

回転球面上の帯状流の分岐解とカオス軌道

京都大学 数理解析研究所
佐々木 英一*, 竹広 真一, 山田 道夫
RIMS, Kyoto Univ.

Eiichi Sasaki, Shin-ichi Takehiro and Michio Yamada

概要

定常帯状流を自明解に持つ回転球面上の 2 次元非圧縮 Navier-Stokes 流の高 Reynolds 数における非定常解の性質を調べた. 非定常解はカオス的で, 自明解から分岐した定常解のまわりを経巡るように見える. カオス解と定常解の関連性を調べるために, 定常解の東西平均流を用いてカオス解の東西平均流を再現することを試みた. 解空間から定常解の張る線型空間への直交射影の東西平均流は, カオス解の東西平均流の時間変化をよく再現することを見出した. この結果はカオス解が定常解の張る線型空間の中にほとんど存在することを示唆している.

1 はじめに

木星や土星といった惑星大気には帯状流と呼ばれる強いジェット流が存在する. 回転球面上の 2 次元非圧縮 Navier-Stokes 流は惑星大気の最も単純なモデルの一つとして, また境界を持たないコンパクト領域における流れの一例としても多くの研究者の興味を集めてきた. 惑星大気は乱流状態にあることから, このモデルでの乱流の性質が調べられてきた. 近年, Obuse et al. [6] はこのモデルでの強制乱流の漸近状態を数値的に調べた. 時間積分の初期に流れ場は複数本のジェットからなる帯状流を形成するが, ジェットの融合を経て, 最終的に 2 本か 3 本のジェットからなる安定な帯状流となることを報告した.

帯状流の安定性の観点からは, Baines [1] は流れ関数が単一の球面調和関数 Y_l^0 で表される非粘性帯状流の線型安定性を調べた. 変曲点定理より球の回転角速度が充分大きいとき帯状流は線型安定となる. Baines は固有値問題をスペクトル法を用いて数値的に解き, 回

* esasaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

回転速度を増加させ帯状流が線型安定となる臨界回転角速度を求めた。しかし、彼の結果は臨界層と呼ばれる特異性の発現により数値誤差を含んでいた。近年, Sasaki et al.[9] は臨界層と北極・南極の特異性を考慮した shooting 法によって Baines[1] が求めた臨界回転角速度を最大約 20% 修正した。

また粘性帯状流については, Sasaki et al.[10] が非粘性の場合と同じく流れ関数が単一の球面調和関数で表される粘性帯状流の線型安定性を数値的に調べた。回転効果は粘性帯状流を安定化させ、回転角速度が増加するにつれて臨界 Reynolds 数は急激に増加する。彼らは、高 Reynolds 数における粘性帯状流が不安定となる回転角速度領域が非粘性帯状流が線型不安定となる回転角速度領域より大きいことを見出した。これは非粘性極限と非粘性における帯状流の安定性特性の不一致を示唆する。この見かけ上の矛盾は、Reynolds 数が増加するにつれて、粘性帯状流は不安定だが非粘性帯状流は安定となる回転角速度領域で、不安定擾乱の増幅率が 0 に収束することで解消される。

本論文では、Sasaki et al.[10] が調べた粘性帯状流が線型不安定となった後の高 Reynolds 数での非定常解の性質を調べる。この問題設定は Kolmogorov 問題を球面に拡張した問題設定であるため、Kolmogorov 問題について簡潔に紹介する。Kolmogorov 問題は $\sin$ 型の強制外力によって駆動される平面トーラス上の流れに関する問題で、層流から乱流への遷移過程の典型例と考えられてきた。Iudovich[3] は 2 本ジェットの平行流が任意の Reynolds 数で大域的に漸近安定であることを示し、Meshalkin & Sinai[5] は平行流の臨界モードが定常である (Hopf モードでない) ことを示した。さらに、Iudovich[3] は臨界 Reynolds 数から定常解が分岐することを示した。Okamoto & Shōji[7] は平面トーラスの様々なアスペクト比における 2 本ジェットの平行流の分岐構造を調べた。彼らは 2 本ジェットの平行流から pitchfork 分岐がおきること、アスペクト比によって saddle-node 分岐、Hopf 分岐、第二分岐を含む様々な種類の分岐がおきることを報告した。Kolmogorov 問題についてその問題設定の単純さから多くの研究が行われており、例えば高 Reynolds 数における非線形解の流れ場のパターン [4]、乱流遷移 [8]、カオス解の軌道不安定性 [2] などが調べられている。

以下では単一の球面調和関数で表される帯状流を自明解に持つ回転球面上の 2 次元非圧縮粘性流の高 Reynolds 数での非定常解の性質を調べる。第 2 節で支配方程式を示し、第 3 節では高 Reynolds 数における非定常解について議論する。第 4 節はまとめである。

2 支配方程式

我々の扱う支配方程式は回転球面上の2次元非圧縮粘性流の運動を記述する無次元化された渦度方程式で,

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{1}{R} \{(\Delta + 2) \Delta \psi + (l(l+1) - 2) Y_l^0(\mu)\}, \quad (1)$$

