

知識論理・様相論理の標準形展開基底による特性化

梶山女学園大学 大芝 猛 (Takeshi Ohshiba)

名古屋工業大学 小橋 一秀 (Kazuhide Kobashi)

命題論理の言語に n 人についての “know” 記号 $K_1, \dots, K_n$ ($n = 1$ の場合は様相論理) を加えた言語を $\mathcal{L}$ とする。演繹体系 L_0 として、推論 $\frac{\varphi \quad \varphi \supset \psi}{\psi}$ (M.P.), $\frac{\varphi}{K_i(\varphi)}$ (K_i -rule) をもち、Axiom としてトートロジー全体と $K_i(\varphi \supset \psi) \supset (K_i(\varphi) \supset K_i(\psi))$ をもつものを取り、一般に L として L_0 に公理を追加する体系を扱う。

L について、(命題論理の主和標準形展開のように) 拡張された意味での最小項の集まり W_L を対応させ「 L の論理式の W_L の要素による標準形展開」による特性化を試みる。但しここで拡張された最小項を定義するために “strictly know” なる概念と対応する記号 $K_i[\]$ を導入する。

命題論理の場合と同様に、体系 L と言語 $\mathcal{L}$ の中の命題変数の個数を $m(\geq 1)$ 以下に制限してうる体系と言語を $^{(m)}L$ と $^{(m)}\mathcal{L}$ とする。

$$L = \bigcup_{m=1}^{\infty} ^{(m)}L, \quad \mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} ^{(m)}\mathcal{L}$$

(I) 先に、各 m について、 $^{(m)}L$ ($^{(m)}\mathcal{L}$) に対しての標準形展開のための最小項の集まり $^{(m)}W_L$ を構成する方法を提示し、(II) その全体としての W_L を提示することを試みる。

(I) まず演繹体系 $^{(m)}L$ とは独立に、言語 $^{(m)}\mathcal{L}$ の上の最小項の全体 $^{(m)}W$ を K_i の深さ (degree) k ごとに階層的に定義する:

$$^{(m)}W = ^{(m)}W^{(0)} \cup ^{(m)}W^{(1)} \cup ^{(m)}W^{(2)} \cup \dots$$

定義 1

$$\begin{aligned} ^{(m)}W^{(0)} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_m \in \{0, 1\} \right\}, \quad p^{\delta} = \begin{cases} p & (\delta = 1) \\ \neg p & (\delta = 0) \end{cases} \\ ^{(m)}W^{(k+1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left\langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid g \in ^{(m)}W^{(k)}, U_1, \dots, U_n \subseteq ^{(m)}W^{(k)} \right\} \end{aligned}$$

定義 2 • $U \subseteq ^{(m)}W^{(k)}$ に対し、

$$*K_i[U] \stackrel{\text{def}}{=} K_i(*U) \wedge \bigwedge_{U \not\subseteq X \subseteq ^{(m)}W^{(k)}} \neg K_i(*X)$$

- $U = \{g_1, \dots, g_d\}$ のとき、 $*U \stackrel{\text{def}}{=} *g_1 \vee \dots \vee *g_d$
- $f = \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle$ に対し、 $*f \stackrel{\text{def}}{=} *g \wedge \bigwedge_{i=1}^n *K_i[U_i]$

定理 1 $(^m)L_0 \vdash *(^m)W^{(k)}$

定義 3 論理式 $A \in (^m)\mathcal{L}$ に対応する最小項の集合 $(^m)W_A$ (条件無し展開):

$$\begin{aligned} (^m)W_{p_j} &= \{p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_{j-1}^{\delta_{j-1}} \wedge p_j \wedge p_{j+1}^{\delta_{j+1}} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_{j+1}, \dots, \delta_m \in \{0, 1\}\} \\ (^m)W_{B \wedge C} &= (^m)W_B^{<k>} \cap (^m)W_C^{<k>} \quad k = \max(\deg(B), \deg(C)) \\ (^m)W_{\neg B} &= (^m)W^{(k)} - (^m)W_B \quad k = \deg(B) \\ (^m)W_{K_i(B)} &= \{f \in (^m)W^{(k+1)} \mid f_i^{(k)} \subseteq (^m)W_B\} \end{aligned}$$

