

群の表現と準不変測度

京大 理 平井 武 (Takeshi HIRAI)

序. 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ に群 G が 準不変に作用している, 即ち, 密度 $\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)}$ が $\forall g \in G$ に x に対して存在しているとする. このとき空間 $L^2(X, \mu)$ 上に G のユニタリ表現が

$$(0.1) \quad T_g^\alpha f(x) = \alpha(g, x) \sqrt{\frac{d\mu(g^{-1}x)}{d\mu(x)}} f(g^{-1}x) \quad (x \in X)$$

と表現できる. 即ち, $\alpha(g, x)$ は $G \times X$ 上の函数で

$$(0.2) \quad \begin{cases} |\alpha(g, x)| = 1, \quad \alpha(g, \cdot) \text{ は } X \text{ 上で可測}, \\ \alpha(g_1 g_2, x) = \alpha(g_1, x) \alpha(g_2, g_1^{-1}x) \end{cases} \quad \text{[コホモロジー条件]}$$

を満たしていて, multiplier と呼ばれる.

群 G が位相群であるときは, 対応 $G \ni g \mapsto T_g^\alpha$ に連続性を要求するので, G の X への作用について何らかの付加条件が必要となる. また可測函数 $\beta(x)$ により, α を

$$(0.3) \quad \alpha_1(g, x) = \beta(x) \alpha(g, x) \beta(g^{-1}x)^{-1}$$

と変換すれば, 表現 T^α と T^{α_1} はユニタリ同値

$M_\mu f(x) = \mu(x) f(x)$, 1より同値である。表現 T^α の
 既約性には, μ が G -ergodic である (定義は [23, p.58])
 が必要であるが, 十分ではない。さらに, G 局所コン
 パクト, H を G の閉部分群, μ を $X = G/H$ 上の自然な
 G -準不変測度, とすると, $\alpha \equiv 1$ として表現 T^α は X 上の
 準既約表現であり, その既約分解 (= Plancherel 公式)
 は我々の主要な問題のうちの一つである。しかし ergo-
 dicity が既約性や因子環性と密接に関連していることは
 疑問の余地がない。最近尾畑氏に教示いただいた [1] は,
 私か [8] で G_∞ の既約表現を構成した手法のさらなる
 拡張を与えてくれる手掛りとなる。

以上の一般的状況において, G や X を特殊化するにより,
 様々な問題との関連が生じ, 我々は, 準不変測度の重要
 性については皆同意する。しかしこの小論では, むしろ「群
 の表現」という観点に重心を移して, その分野で「測度」
 の占める位置について, 事あるため検討してみることも
 「測度加われば何も出来ないのか?」「測度以前にできる
 ことは何か?」といった最近の問題意識であるが, 非局所コ
 ンパクト群 $\text{Diff}_0(M)$ (= 多様体 M 上のコンパクト台を持つ
 diffeomorphism 全体) や非I型群 G_∞ (= $\mathbb{N}$ 上の有限
 置換全体よりなる無限対称群) などを頭に置いての議論

である。表現論の曙光にまでさかのぼって、反省してみることにし、将来の指針と意思図である。全体の構成は次の通り。

§1. 測度以前: 群上の正定値関数, 正定値類関数, 球関数, 不変正定値内積

§2. 測度以後: 誘導表現の手法, 因子表現と測度論的力学系, "dual pair" の手法

§3. $\text{Diff}(M)$ と G_∞ :

順序付配位空間と配位空間,

関数集合のなす空間上に測度を構成する試み

§1. 測度以前

このタイトルは、「測度が無くても出来ることは何か?」と解に「たどり着く」

1.1. 群上の正定値関数 [4]

群 G 上の関数 $\varphi(g)$ が正定値であるとは、有限個の $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ と $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ に対し,

$$(1.1) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varphi(g_i^{-1} g_j) c_i \bar{c}_j \geq 0$$

と成るものである。位相群 G のユニタリ表現 (T_g, ψ) に対し, $v \in \psi, v \neq 0$, をとれば

$$(1.2) \quad \varphi(g) = \langle T_g v, v \rangle$$

は (表現 T に付随する) 連続正定値関数である。

逆に連続正定値関数 φ を与える。 $\mathbb{C}[G]$ を G の代数的群環とすると、 $\xi = \sum_{g \in G} \xi_g \cdot g \in \mathbb{C}[G]$, $\xi_g \in \mathbb{C}$, に対し、

$$(1.3) \quad \langle \xi, \xi \rangle_{\varphi} \equiv \sum_{g, h \in G} \varphi(g+h) \xi_g \overline{\xi_h}$$

とおく。この内積の核を J_{φ} とし、 $\mathbb{C}[G]/J_{\varphi}$ を完備化して Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\varphi}$ を与える。その上に G の表現

$$(1.4) \quad U_g^{\varphi} \xi \equiv \sum_{g' \in G} \xi_{g'} \cdot g \cdot g' \quad (\text{左移動})$$

が出来る。 $\xi = \xi_0$ バグトル $\xi_0 = 1 \cdot e$ (e は G の単位元) をとると

$$(1.5) \quad \langle U_g^{\varphi} \xi, \xi \rangle_{\varphi} = \varphi(g)$$

となる。

表現 T に付随する正定値関数全体 $P(T)$ は T の行列要素の "対角成分" 達であるが、それらの $\mathbb{C}$ 上の一次結合全体 $\langle P(T) \rangle$ をとると、 T の全ての行列要素が出来る。