で表される. ここで t は時間, λ, μ は経度と $\sin$ 緯度 ($\mu = \sin \phi, \phi$ は緯度) を表す. ψ は流れ関数で渦度は $\zeta = \Delta \psi$ と表され, Δ は単位球面上の水平ラプラスアンである. 速度の経度成分, 緯度成分 (u_λ, u_μ) はそれぞれ $u_\lambda = -\sqrt{1-\mu^2}(\partial \psi / \partial \mu)$, $u_\mu = 1/\sqrt{1-\mu^2}(\partial \psi / \partial \lambda)$ で与えられる. R, Ω はそれぞれ Reynolds 数と無次元化された球の回転角速度, $J(A, B) = (\partial A / \partial \lambda)(\partial B / \partial \mu) - (\partial A / \partial \mu)(\partial B / \partial \lambda)$ はヤコビアンであり, $(l(l+1) - 2)Y_l^0(\mu)/R$ は渦度強制である. ここで $Y_l^m(\lambda, \mu)$ は 4π に正規化された全波数 l , 経度方向波数 m の球面調和関数である. 粘性項の $2\Delta \psi / R$ は粘性項を3次元デカルト座標から2次元球面座標に変換する際に自然に導出される項で, この項により系の全角運動量は保存される.

渦度方程式 (1) は任意の Reynolds 数, 回転角速度で l 本ジェットの帯状流

$$\psi_0(\mu) = -\frac{1}{l(l+1)} Y_l^0(\mu), \quad \zeta_0(\mu) = Y_l^0(\mu), \quad (2)$$

を解にもつ. ここでジェットの本数は経度方向の速度の極大値の数によって定義される. 我々の問題設定は Kolmogorov 問題を球面へ拡張した問題であることを指摘しておく. Kolmogorov 問題は平面トーラス上で定式化され, 単一の $\sin$ 関数で表される渦度強制によって駆動される2次元 Navier-Stokes 流を扱い, 流れ関数が単一の $\sin$ 関数によって表される平行流を解に持つ. 球面調和関数は水平ラプラシアン固有関数であり, $\sin$ 関数は平面トーラス上のラプラシアンの固有関数である. よって我々の問題設定と Kolmogorov 問題は, 渦度強制と自明解が各々の多様体上のラプラシアンの固有関数で表現されるという点で共通している.

3 高 Reynolds 数におけるカオス解の平均流の再現

1 本ジェットの帯状流 ($l = 1$) は適当な回転系への座標変換によって基本流をゼロにすることができ任意の Reynolds 数で擾乱は散逸する [10]. 2 本ジェットの帯状流 ($l = 2$) は任意の Reynolds 数と回転角速度で大域的漸近安定である [11]. 本稿では3本ジェットの

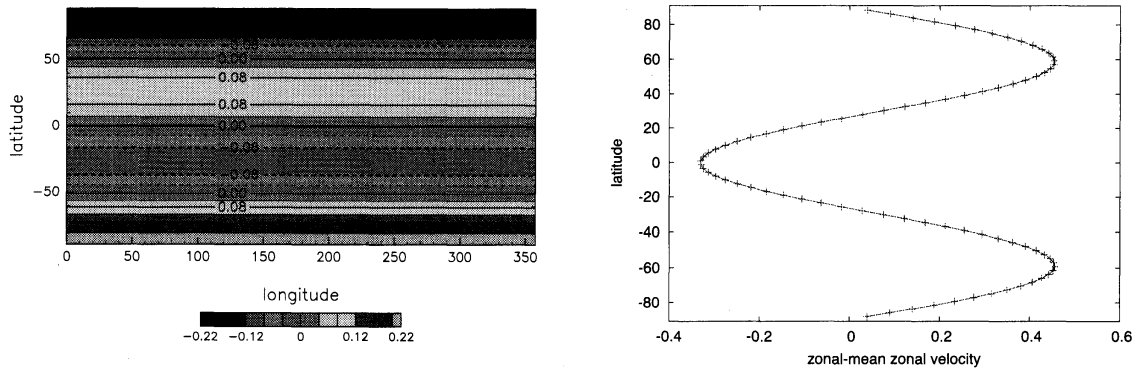


Fig.1 The streamfunction of the 3-jet zonal flow (left) and the longitudinal velocity (right). In the left figure, the horizontal and vertical axes indicate the longitude and the latitude, respectively, while in the right figure, the horizontal and vertical axes indicate the longitudinal velocity and the latitude, respectively.

