$

が成立する。ここで、 $C_1 = C\Phi(2)$ であって、定数 $C > 0$ は不等式 (5.18) の中の定数である。

Proof. $\Phi(t)$ が Δ' 条件を満足することから次のことがわかる。

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^t \varphi(s)ds \leq t\varphi(t) \leq \int_t^{2t} \varphi(s)ds \\ &\leq \int_0^{2t} \varphi(s)ds = \Phi(2t) \leq C\Phi(2)\Phi(t). \end{aligned}$$

よって Lemma が証明された。 $\square$

Lemma 5.12. Φ を Young function として、その right derivative を φ とする。もし、 $\Phi \in \Delta'$ ならば $\varphi \in \Delta'$ である。すなわち

$$(5.20) \quad \varphi(st) \leq C_2\varphi(s)\varphi(t) \quad \text{for all } s, t \geq 0,$$

ここで、 $C_2 = CC_1 = C^2\Phi(2)$ 、であり C は不等式 (5.18) の中の定数である。

Proof. $C_1 = C\Phi(2)$ とするとき, Lemma 5.11 の (5.19) より,

$$\begin{aligned}\Phi(st) &\leq \frac{C_1\Phi(st)}{st} \leq \frac{C_1C\Phi(s)\Phi(t)}{st} \\ &= CC_1 \cdot \frac{\Phi(s)}{s} \cdot \frac{\Phi(t)}{t} \leq CC_1 \cdot \frac{s\varphi(s)}{s} \cdot \frac{t\varphi(t)}{t} \\ &= CC_1\varphi(s)\varphi(t) = C^2\Phi(2)\varphi(s)\varphi(t).\end{aligned}$$

よって, $\varphi(t)$ もまた Δ' 条件を満足することがわかった. $\square$

Remark. $\varphi \in \Delta'$ より φ は $t=0$ の近傍で恒等的にゼロにはならない.

今後の論議の中でたいへん重要な役割を果たす次の Lemma を与えておく. これは Bagby [Ba] の中で与えられている.

Lemma 5.13 (Bagby). 関数 Φ をひとつの Young function とする. このとき, 区間 $[0, \infty)$ 上で定義された continuous nondecreasing function $g(t) \geq 0$ で次の性質を持つものが存在する.

$$(5.21) \quad \tilde{\Phi}(g(t)) \leq tg(t) \leq \tilde{\Phi}(2g(t)) \quad \text{for all } t \geq 0,$$

$$(5.22) \quad 2\Phi\left(\frac{t}{2}\right) \leq tg(t) \leq \Phi(2t) \quad \text{for all } t \geq 0.$$

ここではこの Lemma を利用して, いくつかの結果を与える.

Lemma 5.14. Φ をひとつの Young function として, Φ の right derivative を φ , Lemma 5.13 の中の関数を $g(t)$ とする. このとき

$$(5.23) \quad \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{t}{4}\right) \leq g(t) \leq 2\varphi(2t) \quad \text{for all } t \geq 0$$

が成立する.

Proof. はじめに, (5.23) の右側の不等式を示す. (5.22) の第 2 の不等式より次の結果がわかった.

$$tg(t) \leq \Phi(2t) = \int_0^{2t} \varphi(s)ds \leq (2t)\varphi(2t).$$

よって, $t > 0$ のとき $g(t) \leq 2\varphi(2t)$ となる. また, $g(t)$ は $t=0$ で連続で, $\varphi(t)$ は $t=0$ で右連続だから $t \rightarrow 0$ として $g(0) \leq 2\varphi(0)$ が得られる. よって $g(t) \leq 2\varphi(2t)$ がすべての $t \geq 0$ が成立することがわかった.