定義 1.1. φ, ψ を2つの正定値関数とすると、 $\varphi \leq \psi$ とは、 $\varphi - \psi$ が非正定値であることである。 $M(\varphi) \equiv \{ \psi \text{ 正定値}; \exists \lambda \geq 0 \text{ s.t. } \psi \leq \lambda \varphi \}$ とおく。 φ が indecomposable であるとは、 $\forall \psi \in M(\varphi), \exists \lambda \geq 0 \text{ s.t. } \psi = \lambda \varphi$, となること。

定理 1.2. Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\varphi}$ 上の φ に対し、 $\forall \psi \in M(\varphi)$ に対し、

$$(1.6) \quad \langle A_{\psi} \xi, \xi \rangle_{\varphi} = \sum_{g, h \in G} \psi(g+h) \xi_g \overline{\xi_h}$$

となる正値エルミート作用素が存在する。 A_{ψ} は表現 U_g^{φ} と可換である: $A_{\psi} U_g^{\varphi} = U_g^{\varphi} A_{\psi}$. また、対称 $M(\varphi) \ni \psi \mapsto A_{\psi}$, はかかるエルミート作用素全体の上的 1-1 対応である。

系 1.3. 表現 (U^ψ, τ_ψ) が既約であるための必要十分条件は ψ が indecomposable であることである。

以下では, G は 局所コンパクト, とら反変する. G の左 Haar 測度を dg と書く. $L^1(G, dg)$ に 積と $\ast$ -作用を

$$(1.7) \quad \begin{cases} (f_1 \ast f_2)(g) = \int_G f_1(h^{-1}g) f_2(h) dh, \\ f^\ast(g) = \Delta(g)^{-1} \overline{f(g^{-1})}, \quad \Delta(g) = \frac{d\ell(hg)}{d\ell h} \end{cases}$$

と入れる. $L^1(G)$ 上の線形汎関数 $\psi \in L^\infty(G)$ により $L_\psi f = \int_G f(g) \psi(g) dg$ と表わされる.

定理 1.4. 汎関数 L_ψ が正定値である (i.e. $L_\psi(f \ast f^\ast) \geq 0, \forall f \in L^1(G)$) とき, ψ は 連続な 正定値関数と等しいと証明される。

この定理により, 連続正定値関数の凸集合 $\{\psi \leq 1\}$ が弱コンパクトとなる. Krein-Milman の 端点定理, および, $\psi = \chi_W \ast (\chi_W)^\ast$, χ_W は e のコンパクト近傍 W の 特性関数, が 正定値である, により 次の結果が得られた。

定理 1.5. 局所コンパクト群 G は, 十分多くの既約ユニタリ表現を持つ。

1.2. 正定値類関数 ([19], [20])

関数 ψ が類関数であるとは, $\psi(g_1 g_2^{-1}) = \psi(g_2^{-1} g_1)$ ($g_1, g_2 \in G$) と内部自己同型で不変なものである. 連続正定値類関数

の全体を $L^+(G)$ と書く。今 G を 離散群 とす。

$\forall \psi \in L^+(G)$ に對し, 1.1 と同様に, $\mathcal{O}_\psi = \mathcal{O}[G]$ 上 に 内積 $\langle f_1, f_2 \rangle_\psi$ を入れる。 ψ が 正定値 であるから, 内積 は, $\langle \psi_g^{-1} f_1, f_2 \rangle_\psi = \langle f_1, \psi_g^{-1} f_2 \rangle_\psi$ の他に 次 を 満たす。

(1.8) $\langle f_1, f_2 \rangle_\psi = \langle f_1^*, f_2^* \rangle_\psi, \langle \psi_g^{-1} f_1, f_2 \rangle_\psi = \langle f_1, \psi_g^{-1} f_2 \rangle_\psi,$
 但し, ψ_g^{-1} は g^{-1} による 移動 である。 今 $\mathcal{O}_\psi$ 上の 内積 の 核 $\mathcal{I}_\psi$ は $*$ -不変 な 両側 理想 であり, $\mathcal{O}_\psi \equiv \mathcal{O}_\psi / \mathcal{I}_\psi$ は $*$ -環 である。 Hilbert 空間 $\mathcal{h}_\psi$ 上 に $\mathcal{O}_\psi$ の 表現 ψ , 逆表現 ψ^* を $f_1 \mapsto f_1 * f_1, f_1 \mapsto f_1 * f,$ によって 定義 する。 これから 生成 する $\mathcal{h}_\psi$ 上の von Neumann 環 を それぞれ $\mathcal{U}(\mathcal{O}_\psi), \mathcal{V}(\mathcal{O}_\psi)$ と書くと,
 $\mathcal{U}(\mathcal{O}_\psi)' = \mathcal{V}(\mathcal{O}_\psi), \mathcal{V}(\mathcal{O}_\psi)' = \mathcal{U}(\mathcal{O}_\psi),$
 $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_\psi) \equiv \mathcal{U}(\mathcal{O}_\psi) \cap \mathcal{V}(\mathcal{O}_\psi)$ は 共通 の 中心,
 となる。 さらに, $\langle f_1, f_2 \rangle_\psi$ を $f_1 * f_2^*$ の 期待値 と 与えられる。 これは $\mathcal{U}(\mathcal{O}_\psi), \mathcal{V}(\mathcal{O}_\psi)$ の faithful trace を 与える。 従って これは 有限 von Neumann 環 である。

$M^0(\psi) \equiv M(\psi) \cap L^+(G)$, とおくと, ψ が "indecomposable" ならば, $\forall \psi \in M^0(\psi), \exists \lambda \geq 0$ s.t. $\psi = \lambda \psi$, となる。 とす。