但し $f = \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \in (^m)W^{(k+1)}$ に対し、 g を $f^{<k+1>}$ 、 U_i を $f_i^{(k)}$ とかく。

定義 4

$$U \subseteq (^m)W^{(k)} \text{ に対し } U' = \left\{ \langle f, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid f \in U, U_1, \dots, U_n \subseteq (^m)W^{(k)} \right\}$$

とし、 $U^{<l>} \stackrel{\text{def}}{=} U^{\overbrace{(\dots)^{l-k}}^{l-k}}$ ($l \geq k$) とする。また、

$$U = \left\{ g \mid \langle g, \begin{pmatrix} K_1[V_1] \\ \vdots \\ K_n[V_n] \end{pmatrix} \rangle \in U, \text{ for some } V_1, \dots, V_n \subseteq (^m)W^{(k-1)} \right\}$$

定理 2 $A \in (^m)\mathcal{L}$ に対し

$$(^m)L_0 \vdash A \equiv *(^m)W_A$$

定義 5 $(^m)L (\supseteq (^m)L_0)$ に対し集合列 $(^m)W_L^{(k)} (\subseteq (^m)W^{(k)}) (k = 0, 1, 2, \dots)$ が $(^m)L$ を特性化するとは:

任意の $A \in (^m)\mathcal{L}$ に対し $\deg(A) = k$ とおくとき

$$(^m)L \vdash A \iff (^m)W_L^{(k)} \subseteq (^m)W_A \quad (\subseteq \text{ は有限集合の包含関係})$$

定理 3 $(^m)L (\supseteq (^m)L_0)$ に対し、 $(^m)W_L^{(k)} (k = 0, 1, 2, \dots)$ が L の特性化ならば、 $A, B \in (^m)\mathcal{L}$ につき、 $k = \max(\deg(A), \deg(B))$ ならば、

$$(^m)L \vdash A \equiv B \iff (^m)W_A^{<k>} \cap (^m)W_L^{(k)} = (^m)W_B^{<k>} \cap (^m)W_L^{(k)} \quad (= \text{ は有限集合の一致})$$

($A \in (^m)\mathcal{L}$ に対し、 $(^m)W_A^{<k>} \cap (^m)W_L^{(k)}$ を A の $k (\geq \deg(A))$ 次の標準形展開という。)

定理 4 $(^m)L(\supseteq (^m)L_0)$ に対し、 $(^m)W_L^{(k)}(k = 0, 1, 2, \dots)$ が $(^m)L$ の特性化となるための必要十分条件は次の 1) ~ 3) である。

$$1) \forall f(f \in (^m)W_L^{(k)} - (^m)W_L^{(k)}) \Rightarrow (^m)L \vdash *f \equiv \perp)$$

$$2) \forall A(A \in \text{Axiom} (^m)L) \Rightarrow (^m)W_L^{(k)} \subseteq (^m)W_A)$$

$$3) \forall r = \frac{A_1, \dots, A_{d_r}}{A_0} \in \text{rule} (^m)L \text{ に対し、}$$

$$(^m)W_L^{(k_i)} \subseteq (^m)W_{A_i}(i = 1, \dots, d_r) \Rightarrow (^m)W_L^{(k_0)} \subseteq (^m)W_{A_0}(\text{但し、deg}(A_i) = k_i)$$

(II)

定理 5 任意の $m(\geq 1)$ に対し $(^m)L(\supseteq (^m)L_0)$ を特性化する集合列 $(^m)W_L^{(k)}(k = 0, 1, 2, \dots)$ が与えられるなら、

$\forall A \in \mathcal{L} \quad \text{rank}(A) = m, \text{ deg}(A) = k$ とおけば、

$$L \vdash A \Leftrightarrow (^m)W_L^{(k)} \subseteq (^m)W_A$$

但し $\text{rank}(A) = A$ の中の命題変数の個数。

(証明) “ $\Leftarrow$ ” は定義から明らか。“ $\Rightarrow$ ” も $L \vdash A \Rightarrow (^m)L \vdash A$ から明らか。

この定理の意味で “ $\{(^m)W_L^{(k)} | k = 0, 1, 2, \dots\}, m = 1, 2, \dots\}$ ” あるいは $W_L = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} (^m)W_L^{(k)}$ は L を特性化している。” といえる。

[特性化の例]