次に, (5.23) の左側の不等式を示す. (5.22) の左側の不等式より次の不等式が得られる.

$$tg(t) \geq 2\Phi\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \int_0^{t/2} \varphi(s)ds \geq 2 \int_{t/4}^{t/2} \varphi(s)ds \geq 2 \cdot \frac{t}{4} \cdot \varphi\left(\frac{t}{4}\right).$$

よって, $t > 0$ のとき, $g(t) \geq (1/2)\varphi(t/4)$ が成立することがわかった. 又, $g(t)$ の連続性と $\varphi(t)$ の右連続性より, $t \rightarrow 0$ として, $g(0) \geq (1/2)\varphi(0)$ となり, $t = 0$ でも成立することがわかった. 以上により (5.23) が示された. $\square$

Lemma 5.15. Φ をひとつの Young function とし, その complementary Young function $\tilde{\Phi}$ の right derivative を φ^{-1} とする. , Lemma 5.13 の中の関数を $g(t)$ の right derivative を $g^{-1}(t)$ とする. このとき

$$(5.24) \quad \varphi^{-1}(s) \leq 2g^{-1}(2s) \quad \text{for all } s \geq 0$$

が成立する.

Proof. Lemma 5.13 の不等式 (5.21) の第 1 の不等式より,

$$\begin{aligned} tg(t) &\geq \tilde{\Phi}(g(t)) = \int_0^{g(t)} \varphi^{-1}(s) ds \\ &\geq \int_{g(t)/2}^{g(t)} \varphi^{-1}(s) ds \geq \frac{g(t)}{2} \cdot \varphi^{-1}\left(\frac{g(t)}{2}\right). \end{aligned}$$

よって, 次の不等式が得られた.

$$(5.25) \quad tg(t) \geq \frac{g(t)}{2} \cdot \varphi^{-1}\left(\frac{g(t)}{2}\right) \quad \text{for all } t \geq 0.$$

ここで, $g(t)/2 = s$ と置く. 関数 $g(t)$ は単調増加だから, $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t)/2$ が存在するので, その値を s_0 と置く. 即ち, $s_0 = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t)/2$.

(i) $s_0 = 0$ のとき, もし $g(t)/2 = s > 0$ ならば, (5.25) より $\varphi^{-1}(s) \leq 2t$. また, $g^{-1}(2s) = g^{-1}(g(t)) \geq t$. よって, $\varphi^{-1}(s) \leq 2g^{-1}(2s)$ となる.

また, (5.22) の第 1 の不等式と Φ が Young function である性質 (2.4) より

$$g(t) \geq \frac{\Phi\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \rightarrow +\infty$$

だから, s の値はすべての正の値を取りうる. また, φ^{-1} と g^{-1} は共に右連続だから

$$\varphi^{-1}(0) = \lim_{s \rightarrow 0+} \varphi^{-1}(s) \leq \lim_{s \rightarrow 0+} 2g^{-1}(2s) = 2g^{-1}(0).$$

よって, $\varphi^{-1}(s) \leq 2g^{-1}(2s)$ がすべての $s \geq 0$ で成立する.

(ii) $s_0 > 0$ のとき. $g(t)/2 = s > s_0$ ならば (5.25) より $\varphi^{-1}(s) \leq 2t$. また, $g^{-1}(2s) = g^{-1}(g(t)) \geq t$. よって $\varphi^{-1}(s) \leq 2g^{-1}(2s)$ となることがわかった. 又, $g(t) \rightarrow \infty$ であったから, $s > s_0$ なるすべての s に対して $\varphi^{-1}(s) \leq 2g^{-1}(2s)$ が成立する.

次に, $0 \leq s \leq s_0$ のとき, (5.25) で $t \rightarrow 0+$ とすると, $g(t)$ の連続性と, φ^{-1} の右連続性より,

$$0 \geq \frac{g(0)}{2} \cdot \varphi^{-1}\left(\frac{g(0)}{2}\right) = \frac{g(0)}{2} \cdot \varphi^{-1}(s_0) \geq 0.$$

$g(0) = 2s_0 > 0$ だから $\varphi^{-1}(s_0) = 0$. よって, $0 \leq s \leq s_0$ のとき $\varphi^{-1}(s) = 0$. よって $\varphi^{-1}(s) \leq 2g^{-1}(2s)$ が成立する. 以上によりすべての $s > 0$ に対して (5.24) が成立することがわかった. $\square$

Lemma 5.16. 関数 Φ をひとつの Young function とし, Φ の complementary Young function を $\tilde{\Phi}$ とする. 今, $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ と仮定する. 即ち, ある正の数 $C > 0$ が存在して, 次の不等式

$$\tilde{\Phi}(st) \leq C\tilde{\Phi}(s)\tilde{\Phi}(t) \quad \text{for all } s, t \geq 0.$$

が成立するならば,

$$(5.26) \quad \frac{1}{w(Q)} \int_Q \tilde{\Phi}(|u(x)|)w(x)dx \leq C\tilde{\Phi}(\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}) \quad \text{for all } u$$

が成り立つ.