$\forall \psi \in M^0(\psi)$ に對し, $\mathcal{h}_\psi$ 上の 正定値 Hermitian 作用素 A_ψ を $*$ -作用 $\mathcal{I}_\psi: f \mapsto f^*$, と可換 である ことが ある。

$$(1.9) \quad \langle A_\psi f_1, f_2 \rangle_\psi = \langle f_1, f_2 \rangle_\psi \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{O}_\psi)$$

となる。 $\Rightarrow A_\psi$ は $\mathcal{Z}_+(\mathcal{O}_\psi) \equiv \{A \in \mathcal{Z}(\mathcal{O}_\psi); A \geq 0\}$ の元

である。さらに次が得られる。 $\varphi \in L^+(G)$ とする。

定理 1.6. (i) 対応 $M^0(\varphi) \ni \varphi \mapsto A_\varphi \in \mathcal{Z}_+(\mathcal{O}_\varphi)$, は bijection である。

(ii) G の表現 $\psi_g^\varphi, \psi_g^\varphi (g \in G)$ は G に関する von Neumann 環 $\mathcal{U}(\mathcal{O}_\varphi), \mathcal{V}(\mathcal{O}_\varphi)$ が因子環であるための必要十分条件は φ が indecomposable であることである。

この定理の逆として次が成立する。

定理 1.7. G のユニタリ表現 $W_g (g \in G)$ に対して, G に関する因子環の表現を $W_f (f \in \mathcal{O})$ とし, それらが生成する von Neumann 環を $\mathcal{W}$ とする。 $\mathcal{W}$ が faithful trace Φ をもつとする。このとき $\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \Phi(W_{f_1} W_{f_2}^*) = \Phi(W_{f_1} \cdot W_{f_2}^*)$ とおけば, この内積は, ある $\varphi \in L^+(G)$ によって $\langle f_1, f_2 \rangle_\varphi$ の形に表される。そして, 対応 $W_f \mapsto f + j_\varphi f \in \mathcal{O}_\varphi (f \in \mathcal{O})$ は $*$ -環の同型である。

Thoma [19] では, 群 $G = \mathbb{Q}_\infty$ に対して, 全ての indecomposable $\varphi \in L^+(G)$ を具体的に求めている。さらに Vershik 氏は [21] などでこれらの φ に対する因子表現を具体的に構成する等の研究を行っている。

1.3. 球函数・帯球函数 ([5], [7])

群 G とその関部分群 G_0 とする。ユニタリ表現 $(\tau, \mathcal{H})$ が G_0 に

関に class 1 であるとは, $Tg\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}_0 (g \in G_0)$ となるベクトル $\mathbb{Z}_0 \in \mathfrak{g}, \neq 0$, が存在することである。このとき行列要素 $\langle Tg\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_0 \rangle$ を, T -固有球函数と, $\mathbb{Z}_0$ に $\langle Tg\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_0 \rangle$ を 帯球函数と呼ぶ。

(1°) G の既約表現 π G_0 に關し class 1 になるものの分類は帯球函数の論になる。適当な場合には, 積分方程式や微分方程式で特徴づけられる。

(2°) 別の観点として, 種々の古典的特殊函数を "球函数" として把え直すことや, 新しい特殊函数を産出することができる。

(3°) $\text{pair}(G, G_0)$ としてよく研究されているのは,

① 対称文の場合: G の対称的自同型 σ があって $(G^\sigma)_0 \subset G_0 \subset G$, 但し $(G^\sigma)_0$ は G^σ の σ の連結成分。

② G_0 がコンパクトで, G 上の G_0 -両側不変な L^1 -函数のなす環が可換な場合 [Gel'fand 文と呼ぶ]

(注. これを別の言い方をすると, G の G_0 環境の既約表現 T に対して, G_0 の自明表現 1_{G_0} の現る回数 ν は真々 1)

Godement [7] は, G_0 コンパクトの場合で, 表現 T はユニタリとは限らず, また G_0 の一般の既約表現 ρ に対して球函数論を展開した。ここでは帯球函数に当るものを次のように定義する。表現 $T|_{G_0}$ の下で, ρ の値 λ 部分空間

間への直交射影を $E(\sigma)$ とおくと,

$$\varphi(g) \equiv \text{Tr}(E(\sigma) T_g) = \text{Tr}(E(\sigma) T_g E(\sigma)).$$

新屋 [15] では, [6] の議論を精密化し, 特定の群に対して, 球函数を計算した.

1.4. 不変正定値内積

1°. G -module (= G が線形に作用するベクトル空間) V があつたとき, V に G -不変な内積が入るかどうかが問題になる. $G = \text{Diff}_0(M)$ などに對しては, 内積がどこかの測度から来ているとはうたてないで考へるならば, 新しい知見が得られる可能性がある.

2°. 無限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に對して, $\mathfrak{g}$ -module V に $X \in \mathfrak{g}$ の作用が skew-hermitian になるように "不変" 内積が入れるかを問題にする. 例へば, $\mathfrak{g}$ が M 上の台がコンパクトなベクトル場全体 $\text{Vect}_0(M)$ とか, あるいは, Kac-Moody 環とかである. 後者については, 須藤清一氏の [18] 等の一連の仕事では, 正定値内積を使って V を完備化してこのユニタリ群の中に, $\mathfrak{g}$ に對する (もしくは $\mathfrak{g}$ の完備化に對する) Lie 群 G を構成している.

また, Lie 超代数 $\mathfrak{g}$ の "ユニタリ" 表現の研究でも "不変" 内積をいへる例になる ([3] など).