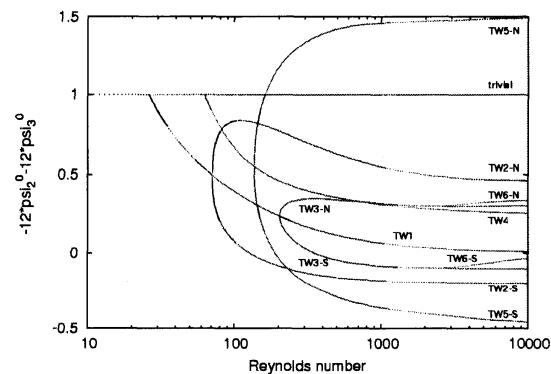


Fig.2 Bifurcation diagram in the non-rotating case. The blue asterisks and red crosses denote linearly stable/unstable regions, respectively. The horizontal and vertical axes indicate the Reynolds number and $-12\psi_2^0 - 12\psi_3^0$, respectively. Notice that the horizontal axis is log scale in order to describe all the bifurcation points in our computation.

帯状流 ($l = 3$) について, $R = 10^4$, $\Omega = 0$ における非定常解の性質を報告する. Fig.1 に 3 本ジェットの帯状流の流れ関数と経度方向の速度を示す. 以後 3 本ジェットの帯状流を自明解と呼称する.

非回転系における, 自明解から分岐する定常解の分岐ダイアグラムを Fig.2 に示す. Reynolds 数が増加すると, 自明解は不安定となり, Hopf 分岐によって定常進行波が分岐する. さらに Reynolds 数が増加すると, いくつかの定常進行波が pitchfork 分岐によって分岐する. これら定常進行波は Reynolds 数が増加すると $R = 249.5$ で Hopf 不安定となる. $R = 10^4$ で自明解を含めて 11 個の不安定定常進行波をみつけた. Fig.3,4 に定常進行

波の $R = 10^4$ における流れ関数とその東西平均流を示す。ここで東西平均流は

$$U(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\lambda(\lambda, \mu) d\lambda,$$

と定義される。図中の TW2-N, TW3-N, TW5-N, TW6-N はそれぞれ北半球に大きな渦を持つ解であり、赤道を軸に反対称な流れ関数もまた定常進行波解であり、それぞれ TW2-S, TW3-S, TW5-S, TW6-S と呼ぶ。自明解の分岐構造に関する詳細は Sasaki et al.[11] を参照していただきたい。

問題を数値的に解くためにスペクトル法を用いた。流れ関数は球面調和関数を用いて

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu),$$

と展開される。ここで $\psi_n^m(t)$ は展開係数で、 N は切断波数であり $N = 53$ に固定した。方程式の非線型項の評価は変換法を用い、経度方向の格子点数 I と緯度方向の格子点数 J を $I \geq 3N + 1, J > 3N/2$ としてエイリアシング誤差を除いた。時間積分は 4 次のルンゲ=クッタ法を用い、時間の差分間隔は $\delta t = 0.05$ とした。初期条件は分岐解析によって得た定常解に元の解の 0.1% のエネルギーをもつ一様乱数によって生成した微小擾乱を加えた流れ関数とした。時間積分は $t = 5 \times 10^5$ まで続け、時間平均量は区間 $5 \times 10^4 \leq t \leq 5 \times 10^5$ で求めた。

Fig.5 に非定常解のエネルギー密度の時間変化とそのパワースペクトルを示す。エネルギー密度は間欠的なバーストを繰り返す、パワースペクトルは広がっていることから、非定常解はカオス的である。Fig.6,7 にカオス解の流れ関数のスナップショットと同時刻の東西平均流を示す。カオス解の流れ関数が何度も低 Reynolds 数で分岐した不安定定常解に似たプロファイルとなり、カオス解は不安定定常解のまわりを巡るように見える。Fig.8 にカオス解の時間平均東西平均流と東西平均流のスナップショットを示す。カオス解の東西平均流は北半球に東向きの強いジェット流を持つ状態と南半球に東向きの強いジェット流を持つ状態を同じ頻度で繰り返す、時間平均東西平均流は赤道対称性を持つ。カオス解の時間平均東西平均流の振幅は自明解の速度の経度成分の約 1/10 程度である。

本論文では東西平均流に着目し、カオス解 ψ の東西平均流がどの程度 11 個の不安定定常解の線型結合で表現できるか調べる。まず 11 個の不安定定常解の線型結合で張られる線型空間を M としカオス解 ψ の M への直交射影を $P_M(\psi)$ とする。 ψ の東西平均流 $Z(\psi)$ を $P_M(\psi)$ の東西平均流 $Z(P_M(\psi))$ で近似する。この写像 $Z(P_M(\psi))$ は 11 個の不安定定常解についてはそれ自身の東西平均流を与え、 M の一般の元に対してはそれらの線型結合を与える。 $Z(\psi)$ と $Z(P_M(\psi))$ を比較することで、カオス解 ψ がどの程度線型空間