Remark. この Lemma では Φ が Δ_2 条件を満たすことを仮定していない. よって, $\varphi(t) = 0$ in a n.b.d of zero でもよい.

Proof. $\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q} = 0$ なら, Q 上で $u = 0$ なので, $\tilde{\Phi}(0) = 0$ より (5.26) は自明なので, 我々は, $0 < \|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q} < +\infty$ として示す. $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ だから,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w(Q)} \int_Q \tilde{\Phi}(|u(x)|)w(x)dx \\ &= \frac{1}{w(Q)} \int_Q \tilde{\Phi} \left(\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q} \cdot \frac{|u(x)|}{\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}} \right) w(x)dx \\ &\leq \frac{1}{w(Q)} \int_Q C \cdot \tilde{\Phi}(\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}) \tilde{\Phi} \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}} \right) w(x)dx \\ &= C \cdot \tilde{\Phi}(\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}) \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}} \right) \frac{w(x)}{w(Q)} dx \\ &= C \cdot \tilde{\Phi}(\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}) \cdot 1 = C \cdot \tilde{\Phi}(\|u\|_{\tilde{\Phi},w,Q}). \end{aligned}$$

となり, (5.26) が示された. □

Lemma 5.17. 関数 Φ をひとつの Young function として, Φ の complementary Young function を $\tilde{\Phi}$ とする. 今, $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ と仮定する. もし, $w \in B_{\Phi}$ ならば, ある十分小さな $\varepsilon_1 > 0$ を選んで,

$$(5.27) \quad \frac{\varepsilon_1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{w(x)} \right) dx \leq \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi},w,Q} \right) \quad \text{for every cube } Q \subseteq R^n$$

ここで, 定数 ε_1 は $\varepsilon_1 = 1/(CC_1H)$ でとれる. $C > 0$ は (5.18) の中の定数であり, $C_1 = C\tilde{\Phi}(2)$, H は (5.24) の右辺の定数を意味する.

Proof. (注意) 証明を始める前に, 一つの注意を与えておく. 上の Lemma では, 関数 Φ の Δ_2 条件は仮定されていない. また, $\varphi(t)$ は $t = 0$ の近傍で恒等的に zero でもよい. 更に, $\varphi(t)$ の $[0, \infty)$ での連続性も仮定しない.

さて, Lemma の証明をしよう. Q を任意の cube とする. 仮定より, $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ であるから次の不等式が成立する.

$$s\varphi^{-1}(s) \leq \int_s^{2s} \varphi^{-1}(u) du \leq \tilde{\Phi}(2s) \leq C\tilde{\Phi}(2)\tilde{\Phi}(s),$$

ここで, 定数 C は (5.18) の不等式の中に現れる定数である. 次に, $C_1 = C\tilde{\Phi}(2)$ と置くととき次の不等式が成立する.

$$(5.28) \quad \varphi^{-1}(s) \leq \frac{C_1 \tilde{\Phi}(s)}{s} \quad \text{for all } s > 0.$$

ここで一つ注意を与えておく. $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ だからとくに $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ となる. よって, $\tilde{\Phi}$ は $t=0$ の近傍で恒等的にゼロになることはない. よって, $\tilde{\Phi}(2) > 0$. よって $C_1 > 0$ ととれる. よって, (5.28) より次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right) dx &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q C_1 \frac{\tilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right)}{\frac{1}{w(x)}} dx \\ &= \frac{C_1}{|Q|} \int_Q \tilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right) w(x) dx. \end{aligned}$$