(1) 最初の L_0 に対し:

$$(^m)W_{L_0}^{(0)} = (^m)W^{(0)},$$

$$(^m)W_{L_0}^{(k+1)} = \left\{ \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid \begin{array}{l} g \in (^m)W_{L_0}^{(k)}, \\ \forall j(U_j \subseteq (^m)W_{L_0}^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対し } \forall j('U_j = g_j^{(k)}) \end{array} \right\}$$

(2) $(^m)T = (^m)L_0 \cup \{K_i(\varphi) \supset \varphi | i = 1, \dots, n, \varphi \in (^m)\mathcal{L}\}$:

$$(^m)W_T^{(0)} = (^m)W^{(0)},$$

$$(^m)W_T^{(k+1)} = \left\{ \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid \begin{array}{l} g \in (^m)W_T^{(k)}, \\ \forall j(\underline{g \in U_j} \subseteq (^m)W_T^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対し } \forall j('U_j = g_j^{(k)}) \end{array} \right\}$$

(3) $(^m)S_4 = (^m)T \cup \{K_i(\varphi) \supset K_i(K_i(\varphi)) | i = 1, \dots, n, \varphi \in (^m)\mathcal{L}\}$:

$$(^m)W_{S_4}^{(0)} = (^m)W^{(0)},$$

$$(^m)W_{S_4}^{(k+1)} = \left\{ \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid \begin{array}{l} g \in (^m)W_{S_4}^{(k)}, \\ \forall j(g \in U_j \subseteq (^m)W_T^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対し } \forall j('U_j = g_j^{(k)}), \\ \forall j((\bigcup_{h \in U_j} h^{(k)}) \subseteq g_j^{(k)}) \end{array} \right\}$$

$$(4) {}^{(m)}S_5 = {}^{(m)}S_4 \cup \{\neg K_i(\varphi) \supset K_i(\neg K_i(\varphi)) \mid i = 1, \dots, n, \varphi \in {}^{(m)}\mathcal{L}\}:$$

$${}^{(m)}W_{S_5}^{(0)} = {}^{(m)}W^{(0)},$$

$${}^{(m)}W_{S_5}^{(k+1)} = \left\langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \left\{ \begin{array}{l} g \in {}^{(m)}W_{S_5}^{(k)}, \\ \forall j (g \in U_j \subseteq {}^{(m)}W_T^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対して } \forall j (U_j = g_j^{(k)}), \\ \forall j ((\bigcup_{h \in U_j} h^{(k)})_i \subseteq g_j^{(k)}), \\ \forall j (g_j^{(k)} \subseteq \bigcap_{h \in U_j} h_j^{(k)}) \end{array} \right\}$$

$$(5) {}^{(m)}K_{(I \rightarrow J)} = {}^{(m)}S_5 \cup \{K_I(\varphi) \supset K_J(\varphi) \mid \varphi \in {}^{(m)}\mathcal{L}\}:$$

$${}^{(m)}W_{K_{(I \rightarrow J)}}^{(0)} = {}^{(m)}W^{(0)},$$

$${}^{(m)}W_{K_{(I \rightarrow J)}}^{(k+1)} = \left\langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \left\{ \begin{array}{l} g \in {}^{(m)}W_{K_{(I \rightarrow J)}}^{(k)}, \\ \forall j (g \in U_j \subseteq {}^{(m)}W_T^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対して } \forall j (U_j = g_j^{(k)}), \\ \forall j ((\bigcup_{h \in U_j} h^{(k)})_i \subseteq g_j^{(k)}), \\ \forall j (g_j^{(k)} \subseteq \bigcap_{h \in U_j} h_j^{(k)}), \\ U_J \subseteq U_I \end{array} \right\}$$

公理 $K_I(\varphi) \supset K_J(\varphi)$ の存在は $K_{(I \rightarrow J)}$ が、 n 人のうち I から J への情報伝達のある体系であることを表している。

参考文献

- [1] R. Fagin, J. Y. Halpern, M. Y. Vardi: *A Model-Theoretic Analysis of Knowledge Preliminary Report, 25thFOCS*
- [2] J. Hintikka: *Knowledge and belief*, Cornell University Press 1962
- [3] M. Sato: *A study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method Publications Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, 1977*
- [4] 大芝 猛, 小橋 一秀. 知識命題の標準形を用いる妥当性検証数理解析研究所講究録 906, 1995