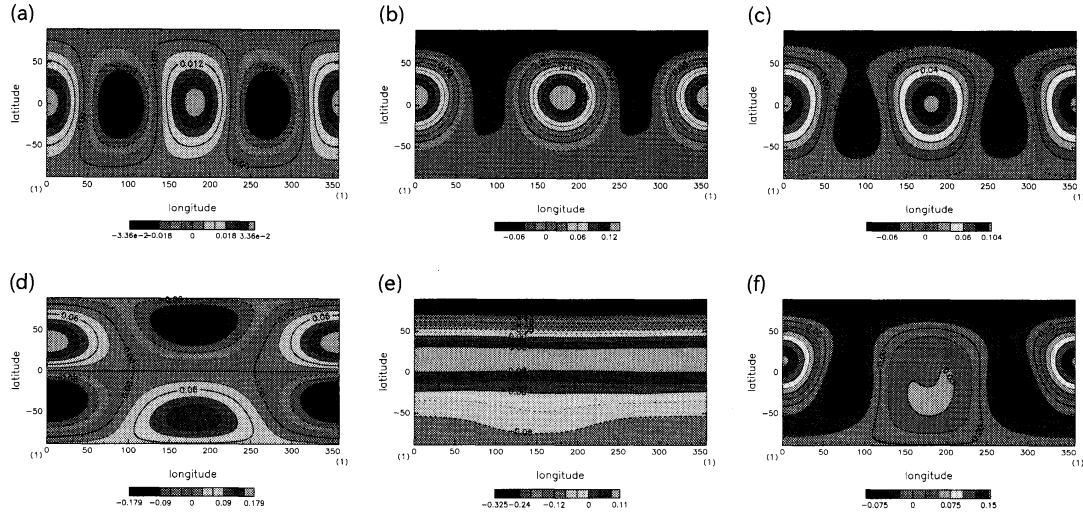


Fig.3 The streamfunctions of the steady traveling wave solutions at $\Omega = 0.0$ and $R = 10^4$; (a) TW1 (b) TW2-N, (c) TW3-N, (d) TW4 (e) TW5-N and (f) TW6-N, respectively. The horizontal and vertical axes indicate the longitude and the latitude, respectively.

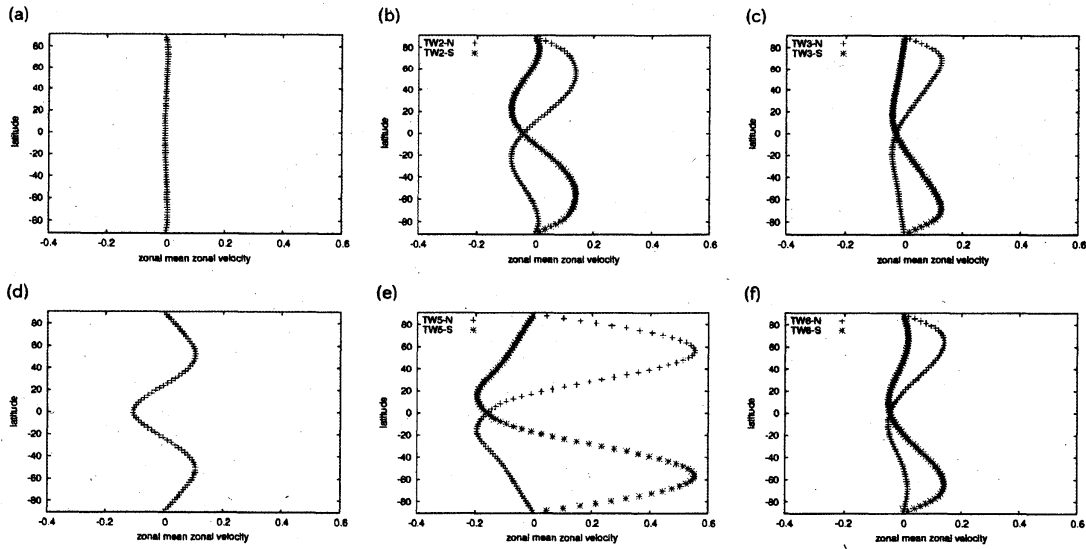


Fig.4 The zonal-mean zonal velocity of the steady traveling wave solutions at $\Omega = 0.0$ and $R = 10^4$; (a) TW1 (b) TW2, (c) TW3, (d) TW4 (e) TW5 and (f) TW6, respectively. In figure (b) the red cross and the blue asterisk indicate TW2-N and TW2-S, respectively. This point manner is same in the figure (c),(e) and (f).