よって, Lemma 5.15 より次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right) dx &\leq \frac{C_1}{|Q|} \int_Q \tilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right) w(x) dx \\ &= C_1 \cdot \frac{w(Q)}{|Q|} \cdot \frac{1}{w(Q)} \int_Q \tilde{\Phi}\left(\frac{1}{w(x)}\right) w(x) dx \\ &\leq C_1 \cdot \frac{w(Q)}{|Q|} \cdot C \cdot \tilde{\Phi}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q}\right) \\ &\leq CC_1 \cdot \frac{w(Q)}{|Q|} \cdot \left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \cdot \varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q}\right). \end{aligned}$$

仮定より, $w \in B_{\tilde{\Phi}}$ だから Theorem 5.4 より (5.9) の不等式が成立するので, ある正数 $H > 0$ が存在して,

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \cdot \left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \leq H \quad \text{for all cubes } Q \subseteq R^n.$$

よって, 次の不等式が得られた.

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right) dx \leq CC_1 H \varphi^{-1}\left(\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q}\right).$$

両辺を $CC_1 H$ で割って, $\varepsilon_1 = 1/CC_1 H$ と置けば, 証明すべき不等式 (5.27) が得られる. $\square$

Theorem 5.18. 関数 $\Phi(t)$ をひとつの Young function とする. $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ と仮定する. このとき, $B_{\tilde{\Phi}} \subseteq A_{\tilde{\Phi}}^{\circ}$ が成立する.

Proof. (注意) この定理でも, $\Phi \in \Delta_2$ は仮定しない. 更に, $\varphi(t) > 0$ ($t > 0$) も仮定しない. $\varphi(t)$ の $[0, \infty)$ での連続性も仮定しない.

さて, $w \in B_\Phi$ とする. このとき Lemma 5.17 より, すべての cube $Q \subseteq R^n$ に対して次の不等式が成立する.

$$\frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{w(x)} \right) dx \leq \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right).$$

$s \geq 0$ を任意に与える. Lemma 5.13 の中の関数 $g(t)$ を考える. このとき, (5.23) と (5.24) より,

$$(5.29) \quad \varphi \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \varphi^{-1}(s) \right) \leq \varphi \left(\frac{1}{4} \cdot g^{-1}(2s) \right) \leq 2 \cdot g(g^{-1}(2s)).$$

また, 仮定より $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ だから, Lemma 5.12 より, $\varphi^{-1} \in \Delta^{-1}$ となる. よって, Lemma 5.10 より $\varphi^{-1} \in \Delta_2$ となる. よって $\varphi^{-1}(t)$ は $t = 0$ の近傍で恒等的にゼロにならない. よって, $t \rightarrow 0$ のとき $\varphi(t) \rightarrow 0$ となる. よって Lemma 5.14 より $\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = 0$ となる. 更に, $g(t)$ が $[0, \infty)$ で連続だから,

$$(5.30) \quad g(g^{-1}(2s)) = 2s \quad \text{for every } s \geq 0.$$

よって, (5.29) と (5.30) より,

$$(5.31) \quad \varphi \left(\frac{1}{8} \varphi^{-1}(s) \right) \leq 4s \quad \text{for every } s \geq 0.$$

よって, (5.31) より

$$(5.32) \quad \varphi \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{w(x)} \right) dx \right) \leq \varphi \left(\frac{1}{8} \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right) \right) \\ \leq 4 \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q}.$$

よって, (5.32) 及び, $w \in B_\Phi$ であることと, 定数 H の定め方より,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{w(x)} \right) dx \right) \\ \leq \frac{w(Q)}{|Q|} \cdot 4 \cdot \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \leq 4H.$$

よって, すべての cube $Q \subseteq R^n$ について

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{w(x)} \right) dx \right) \leq 4H$$

となり, (5.9) が $\varepsilon = 1$ の場合に成立することがわかった.