==では 簡単のため G や $\mathfrak{g}$ が 有限次元半単純の場合のものを先に挙げる。

例1 [6] $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ とし, B を上三角行列全体のなす部分群, χ をその1次元表現とする。 C^∞ -version における B から G への χ の誘導表現は ある 函数空間 $V = D_\chi \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ の上に実現される。 ==での (正定値とは限らない) G -不変内積をさがすと, 本質的には $C_0^\infty(\mathbb{R})$ での 超函数 λ

$$(*) \quad \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} |x|^{\lambda} dx, \quad \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} |x|^{\lambda} \operatorname{sgn}(x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

を対応せよになる ([6, Chap VII])。 ところが 正定値内積を与えよのが, $-1 < \lambda < 1$ に対する前者であり, G の補系列表現を与えよになる。 なお, (*) では パラメータ $\lambda \in \mathbb{C}$ についての 解析接続を表示している。

例2 [2] $\mathfrak{g}$ を実半単純 Lie 環, K を $\mathfrak{g}$ に対応する中心有限の Lie 群 G の最大コンパクト部分群とする。 $\mathfrak{g}$ -module かつ K -module である V に対して, $\mathfrak{g}$ と K の作用が 可換しているとき $(\mathfrak{g}, K)$ -module と呼ぶ。 G の既約ユニタリ表現の分類は, 代数的に既約な $(\mathfrak{g}, K)$ -module での "不変" 正定値内積を持つものと (同値を module として) bijective に対応する。 さて, V には K -作用に対して標準的な代数的基底 $\{e_i\}$ が与えられているので, 内積 $\langle e_i, e_j \rangle$ を値として決定すればよいとも言える。 実際 J.A. Wolf

氏と銘付たとき、彼はこの問題にコンピュータを使つてみたところであった。[2]では、最善ウェイトを持つ $(\mathfrak{g}, K)$ -module についてコンピュータに頼らない証明が表れている。

§2. 測度以後

2.1. 誘導表現の手法

位相群 G に対して、閉部分群 H とそのユニタリ表現 $(\pi, V(\pi))$ を与える。ここで $V(\pi)$ は π の表現空間である。均質空間 $Y = G/H$ 上に G -準不変測度 μ が存在すると仮定すると誘導表現 $\Gamma = \text{Ind}_H^G \pi$ が次のように与えられる。

表現空間 $\Gamma(\Gamma)$: G 上の $V(\pi)$ -値可測函数 f で

$$(2.1) \quad f(hg) = \pi(h)(f(g)) \quad (h \in H, g \in G),$$

$$(2.2) \quad \|f\|^2 \equiv \int_{G/H} \|f(g)\|_{V(\pi)}^2 d\mu(g) < \infty \quad (g \in G/H),$$

となるもの全体を、内積 $\langle f, g \rangle = \int_{G/H} \langle f(g), g(g) \rangle d\mu(g)$ で内積を定め、Hilbert 空間 $\Gamma(\Gamma)$ を得る。

表現の作用素: $g_0 \in G$ に対し、

$$(2.3) \quad (\Gamma_{g_0} f)(g) \equiv \sqrt{\frac{d\mu(g_0^{-1}g)}{d\mu(g)}} f(g_0^{-1}g) \quad (f \in \Gamma(\Gamma), g \in G).$$

これは別の用語を用いると、“ $Y = G/H$ 上の $(\pi, V(\pi))$ に右作用させたベクトル束を考へ、その L^2 -切断の作る空間の上に誘導表現を実現した” という事になる。

例 2.1. G が局所コンパクトのとき、 $Y = G/H$ 上には必ず

G -準不変測度が存在し, 互に連続, の意味で一意的である.
 この誘導表現の手法は, L^2 -切断のかわりに, 互に切断をとる
 とか, 数多くの変形があり, 最も有効な方法であり続けている.
 二つ G が局所コンパクトでない場合の例を一つあげる.

例 2.2 [13]. 無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ と直交
 分解し, $\mathcal{H}_\pm$ の直交射影を $Q_\pm$ と書く. $\mathcal{H}$ 上の有界可逆線形
 変換を $GL(\mathcal{H})$ と書く. $g \in GL(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ の分解に則して,
 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書く. 取捨する群は,

$$(2.4) \quad GL_r \equiv \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{H}) \mid \text{次の (i), (ii) を満たす} \right\},$$

(i) $a: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+$, b は Fredholm 型で $\text{index} = 0$,

(ii) $c: \mathcal{H}_- \rightarrow \mathcal{H}_+$, $d: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$, b, c は Hilbert-Schmidt 型.

すなわち, $U_r \equiv GL_r \cap U(\mathcal{H})$, $U = U(\mathcal{H}) = \{ \mathcal{H}$ 上のユニタリ変換 $\}$.

これらの群の均質空間として Hilbert-Schmidt Grassmannian
 の空間 $Gr(\mathcal{H}_+, \mathcal{H})$ をとる:

$$(2.5) \quad Gr(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}) \equiv \left\{ W \subset \mathcal{H} \mid \text{条件 (iii), (iv) を満たす閉部分空間} \right\},$$

(iii) $Q_+|_W: W \rightarrow \mathcal{H}_+$, b は Fredholm 型で $\text{index} = 0$,

(iv) $Q_-|_W: W \rightarrow \mathcal{H}_-$, b は Hilbert-Schmidt 型.

