

高速気体粒子を含む流れの 気体論模型

東大 宇宙研 小口伯郎

気体粒子の平均速度が熱速度に比較して非常に大きい場合
気体粒子の流れは *beam-like* と考えられる。そのような
流れが物体などと干渉するとき、物体から反射する粒子ある
いはそれらと衝突した経験をもった粒子は一樣流の *beam-like*
流れとはかなり異なった分布関数で記述されよう。この種
の流れのもっとも典型的なものとして高マッハ数の流れに現わ
れる衝撃波がある。分布関数が平衡分布よりあまり大きくず
れてない場合には、いわゆる B-G-K 模型¹⁾はホルツマン方程
式に対するよい近似を与えることが知られている。しかし上
に紹介した非常に高速気体粒子を含む流れのように分布関数
が平衡分布より大きくずれる場合その妥当性は必ずしも保障
されていない。実際 Liepmann²⁾³⁾ が求めた B-G-K 式の高
マッハ数における衝撃波の構造の数値解は速度・温度プロフィ
ルの非対称性を示し、従来知られている Mott-Smith の解析
結果および実験事実との差異を認められた。

B-G-K 模型方程式は種々 実際の応用に便利であるという事実から、最近その適用性を越えて取り取られているが、ここでは高速気体粒子を含む流れに適用する場合、その非平衡性を考えに入れる工夫が試みられた。簡単のため一次元定常の問題（例えば強い衝撃波の構造）と対照に取り扱うことにする。

物体との衝突を経験しない一様流の気体粒子は *beam-like* であるとする。分布関数はデルタ関数 δ を用いて

$$n_1 \delta(c_x = U, c_y = 0, c_z = 0)$$

と表わすことができる。ここで n_1 は *beam-like molecule* の数密度とする。衝突経験分子の分布関数を F とすると分布関数 f は

$$f = F + n_1 \delta \quad (1)$$

と書くことができる。

分布関数が式(1)によって表わされるとき、ボルツマン方程式の衝突項

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{coll} = \iiint (f'f'_1 - ff_1) g b db d\epsilon d\mathbf{c}_1 \quad (2)$$

を、B-G-K 衝突模型導出に類似の考えを適用して簡単化することを試みよう。先づ損失項、すなわち

$$L = \iiint f f_1 g b db d\epsilon d\mathcal{C}$$

について cross collision によるものは

$$n_1 \delta \iiint F_1 g b db d\epsilon d\mathcal{C} \quad (3)$$

および

$$n_1 F \iiint \delta_1 g b db d\epsilon d\mathcal{C} \quad (4)$$

である。ここで 相対速度 g は beam-like 粒子の平均速度 U が熱速度 $\bar{c}$ と比較して充分大であるということから

$$g \approx U$$

と与えられる。なお 衝突断面積と速度と関係しないという簡単な近似を導入すると 式 (3), (4) はそれぞれ

$$n_1 \delta \iiint F_1 g b db d\epsilon d\mathcal{C}_1 \approx n_1 n_2 U Q \delta \quad (5)$$

$$n_1 F \iiint \delta_1 g b db d\epsilon d\mathcal{C}_1 \approx n_1 U Q F \quad (6)$$

のような関係で表わすことができる。

式 (5) は beam-like 粒子の損失項を表わすか、beam-like 粒子については生成がないと仮定すると、その分布について

$$c_x \frac{\partial n_1 \delta}{\partial x} = -n_1 n_2 U Q \delta \quad (7)$$

を得る. non-beam-like 粒子の分布 F に関しては平衡分布からのずれが小さくなくして従来の B-G-K 模型が適用されるとする. 以上の事項を基に全分布関数 $f = F + n_1 \delta$ について Boltzmann 方程式と類似するものとして

$$C_x \frac{\partial (F + n_1 \delta)}{\partial x} = \nu (F_0 - F) \quad (8)$$

を得る. ここで

$$\nu = \nu_s + n_1 \Omega Q$$

で, ν_s は non-beam-like 粒子の self collision frequency. なる

$$F_0 = n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2k T_2} (\nu - u_2 z)^2 \right]$$

で, n_2, T_2, u_2 は non-beam-like 粒子の数密度, 温度, 平均速度である.

式(8)は従来の B-G-K 模型式の一つの拡張された形となっているが未知数 n_1 を含む. この未知数は式(7)より

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} = -n_1 n_2 Q$$

であるから,

$$n_1 = n_{10} e^{-\int_{-\infty}^x n_2 Q dx'} \quad (9)$$

と与えられる. ここで n_{10} は無限上流の数密度.

結局 式(9)を補足して 模型方程式(8)を解くことが可能になる。たとえば 衝撃波の問題については 式(8)の積分は容易に次の形で得られる。

$$F(C_x > 0) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{F_0}{C_x} \exp \frac{\xi' - \xi}{C_x} d\xi' + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{n_1 n_2 Q \delta}{\nu} \exp \frac{\xi' - \xi}{L} d\xi'$$

$$F(C_x < 0) = \int_{\infty}^{\xi} \frac{F_0}{C_x} \exp \frac{\xi' - \xi}{C_x} d\xi' + \int_{\infty}^{\xi} \frac{n_1 n_2 Q \delta}{\nu} \exp \frac{\xi' - \xi}{L} d\xi'$$

$$\xi = \int_0^x \nu dx' = \int_0^x (\nu_s + n_1 L Q) dx' \quad (10)$$

実際の数値計算は現在進行中で、その結果は得られてゐないが、最後に示した関係によって明らかに従来の B-G-K 模型式の解 ($n_i = 0$ に相当する) と比較するとき n_i が存在する衝撃波前方においてかなりの補正が現われることが予想される。実際式(10)から見られるように従来の B-G-K 解の非対称性を消去する傾向の補正である。B-G-K 解の非対称性については、最近 Bird⁴⁾ による数値実験の結果によって明らかになったように、かなり疑わしいものであることが判つてきた。そこでこの試みを従来の B-G-K 模型の欠点を補い、その適用範囲を広げることにすることを期待した。

文獻

- 1) Bhatnagar, P. L. et al, Phys. Rev., 94, 511 (1954).
- 2) Liepmann, H. W. et al, Phys. Fluids, 5, 1313 (1962).
- 3) Oguchi, H, In "Rarefied Gas Dynamics", Academic Press (1965).
- 4) Bird, G. A., J. Fluids Mech., 30, 479 (1967).