次に, 一般の $\varepsilon > 0$ の場合を考える. 今までの議論の中で $w(x)$ の代わりに $\varepsilon w(x)$ を考える. Q を任意の cube とする. Lemma 5.17 の証明と同様にして (5.28) より次の不等

式が成立する.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx &\leq \frac{C_1}{|Q|} \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) \varepsilon w(x) dx \\
 &= C_1 \cdot \frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|} \cdot \frac{1}{\varepsilon w(Q)} \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) \varepsilon w(x) dx \\
 &\leq C_1 \cdot \frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|} \cdot C \cdot \tilde{\Phi} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, \varepsilon w, Q} \right) \\
 &= CC_1 \cdot \frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|} \cdot \tilde{\Phi} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, \varepsilon w, Q} \right).
 \end{aligned}$$

ここで, 一般的に, ノルム $\|\cdot\|_{\tilde{\Phi}, w, Q}$ の定義より,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\tilde{\Phi}, \varepsilon w, Q} &= \inf \{ \lambda > 0 : \frac{1}{\varepsilon w(Q)} \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) \varepsilon w(x) dx \leq 1 \} \\
 &= \inf \{ \lambda > 0 : \frac{1}{w(Q)} \int_Q \tilde{\Phi} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) w(x) dx \leq 1 \} \\
 &= \|f\|_{\tilde{\Phi}, w, Q}.
 \end{aligned}$$

よって, 次の不等式を得る.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx &\leq CC_1 \cdot \frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|} \cdot \tilde{\Phi} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, \varepsilon w, Q} \right) \\
 &= CC_1 \cdot \frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|} \cdot \tilde{\Phi} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right) \\
 &\leq CC_1 \cdot \frac{\varepsilon w(Q)}{|Q|} \cdot \left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \cdot \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right) \\
 &= CC_1 \cdot \frac{w(Q)}{|Q|} \cdot \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \cdot \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right).
 \end{aligned}$$

また, 仮定より, $w \in B_{\tilde{\Phi}}$ だから, Theorem 5.8 より, (5.9) の不等式が成立するので, ある正の定数 $H > 0$ が存在して

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \cdot \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \leq H \quad \text{for all cubes } Q \subseteq R^n.$$

ここで, H は $\tilde{\Phi}, w$ に依存するが, Q や $\varepsilon > 0$ に依存しない. よって, 次の不等式が得られる.

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \leq CC_1 H \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right) \quad \text{for all cubes } Q \subseteq R^n.$$

よって、次の結果が成立する。

$$\frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \leq \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right) \quad \text{for all cubes } Q \subseteq R^n.$$

さて、 $s \geq 0$ を任意に与える。Lemma 5.13 の中の関数 $g(t)$ を選ぶ。このとき、(5.23) と (5.24) より

$$(5.33) \quad \varphi \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \varphi^{-1}(s) \right) \leq \varphi \left(\frac{1}{4} \cdot g^{-1}(2s) \right) \leq 2 \cdot g(g^{-1}(2s))$$

が得られる。また、仮定より $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ だから、Lemma 5.12 より $\varphi^{-1} \in \Delta^{-1}$ 。よって、Lemma 5.10 より $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ となる。よって、 $\varphi^{-1}(t)$ は $t=0$ の近傍で恒等的にゼロになることはない。よって、 $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$ となることがわかる。よって、Lemma 5.14 より、 $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 0$ となる。更に、 $g(t)$ が $[0, \infty)$ で連続だから、

$$(5.34) \quad g(g^{-1}(2s)) = 2s \quad \text{for every } s \geq 0.$$

よって、(5.33) と (5.34) より

$$(5.35) \quad \varphi \left(\frac{1}{8} \varphi^{-1}(s) \right) \quad \text{for every } s \geq 0.$$

となる。よって、(5.35) より次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} (5.36) \quad \varphi \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) &\leq \varphi \left(\frac{1}{8} \cdot \varphi^{-1} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \right) \right) \\ &\leq 4 \cdot \left\| \frac{1}{\varepsilon w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon} \cdot \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q}. \end{aligned}$$

よって、 $w \in B_{\Phi}$ だから、

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \cdot \varepsilon w(Q) \cdot \frac{4}{\varepsilon} \cdot \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \\ &= \frac{4 \cdot w(Q)}{|Q|} \left\| \frac{1}{w} \right\|_{\tilde{\Phi}, w, Q} \leq 4H. \end{aligned}$$

よって、

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varepsilon w(x) dx \right) \varphi \left(\frac{1}{8CC_1H} \cdot \frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon w(x)} \right) dx \right) \leq 4H$$

がすべての cubes Q と $\varepsilon > 0$ について成立する。ここで、定数 $1/8CC_1H$ と $4H$ は $\varepsilon > 0$ に無関係な定数であることを注意しておく。よって $w \in A_{\Phi}^*$ が示された。□

この節の最後に興味深い結果を一つ与える.