すると $W = \mathcal{H}_+$ に対する固定化群は $GL(\mathcal{H}_+) \times GL(\mathcal{H}_-)$ である:

$$GL(\mathcal{H}_+) \times GL(\mathcal{H}_-) \subset GL_r, \quad U(\mathcal{H}_+) \times U(\mathcal{H}_-) \subset U_r.$$

二つ定義を復習しておくと,

定義 2.3. Banach 空間 W_1, W_2 に対し, 有界線形作用素 T :

$W_1 \rightarrow W_2$, が Fredholm 型 2 であるとは, $\text{Ker}(T)$, $W_2/\text{Ran}(T)$ が有限次元であること. このとき, $\text{index}(T) \equiv \dim \text{Ker}(T) - \dim \text{Ran}(T)$ として, 表わすことにする.

$G = U_r$, $H = U(\mathcal{H}_+) \times U(\mathcal{H}_-)$, $Y \equiv G/H = \text{Gr}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$, である. Y 上の G -準不変測度 μ_s ($s > -1$ はパラメータ) は, $\mathcal{H}$ の有限次元部分空間 V で, $V = V_+ \oplus V_-$, $V_{\pm} = V \cap \mathcal{H}_{\pm}$, となっているものに対して, $\text{Gr}(V_+, V)$ 上に測度 $\mu_{V,s}$ を Gauss 測度を用いて作り, 包含関係 $V \subset V'$ に対して調和系になるようにして, $V \uparrow \mathcal{H}$ のときの limit であるように構成する.

論文 [13] では, 誘導される H の表現は $\mathbb{1}_H$ であるから, 準不変測度 μ_s 達が同値とは限らぬので, $\text{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$ は異なる μ_s に依る. 果は, 論文中では μ_s の間の同値関係ははっきりとは調べられていない. しかし, proposition 5.1 (p.345) を用いれば, 下村 A が最近基底空間上の Poisson 測度達の非同値性を証明した方法で取扱えると思われる. 基本的には山崎代の本の手法である.

2.2. 因子表現と測度論的カテゴリー [17]

ここでは AF 環 = approximately finite dimensional C^* -algebra の場合をとりあげる. [17] の後半で取られている環 $\mathcal{U}(\infty) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}(n)$ の群環の場合は, 表わすには, 離散群 Γ に対して

する §1.2 の連続群表現とも思えるが、手法は全く異なる。

C^* -環 A に対し、 A 上の線形汎関数 φ が 正 であるとは、 $\varphi(a^*a) \geq 0$ ($a \in A$)。この φ に対し $1, 1 \sim 1, 2, 1$ におけると同様に、 A 上の内積 $\langle x, y \rangle_\varphi = \varphi(y^*x)$ ($x, y \in A$) を入れ、内積の核を割ったあとで完備して Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\varphi$ を得る。 $\mathcal{H}_\varphi$ 上は A の表現を、 $\pi_\varphi(a)x^\varphi = (ax)^\varphi$ として得る。すなわち x^φ は $x \in A$ の $\mathcal{H}_\varphi$ におけるベクトルである [GNS-construction]。

さて、 A が有限次元 C^* -部分環 $A_0 = \mathbb{C} \cdot 1 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ で生成される (i.e., $A = \overline{\bigcup_{n=0}^\infty A_n}$) とき、 AF -環と呼ばれる。

A の極大可換 C^* -部分環 (= m.a.s.a.) C 上、 $C_n \equiv A_n \cap C$ 上で生成され、 $C_{n+1} = \langle C_n, D_{n+1} \rangle$, D_{n+1} は $A'_n \cap A_{n+1}$ の m.a.s.a. とする。すなわち、 A'_n は A における A_n の commutant,

$\mathcal{U}_n \equiv \{ u \in A_n \mid u^* C_n u = C_n \}$ とおくと、 $\forall u \in \mathcal{U}_n$, $u^* C u = C$, が成る。また $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$ なるので $\mathcal{U} \equiv \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{U}_n$ は群である。 $\forall u \in \mathcal{U}$ は、 $\gamma_u: C \ni c \mapsto u^* c u \in C$ によって C に $*$ -同型として映すから、 $\Gamma \equiv \{ \gamma_u (u \in \mathcal{U}) \}$ とおく。

可換 C^* -環 C の Gelfand dual を Ω とする。 Ω はコンパクトで、 $C \cong C(\Omega)$, かつ Ω 上は Γ が自然に働く。この (Ω, Γ) を A に付随する力系と呼ぶ。可測集合族としては Ω の Borel 集合族をとる。 Ω 上の Γ -準不変測度 μ から A 上の正線形汎関数 φ_μ を与え、GNS-construction による A の表現 π_φ

の表現が取扱われている。他方、群 $U(\infty)$ 等古典型コンパクト群の無限次元片断の表現は Ol'shanstik や Neretin に よっても取扱われているが、この辺りについては出て来ず、手法としては、有限次元 $\nearrow$ 無限次元、を群とともにこの表現についておこなう、ということである。

2.3. "dual pair" の手法 ([9], [10])

コンパクト群 G および S がともに ベクトル空間 W に表現 ρ_G, ρ_S によって表現されているとする。このとき commutants には、

$$(2.7) \quad \rho_G(G)' = \rho_S(S)', \quad \rho_S(S)' = \rho_G(G)',$$

が成立していれば、 S を表現 ρ_G に対する symmetry group と呼び、 W 上の $\rho_G \times \rho_S$ を dual pair と呼ぶ。

この状況設定の下では $G \times S$ -module W は 重複度が無く、さらに この既約分解

$$(2.8) \quad \rho_G \times \rho_S \cong \sum_{\pi \in \hat{Z}} \tau_\pi \times \pi \quad (\hat{Z} \text{ は } \hat{S} \text{ の部分集合})$$