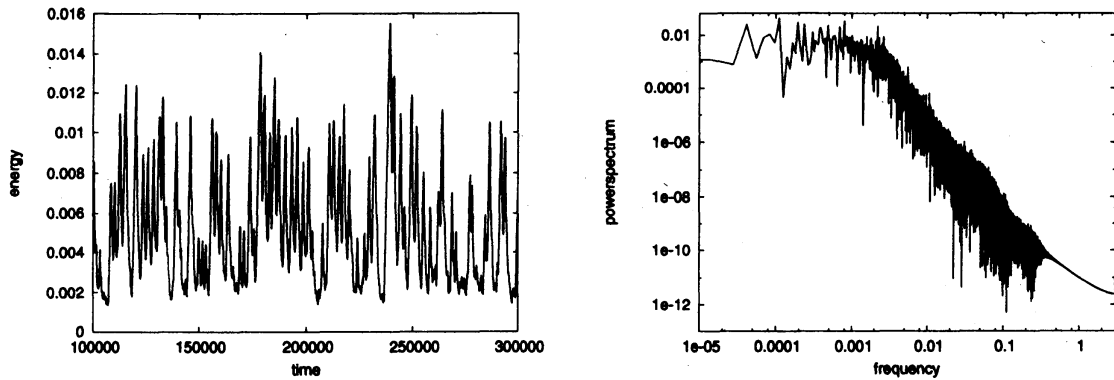


Fig.5 The time series of the energy density of the chaotic solution (left) and its power spectrum (right). In the left figure, the horizontal and vertical axes indicate the time and the energy density, respectively, while in the right figure, the horizontal and vertical axes indicate the frequency and the power spectrum of the energy density, respectively.

M に含まれているか、すなわち、カオス解の軌道がどの程度不安定定常解に影響をうけているか調べる。 $P_M(\psi)$ は

$$\hat{\psi}(\lambda, \mu, t) = \sum_{k=1}^K \int \frac{d\theta}{2\pi} c_k(\theta, t) \psi_k(\lambda - \theta, \mu) + \sum_{l=1}^L d_l(t) \psi_l^T(\mu), \quad (3)$$

と表される。ここで $\psi_k(\lambda, \mu)$ は経度方向に依存する定常解であり、 $\psi_l^T(\mu)$ は経度方向に依存しない定常解 (この系では自明解のこと) で、 $c_k(\theta, t)$, $d_l(t)$ は非定常解 ψ から決定される係数である。 $Z(P_M(\psi))$ は $\hat{\psi}(\lambda, \mu, t)$ の速度の経度成分を東西平均して

$$\hat{U}(\mu, t) = \sum_{k=1}^K \int \frac{d\theta}{2\pi} c_k(\theta, t) U_k(\mu) + \sum_{l=1}^L d_l(t) U_l^T(\mu), \quad (4)$$

となる。ここで $U_k(\mu)$, $U_l^T(\mu)$ はそれぞれ定常解 $\psi_k(\lambda, \mu)$, $\psi_l^T(\mu)$ の東西平均流である。係数 $\int \frac{d\theta}{2\pi} c_k(\theta, t)$, $d_l(t)$ は、写像 $Z(P_M(\psi))$ が定常解に対してはその東西平均流を返すことから、定常解の東西平均流 $\{U_k(\mu), U_l^T(\mu)\} (k=1, \dots, K, l=1, \dots, L)$ に対する双対基底 $\{U_k^\dagger(\mu), U_l^{T\dagger}(\mu)\} (k=1, \dots, K, l=1, \dots, L)$ を用いて、

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} c_k(\theta, t) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} U_k^{\dagger*}(\mu) U(\mu, t), \quad d_l(t) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} U_l^{T\dagger*}(\mu) U(\mu, t) \quad (5)$$

と与えられる。ここで $U(\mu, t)$ は非定常解 ψ の東西平均流である。ただし内積はエルミート内積とした。双対基底は Schmidt の直交化法を用いて求める。例えば $U_i^\dagger(\mu)$ を求める

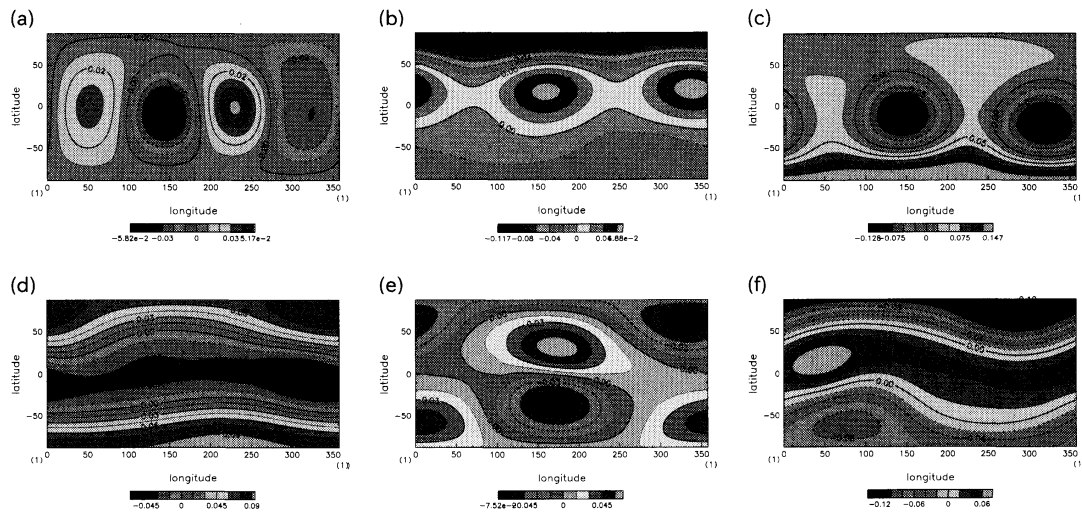


Fig.6 Snapshots of the streamfunction of the chaotic solution at $\Omega = 0.0$ and $R = 10^4$: (a) $t = 107000$, (b) $t = 108000$, (c) $t = 146000$, (d) $t = 182000$, (e) $t = 237000$ and (f) $t = 313000$, respectively. The horizontal and vertical axes indicate the longitude and the latitude, respectively.