Definition 5.9. 関数 $w(x)$ が R^n 上の A_1 -weight ($w \in A_1$) であるとは, ある正の定数 C が存在して,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} w(x) \quad \text{for all cubes } Q \subseteq R^n$$

が成立するときと定める.

また, 関数 $a(s), b(s)$ は $[0, \infty)$ 上で定義された positive continuous function で次の条件を満たすものとする.

$$(5.37) \quad a(s) > 0, \quad b(s) > 0 \quad \text{if } s > 0 \quad \text{and} \quad a(0) = b(0) = 0;$$

$$(5.38) \quad \int_0^1 \frac{a(s)}{s} ds < +\infty, \quad \int_1^\infty a(s) ds = +\infty;$$

$$(5.39) \quad b(s) \text{ は nondecreasing で } \lim_{s \rightarrow \infty} b(s) = +\infty.$$

関数 $\Phi(t)$ と $\Psi(t)$ を次のように置く.

$$(5.40) \quad \Phi(t) := \int_0^t a(s) ds, \quad \Psi(t) := \int_0^t b(s) ds \quad \text{for } t \geq 0.$$

次の不等式を考える.

$$(5.41) \quad \int_0^t \frac{a(s)}{s} ds \leq C_1 b(C_2 t) \quad \text{for all } t > 0,$$

$$(5.42) \quad \int_{R^n} \Phi(Mf(x)) w(x) dx \leq C_3 \int_{R^n} \Psi(C_4 |f(x)|) w(x) dx \quad \text{for all } f \in L_w^\Psi(R^n).$$

我々は次の結果を得る.

Theorem 5.19. 上の性質 (5.37) から (5.42) を満足するすべての関数 $a(s), b(s), \Phi(t), \Psi(t)$ に対して, (5.41) ならば (5.42) が成立するための必要十分条件は, $w \in A_1$ となることである.

最後の定理の証明の中では, B_Φ weight の概念が重要な役割を果たす. 詳しくは [Ki] を参考にしてほしい.

REFERENCES

- [An1] T. Andô, *On some properties of convex function*, Bull Acad Polon Sci Sér math **8** 1960, 413–418.
- [An2] T. Andô, *Linear functionals on Orlicz spaces*, Nieuw Arch Wisk **8** (1960), 1–6.
- [An3] T. Andô, *Certain classes of convex functions*, Soviet Math **2** (1961), 139–142.

- [Ba] R. J. Bagby, *Weak bounds for the maximal function in weighted Orlicz spaces*, *Studia Math.* **95** (1990), 195–204.
- [BO] Z. W. Birnbaum and W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, *Studia Math.* **3** (1931), 1–67.
- [Ca] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, *Acta Math* **116** (1966) 135–157.
- [FS] C. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities*, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 107–115.
- [Fi] A. Fiorenza, *On certain inequalities in weighted Orlicz spaces*, *Rendiconti di Matematica, Serie VII* **13**, Roma(1993), 421–430.
- [Po] Ch. J. de la Vallée Poussin, *Sur l'intégrale de Lebesgue*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **16** (1915), 435–501.
- [Cu] GARCÍA-CUERVA AND J. RUBIO DE FRANCIA, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland (Amsterdam, 1985).
- [Ga] I. GENEBASHVILI, A. GOGATISHVILI, V. KOKILASHVILI AND M. KRBEC, *Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. **92**, Longman, (England, 1998).
- [Hu] R. Hunt, *On the convergence of Fourier series*, in: *Proc Conf at Southern Illinois Univ*(1967) 235–255.
- [KaT] M. Kato and Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces*, *Proc. Amer. Soc.*, **125** 1997, 1055–1062.
- [KT] R. A. Kerman and A. Torchinsky, *Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function*, *Studia Math.* **71** (1981/82), 277–284.
- [Ki] H. Kita, *Weighted inequalities for iterated maximal functions in Orlicz spaces*, *Math. Nachr.*, (2004) to appear.
- [Ki1] H. Kita, *On interpolation of the Fourier maximal operator in Orlicz spaces*, *Acta Math. Hungar.* **81**(3) (1998), to appear.
- [Ki2] H. kita, *Integrability properties of the maximal operator on partial sums of Fourier series in Orlicz Spaces*, *Math. Nachr.* **193** (1998), 57–74.
- [Ki3] H. kita, *On maximal operator of partial sums of Fourier series in Orlicz spaces*, *Acta Math. Hungar.* **77**(1-2) (1997), 1–13.
- [Ki4] H. Kita, *On Hardy-Littlewood maximal functions in Orlicz spaces*, *Math. Nachr.* **183** (1997), 135–155.
- [Ki5] H. Kita, *On maximal functions in Orlicz spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124**(10) (1996), 3019–3025.