に於いて、対応 $\pi \mapsto \tau_\pi \in \hat{G}$ は injective である。

このとき、 τ_π は空間 $\text{Hom}_G(V(\pi), W)$ の上に実現される。

この dual pair の状況はいろいろ一般化されているが、我々は、やはり、 $G = \text{Diff}(M)$, $S = \mathbb{S}_\infty$, の如く、非 I 型や無限次元群の場合に、このエッセンスを真似て 既約ユニタリ表現を構成しようというのである。有名な Weyl の相互律の

場合には, $G = GL(n, \mathbb{C})$ 又は $U(n)$, $S = \mathbb{C}_k$ とし, $V = \mathbb{C}^n$ 上の G の自然表現の k 回テンソル種 $W = \otimes^k V$ をとり, $\mathbb{C}_k$ をテンソル種の成分の置換として働かせる. また $\hat{\mathbb{C}}_k$ と, G の Young diagram $m_1 \geq m_2 \geq \dots$, $\sum_i m_i = k$, をもつ既約表現達が 1-1 に対応している.

さて我々は既約分解されてしまった後の状況, 即ち, ある $G \times S$ -module W_1 で, $I \times \pi$ ($\exists \pi \in \hat{S}$) の開分になっている状況を見付けたい. その際 G の表現 I は空間 $\text{Hom}_S(V(\pi), W_1)$ 上に実現されるか, 既約な I を与えるので, S としてはできるだけ "大きく", W_1 としてはできるだけ "小さい" ものを与えたい訳である. そして表現空間 $\text{Hom}_S(V(\pi), W_1)$ には G -不変内積を得たい. (S がコンパクトとか可算無限群等のときは何とかなる.)

以上のような要望を $G = \text{Diff}_0(M)$ に対して組織的に実現したのが, [9], [10] である. ここでは $S = \mathbb{C}_\infty$ である. M 上の (集積点のない) 無限点列のなす順序付配位空間 $\tilde{\Sigma}$ とその上の $G \times S$ -準不変測度を用いたので, 二の "dual pair" の手法を「測度対」の形で述べた. 測度論に関する部分は, 次のほうでおおまかに述べる. 二では, 二でおおまかに述べる背景を (後から付けた理屈ながら) 述べてみよう. まず $G = \text{Diff}_0(M)$ の自然な表現を, $\mathfrak{h}_i \equiv L^2(M, \mu_i)$ 上に

$$(2.9) \quad (T_i(g)f)(p) = \sqrt{\frac{d\mu_i(g^{-1}p)}{d\mu_i(p)}} f(g^{-1}p) \quad (f \in \mathfrak{h}_i, p \in M),$$

として与える。こゝに各 $\mu_i (i \in \mathbb{N})$ は局所的にはルバーグ測度
 と同値な M 上の測度である。この可算個の表現 $(T_i, \mathcal{G}_i)$ のテ
 ンソル種を定義するには, reference vector と呼ばれる $\psi = (\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$,
 $\psi_i \in \mathcal{G}_i, \|\psi_i\| = 1$, を決める。そして, $\bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \psi_i, \psi_i \in \mathcal{G}_i, \|\psi_i\| = 1$, の
 形の元で, $\psi_i = \psi_i (i \geq 0)$ となるものの集合をとると, それは
 一つの Hilbert 空間を生成する。それを $\bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi} \mathcal{G}_i$ と書く。この
 空間上に群 $S = \mathbb{S}_{\infty}$ は テンソル種の成分の置換として自然
 に働く。他方, $g \in G$ を作用させるためには, $\bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi} T_i(g)$ を
 線形作用素として定義すべきだが, それが可能であるためには
 系 $(\mu_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に適当な条件が要る。系 $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ が, ある
 緩い条件を満たす場合には, 十分一般な状況設定として
 (2.10) $\text{supp}(\psi_i), i \in \mathbb{N}$, が互に素,
 という十分条件が考えられる。(あるいは, もっと緩く, “ $\forall K \subset M$ コン
 パクトに対して $\sum_i \|\psi_i|_K\| < \infty$ ”) して, $E_i \equiv \text{supp}(\psi_i)$ とおき
 新たに測度 μ'_i を

(2.11) E_i 上では $\mu'_i \equiv |\psi_i| \cdot \mu_i$, E_i の外では $\mu'_i = \mu_i$,
 と定義する。 $\mathcal{G}'_i \equiv L^2(M, \mu'_i)$ 上の $T'_i(g)$ を (2.9) と同様に
 与え, $\psi'_i \equiv \psi_i / |\psi_i|$, $\psi' \equiv (\psi'_i)_{i \in \mathbb{N}}$, とおくと

$$(2.12) \quad \left(\bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi} T_i, \bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi} \mathcal{G}_i \right) \cong \left(\bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi'} T'_i, \bigotimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi'} \mathcal{G}'_i \right).$$

さらに, M 上の函数 γ_i を $\gamma_i|_{E_i} \equiv 1/\psi'_i$, $\gamma_i|M \setminus E_i \equiv 1$,
 と置き, $(T'_i, \mathcal{G}'_i)$ をユニタリ作用素 $M \gamma_i f \equiv \gamma_i f$ によって

変換すると, $\psi_i'' \equiv \psi_i'$ 上の表現 T_i'' で multiplier $\alpha_i(g, p) \equiv \psi_i(g^+p)/\psi_i(p)$ をもちこたになる:

$$(2.13) \quad T_i''(g) f_i(p) = \alpha_i(g, p) \sqrt{\frac{\psi_i(g^+p)}{\psi_i(p)}} f_i(p) \quad (f_i \in \psi_i'')$$

そして, ψ_i' は χ_{E_i} (E_i の特性函数) に与えられる。 $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$