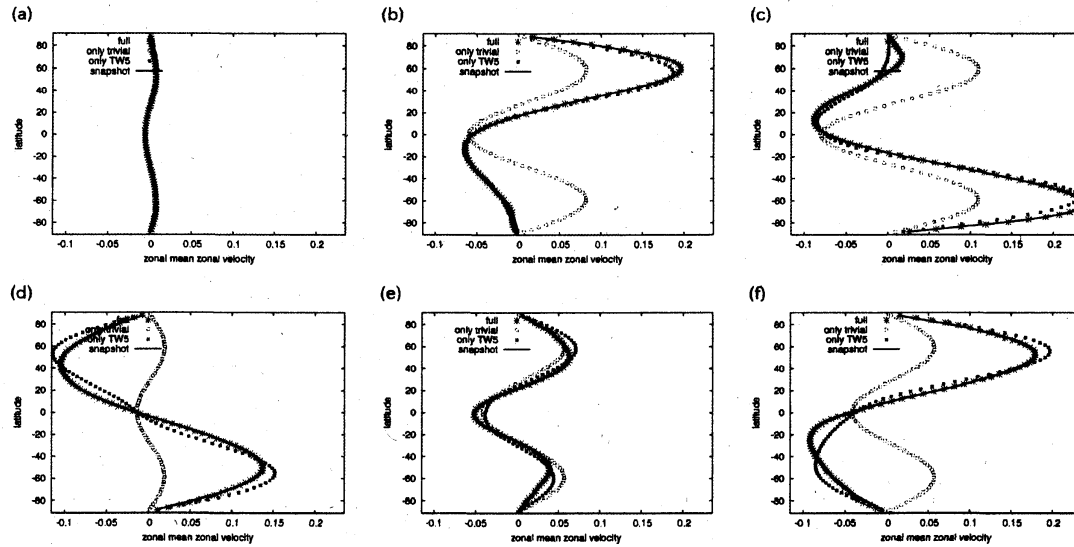


Fig.7 Snapshots of the zonal-mean zonal velocity of the chaotic solution at the same time of the streamfunctions shown in the figure 6. The black line indicates the zonal-mean zonal velocity of the chaotic solution. The blue asterisks, the purple squares and the aqua squares indicate the reproduced zonal-mean zonal velocity by the orthogonal projection method using the eleven steady/steady traveling solutions, only the trivial solution and the pair of TW5, respectively.

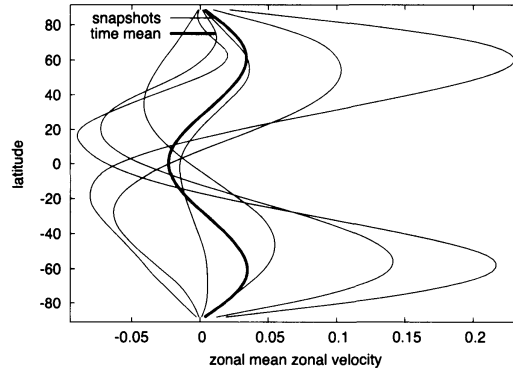


Fig.8 The zonal-mean zonal velocity of the chaotic solution. The black and rad lines denote the snapshots of the zonal-mean zonal velocity of the chaotic solution and the time-averaged zonal-mean zonal velocity, respectively. The horizontal and vertical axes indicate the zonal-mean zonal velocity and the latitude, respectively.

場合, まず $U_i(\mu)$ 以外の東西平均流から正規直交ベクトルを作り, 最後に $U_i(\mu)$ から正規直交ベクトルを作る. 最後に得た正規直交ベクトルは $U_i(\mu)$ 以外の定常解の東西平均流との内積は 0 となる. 適当な規格化を行えば $U_i(\mu)$ の双対基底 $U_i^\dagger(\mu)$ を得る.

Fig.9 にカオス解の時間平均東西平均流 $\frac{1}{T} \int_T dt Z(\psi)$ と 11 個の不安定定常解を用いた直交射影によって得た時間平均東西平均流 $\frac{1}{T} \int_T dt Z(P_M(\psi))$ を示す. ここで $\frac{1}{T} \int_T dt$ は時間間隔 $T = [5 \times 10^4, 5 \times 10^5]$ の間の時間平均を表す. $\frac{1}{T} \int_T dt Z(P_M(\psi))$ は $\frac{1}{T} \int_T dt Z(\psi)$ を 0.3% 程度の誤差で再現することができた. 一方, Fig.10 に自明解のみ, もしくは TW5-N, TW5-S のペアを用いた直交射影によって得た時間平均東西平均流を示す. この場合でも直交射影によって得た時間平均東西平均流がカオス解の時間平均東西平均流をよく近似している. よって単一の不安定定常解のみを用いた直交射影でもカオス解の時間平均東西平均流を再現することができる.