- [Ki6] H. Kita, *Inequalities with weights for maximal functions in Orlicz spaces*, Acta Math. Hungar. **72** (1996), 291–305.
- [Ki7] H. Kita, *On a converse inequality for maximal functions in Orlicz spaces*, Studia Mathematica **118** (1996), 1–10.
- [Ki8] H. Kita, *On an interpolation theorem of Hunt-Sjölin*, Acta Math. Hungar. **67** (1995), 97–107.
- [KY1] H. Kita and K. Yoneda *On quasi $\varphi(L)^*$ -a.e. convergence of Fourier series of functions in Orlicz spaces*, Acta Math. Hungar. **65** (1995), 339–360.
- [KY2] H. Kita K. Yoneda *Orlicz space L_φ^* and some inclusion relations*, Math. Japon. **37** (1992), 1189–1199.
- [KY3] H. Kita and K. Yoneda *A treatment of Orlicz spaces as a ranked space*, Math. Japon. **37** (1992), 775–802.
- [Ki9] H. Kita, *Convergence of Fourier series of a function on generalized Wiener's class $BV(p(n) \uparrow \infty)$* , 1991, Acta Math. Hungar. **57** (1991), 233–243.
- [Ki10] H. Kita, *On control functions of a.e. convergence of the Fourier series of bounded functions*, Math. Japon. **36** (1991), 649–655.
- [KY4] H. Kita and K. Yoneda, *A generalization of bounded variation*, Acta Math. Hungar. **56** (1990), 229–238.
- [KY5] H. Kita, T. Miyamoto and K. Yoneda, *Modular function spaces and control functions of almost everywhere convergence*, Commentationes Mathematicae (Poznan). **41** (2001) 99– 133.
- [Ki11] H. Kita, *On the constant of Hunt's L^p -estimate and control functions*, Math. Japon. **35** (1990), 283–288.
- [KK] V. Kokilashvili and M. Krbeć, *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces*, World Scientific, (1991).
- [KR] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces* (English translation), Noordhoff Ltd Groningen (1961).
- [Muc] B. MUCKENHOUT, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.
- [Na] H. Nakano, *Modulated Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen Tokyou (1950).
- [Or1] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bullint'lde l'AcadPolserie A **8** (1932), 207–220.
- [Or2] W. Orlicz, *Über Räume (L^M)*, Bullint'lde l'AcadPolserie A **10** (1936), 93–107.

- [Or3] W. Orlicz, *Some classes of modular spaces*,
Studia Math'26 (1966) 165–192.
- [RR] M.M. Rao and Z.D. Ren *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker 1991.
- [RR2] M.M. Rao and Z.D. Ren *Applications of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker 2002.
- [Sj] P. Sjölin, *Two theorems on Fourier integrals and Fourier series*,
Uppsala University Report 3 1986.
- [So] F. Soria, *Integrability properties of the maximal operator on partial sums of Fourier series*,
Sem. Universidad Autónoma de Madrid, (1986).
- [Zyg] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, (Cambridge, 1959).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF EDUCATION,
KAGOSHIMA UNIVERSITY, 20-6 KORIMOTO 1-CHOME KAGOSHIMA 890-0065, JAPAN
E-mail address: hkita@edu.kagoshima-u.ac.jp