$\psi_i'' \equiv \chi_{E_i}$, $\psi'' = (\psi_i'')_{i \in \mathbb{N}}$, とおくと, 我々は, $(\otimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi''} T_i'', \otimes_{i \in \mathbb{N}}^{\psi''} f_i'')$ に到達した。 $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$, 二の $G \times S$ -module を $S = \mathbb{G}_\infty$ に関して既約分解した状況を反想的に考へて得られる $G \times S$ -module $T_\pi \times \pi$, 二に $\pi \in \hat{\mathbb{G}}_\infty$, T_π は G の表現, を実現するのには, (§3.1 で述べる) 順序付配位空間 $\tilde{X}$ 上の $G \times \mathbb{G}_\infty$ -準不変測度を用いた。そして, 結果的には T_π として既約表現が得られた。これは, 系 $(M_i, E_i)_{i \in \mathbb{N}}; \pi$ によって決定されている。二これらの表現の間の同値, 非同値も研究した [10] から, $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$ は, 「直積測度の同値関係」が重要である。

§3. $\text{Diff}_0(M)$ と $\mathbb{G}_\infty$

3.1. 順序付配位空間と配位空間 [9], [10]

直積空間 $\tilde{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} M_i$, $M_i = M$, の点 $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は, 集積点を持たぬとき, M の点の順序付配位空間と呼ばれる。その全体を $\tilde{X}$ と書く。 $\tilde{X}$ には, $G = \text{Diff}_0(M)$ と $S = \mathbb{G}_\infty$ が作用する:

$$(3.1) \quad gx \equiv (gx_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad x\sigma \equiv (x_{\sigma(i)})_{i \in \mathbb{N}} \quad (g \in G, \sigma \in S).$$

そのとき $\tilde{X}$ は $G \times S$ -不変である。また, $\tilde{G}_\infty$ を Λ 上の全2
の置換のなす群とすると, 商空間 $\Gamma_M = \tilde{X} / \tilde{G}_\infty$ は (11 順序なし)
既約空間であり, Γ_M 上の Poisson 測度は G -準不変である。
 $\tilde{G}_\infty$ の有限次元表現を用いて, G の既約ユニタリ表現を構
成したのが [21] であり, Poisson 測度同志の同値関係は
最近, 下村 [15] によって決着がついた。

さて, 直積空間 X の各成分 $M_i = M$ 上に, 局所的に 1 次元
- G 測度と同値な測度 (L -測度と呼ぶ) μ_i をとる。次に
可測な $E_i \subset M_i$ をとって $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \subset X$ とおく。 E が系 $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ に対し次の条件を満たすとき μ -unital と呼ぶ:

$$(M1) \quad \mu_i(E_i) > 0 \quad (\forall i), \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |1 - \mu_i(E_i)| < \infty.$$

さらに他の μ -unital net $E' = \prod_{i \in \mathbb{N}} E'_i$ をとると, $E \sim E'$ とは
 $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(E_i \oplus E'_i) < \infty$ とする。これは同値関係になる。

$$(3.2) \quad \mathcal{E}(E) \equiv \{ E' \subset X; \mu\text{-unital}, E' \sim E \}$$

とおき, 各 $E' \in \mathcal{E}(E)$ 上には直積測度 $\prod_{i \in \mathbb{N}} (\mu_i|_{E'_i})$ をおき
ると, これは $\mathcal{E}(E)$ 上には ω -consistent であり, さらに, $\mathcal{E}(E)$ から生成
される σ -ring $\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(\mu, E)$ 上には測度 $\nu_{\mu, E}$ を与える。
この $\nu_{\mu, E}$ は G_∞ -準不変である。

M の位相と測度の調和を要すれば次の条件は自然である:

$$(3.3) \quad \forall K \subset M \text{ コンパクト開とし, } K \text{ の勝手な可測分解 } K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \\ \text{ に対し } \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(B_i) < \infty.$$

下記の定理を得る。

定理 3.1. 系 $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ と $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$ が (MU1) および (3.3) を満たすとする。このとき測度 $\nu_{\mu, E}$ が $\tilde{X} \subset X$ の上に乗っている、即ち、 $\forall B \in \mathcal{M}(E) = \tilde{X}$ かつ $B \cap \tilde{X} \in \mathcal{M}(E)$ で、 $\nu_{\mu, E}(B) = \nu_{\mu, E}(B \cap \tilde{X})$ 、となるための必要十分条件は次である：

(MU2) $\forall K \subset M$ コンパクトかつ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(K \cap E_i) < \infty$. $\square$

$\mathbb{R} = \mathbb{C}$ で、 $g \in G$ の作用を考慮し、 μ -unital $E' \sim E$ かつ $gE' \sim E'$ を得るには、さらに何程かの条件が必要である。一番容易、しかも本質的な十分条件は次である：

(3.4) $E_i (i \in \mathbb{N})$ は互に素。

このときは、前掲の定理 3.1 は $\mathbb{H}_A$ の本から

$$(3.5) \quad \frac{d\nu_{\mu, E}(gx)}{d\nu_{\mu, E}(x)} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)} \quad (x = (x_i) \in \tilde{X})$$

が示される。すると図式で表すと

$G \curvearrowright \tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{G}_\infty$ の上は $G \times \mathbb{G}_\infty$ -不変測度 $\nu_{\mu, E}$ となる。