しかし, 東西平均流の時間変化については単一の不安定定常解を用いた場合と, 11 個の不安定定常解を用いた場合の間に差異がある. 直交射影によって得た東西平均流のカオス解の東西平均流に対する相対誤差を

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\sqrt{\int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} (U(\mu, t) - \hat{U}(\mu, t))^2}}{\sqrt{\int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} U^2(\mu, t)}}$$

によって評価する. 11 個の不安定定常解を用いた場合, 自明解のみを用いた場合, TW5-

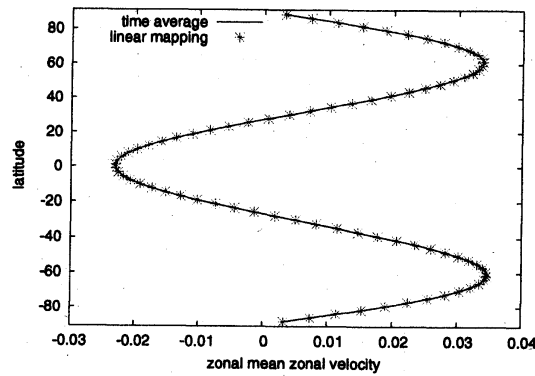


Fig.9 The reproduced zonal-mean zonal velocity by the use of the orthogonal mapping (4). The red line denotes the time-averaged zonal-mean zonal velocity of the chaotic solution, while the blue asterisks indicate the time-averaged zonal-mean zonal velocity by the orthogonal projection by use of the eleven unstable steady solutions.

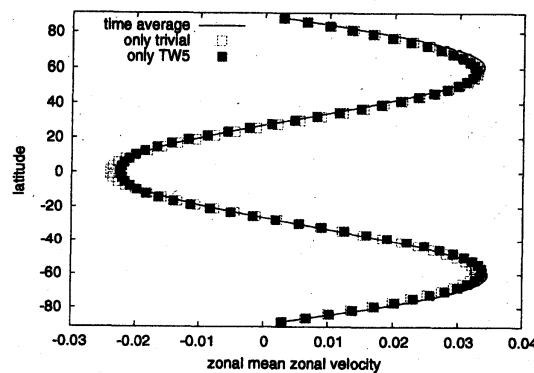


Fig.10 The reproduction of the time-averaged zonal-mean zonal velocity by the orthogonal projection in the case of the single solution used. The red line denotes the time-averaged zonal-mean zonal velocity of the chaotic solution while the purple and aqua squares denote that by the orthogonal projection constructed by the trivial solution and the pair of TW5, respectively.

N, TW5-S のペアを用いた場合の直交射影によって得た東西平均流の相対誤差の時間変化を Fig.11 に示す. 11 個の不安定定常解を用いて得た東西平均流の相対誤差の方が単一の不安定定常解を用いて得た東西平均流の相対誤差に比べ小さい. Fig.12 に 11 個の不安定定常解を用いた場合と単一の不安定定常解を用いた場合の相対誤差の時間平均を示す. 11 個の不安定定常解を用いた場合の方が単一の不安定定常解を用いた場合に比べ明らかに小さい. さらに Fig.7 に, 11 個の不安定定常解を用いた場合, 自明解のみを用いた場合, TW5-N, TW5-S のペアを用いた場合の直交射影によって得た東西平均流を示した. 11

個の不安定定常解を用いた場合, 直交射影によって得た東西平均流は各時刻のカオス解の東西平均流をよく近似していることが確認できる. 従って, 11 個の不安定定常解を用いた直交射影 P_M はカオス解の東西平均流の時間平均だけでなくその時間変化までよく再現する. この結果は, 定常解の臨界 Reynolds 数の約 40 倍の高 Reynolds 数におけるカオス解が, 低 Reynolds 数で分岐した定常解の張る線型空間の中にほとんど存在することを示唆している.

最後に回転系における非定常解の性質について報告する. 回転系の場合, 回転効果は流れを安定化させ, 非定常解は時間周期解となる. 低 Reynolds 数で分岐した不安定定常解の流れ場と時間周期解の流れ場はあまり似ていないが, 不安定定常解の東西平均流を用いた直交射影によって得た東西平均流は時間周期解の東西平均流を約 1% 程度の誤差で近似する. これは回転効果によって不安定定常解と非定常解の関係性が変化していることを示唆している.

4 まとめ

本論文では, 高 Reynolds 数における非定常解と分岐解の関連性について議論した. 非回転系の場合, 非定常解はカオス的で, 低 Reynolds 数で分岐した不安定定常解のまわりを経巡るように見える. カオス解と不安定定常解の関連性を調べるために, 不安定定常解の線型結合によってカオス解を再現することを試みた. 解空間から不安定定常解の張る線型空間へ直交射影した流れ場の東西平均流はカオス解の各時刻の東西平均流をよく再現することを見出した. この結果は高 Reynolds 数におけるカオス解が低 Reynolds 数で分岐した不安定定常解の張る線型空間の中にほとんど存在することを示唆している.

なお, カオス解と不安定定常解の距離によって, カオス解の東西平均流を再現することも試みた. 不安定定常解の東西平均流の線型結合の係数を, (1) カオス解と各不安定定常解の距離の比, (2) 11 個の不安定定常解の中でカオス解と最も近い不安定定常解となる確率, の二種類の方法でもとめた. しかし, どちらの方法でもカオス解の時間平均東西平均流を再現することはできなかった.

本研究ではカオス解の東西平均流を近似することを試みた. 2次元, 3次元の流れ場を本研究で用いた手法で不安定解を用いて再現できるかどうか調べ, 乱流と不安定解の関連性や不安定解を用いた乱流のモデル化を研鑽することにより, 乱流の理解を深めることが今後の課題である.

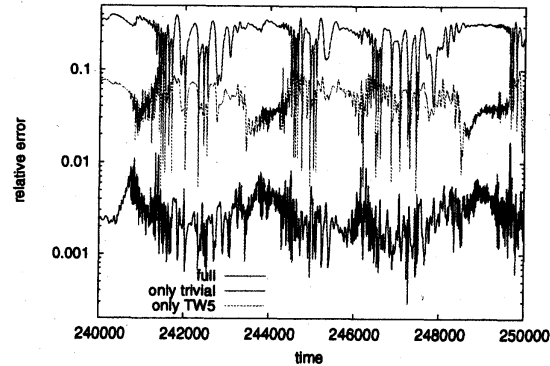


Fig.11 The relative error of the reproduced zonal-mean zonal velocity, $\mathcal{E}(t)$. The blue, purple and aqua lines denote in the cases of use of the eleven steady/steady traveling solutions, only the trivial solution and the single pair of TW5, respectively. The horizontal and vertical axes indicate the time and the relative error of the reproduced zonal-mean zonal velocity, respectively.

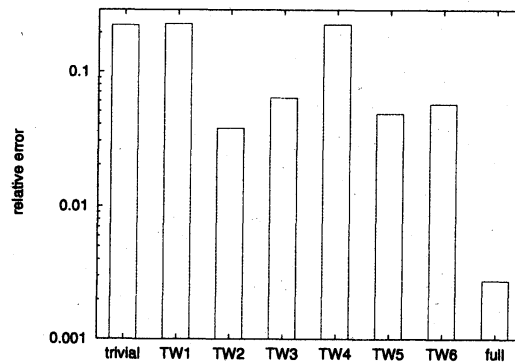


Fig.12 The time-averaged and ensemble-averaged relative error of the reproduced zonal-mean zonal velocity. The vertical axis indicates the time-averaged and ensemble-averaged relative error while the horizontal axis indicates the name of the solutions used in the orthogonal projection: starting from the left, only the trivial solution, only TW1, only the pair of TW2, only the pair of TW3, only TW4, only the pair of TW5, only the pair of TW6 and the eleven steady/steady traveling solutions.

参考文献

- [1] BAINES, P. G. 1976 The stability of planetary waves on a sphere. *J. Fluid Mech.* **73-2**, 193–213.
- [2] INUBUSHI, M., KOBAYASHI, M. U., TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2012 Co-variant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows. *Phys. Rev. E*, **85**, 016331.
- [3] IUDOVISCH, V. I., 1965 Example of the generation of a secondary stationary or periodic flow when there is loss of stability of the laminar flow of a viscous incompressible fluid. *J. Appl. Math. Mech.*, **29**, 527–544.
- [4] KIM, S. C. & OKAMOTO, H., 2010 Stationary vortices of large scale appearing in 2D Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **27**, 47–71.
- [5] MESHALKIN, L. D. & SINAI, Y. G., 1962 Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous liquid, *J. Appl. Math. and Mech.*, **25**, 1700–1705.
- [6] OBUSE, K., TAKEHIRO, S. & YAMADA, M. 2010 Long-time asymptotic states of forced two-dimensional barotropic incompressible flows on a rotating sphere. *Phys. Fluid*, **22**, 056601.
- [7] OKAMOTO, H. & SHŌJI, M., 1993 Bifurcation Diagrams in Kolmogorov's Problem of Viscous Incompressible Fluid on 2-D Flat Tori. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **10**, 191–218.
- [8] PLATT, N., SIROVICH, L. & FITZMAURICE, N., 1991 An investigation of chaotic Kolmogorov flows. *Phys. Fluid*, **3**, 681–696.
- [9] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2012 A note on the stability of inviscid zonal jet flows on a rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, **710**, 154–165.
- [10] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2013 Linear stability of viscous zonal jet flows on a rotating sphere. *J. Phys. Soc. Japan*, submitted.
- [11] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2013 Bifurcation structure of two-dimensional viscous zonal jet flows on a rotating sphere, in preparation.