さて、 $\mathbb{G}_\infty$ の既約 $\Sigma = \text{リ表現 } (\pi, V(\pi))$ をとる。 $\tilde{X}$ 上の $V(\pi)$ -値正数関数 f に対しては、形式は

$$R_\Sigma(\sigma) f(x) = \alpha_1(\sigma, x) \sqrt{\frac{d\nu_{\mu, E}(x\sigma)}{d\nu_{\mu, E}(x)}} \pi(\sigma)(f(x\sigma)) \quad (\sigma \in \mathbb{G}_\infty)$$

$$I_\Sigma(g) f(x) = \alpha(g, x) \sqrt{\frac{d\nu_{\mu, E}(g^{-1}x)}{d\nu_{\mu, E}(x)}} f(g^{-1}x) \quad (g \in G)$$

ただし、 α_1 および α は multiplier, $\Sigma = (\mu, E; \pi)$, と $G \times \mathbb{G}_\infty$ が働く。 $\mathbb{R} = \mathbb{C}$ 、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Sigma$ を与えるのに、可測な f で

$$(3.6) \begin{cases} R_{\Sigma}(\sigma)f = f \quad (\sigma \in G_{\infty}), \\ \text{supp}(f) \equiv \{x \in \tilde{X}; f(x) \neq 0\} \in \mathcal{M}(E), \end{cases}$$

を満たすものをとる。\$G_{\infty}\$ は可算なので、\$\exists F \in \mathcal{M}(E)\$ s.t. \$\text{supp}(f) = \bigsqcup_{\sigma \in G_{\infty}} F\sigma\$, \$F\sigma \cap F\tau = \emptyset\$ (\$\sigma \neq \tau\$), とする \$F\$ をとる

$$(3.7) \quad \|f\|^2 \equiv \int_F \|f(x)\|_{V(\pi)}^2 d\chi_{\mu,E}(x),$$

とあると、これは "基本領域" \$F\$ のとり方に依らない。\$z \mapsto \chi f; f=0\$ で割る Hilbert空間 \$\mathcal{H}_{\Sigma}\$ を得て、\$G\$ の表現 \$(T_{\Sigma}, \mathcal{H}_{\Sigma})\$ を得る。これらの既約性や同値性などは [9], [10] を見て戴きたい。なお、[9] の場合は、\$\mu_i = \mu_0(\chi_i)\$ という設定になって居り、測度 \$\chi_{\mu,E}\$ on \$\tilde{X}\$ は \$G_{\infty}\$-不変である。しかし商空間 \$\tilde{X}/G_{\infty}\$ に測度を誘うには上述の如く "基本領域" を取る必要がある。[9] を書いた段階では \$G_{\infty}\$-不変な \$\chi_{\mu,E}\$ の場合 しかうまく構成できていないと思っていたのだが、[10] で \$G_{\infty}\$-準不変の場合に拡張した。

さて上述の方法が何故 "dual pair" の方法と云えるのかどうか? それにつき一つの定理を与えておく。§2.3 に於ける \$G\$ のテンソル積表現 \$(\otimes_{i \in \mathbb{N}}^{\varphi} T_i, \otimes_{i \in \mathbb{N}}^{\varphi} \chi_i)\$ を条件 (2.10) の下で考へる。

定理 3.2. テンソル積の reference vector \$\varphi = (\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}\$ が以下の条件を満たすとする: \$U_n \uparrow M\$ なる (非) 集合の列 (\$n=1, 2, \dots\$) があって、\$(\forall n) \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i|_{U_n}\|_{L^2(\mu_i)}^2 \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i|_{U_n}\|_{\chi_i}^2 < \infty\$. 同様、

$$(\otimes_{i \in \mathbb{N}}^{\varphi} T_i)(G)' = R(G_{\infty})', \quad R(G_{\infty})' = (\otimes_{i \in \mathbb{N}}^{\varphi} T_i)(G)',$$

commutant double comm.

ただし, $\mathcal{G}_\infty$ の表現 $R(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{G}_\infty$, は テンソル積の成分の置換として定義する。 $\square$

この定理は, さらに, 上で構成した 各々の表現 (T_Σ, H_Σ) によって テンソル積表現 $\bigotimes_{i \in \mathbb{N}} T_i$ が 既約分解されることを示唆している。

9.2. 閉集合のなす空間上に測度を構成する試み

有限空間上の Poisson 測度の表示式 $e^{-\mu(B)} \frac{\mu(B)^n}{n!}$ は 非常に面白い。私は 直積型の測度 $\nu_{\mu, E}$ に到達する前に, 次のようなことを考えてみた。これとい, た結論を得ていないのであるが, 問題として掲げておく。まず M の閉集合の全体のなす集合 $\mathcal{C}_M$ とする。 M の閉集合 F に対し, $\Upsilon_F = \{F' \in \mathcal{C}_M; F' \subset F\}$ とおきその全体を $\mathcal{D}_F$ とおく。 M 上の $\mathbb{L}$ -測度 μ から出発して, $\mathcal{C}_M$ 上の測度 ν を得たい訳だが, $\mathbb{R}_+$ 上のある函数 f によって $\nu(\Upsilon_F) = f(\mu(F))$ となっているとする。問題は, どんな f をとれば, これが可能か? という点である。($M = S^1$ のとき, [1] 参照)

(1) まず $D = \Upsilon_F \setminus (\Upsilon_{F_1} \cup \Upsilon_{F_2} \cup \dots \cup \Upsilon_{F_n})$ の形の集合に対して 非負の値が与えられるべきであることから ($F_i \subset F$ と仮定して)

$$(3.8) \quad f(\mu(F)) + \sum_{\ell=1}^n (-1)^\ell \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_\ell} f(\mu(F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_\ell})) \geq 0.$$

(2) 上の D の形の元の減少列 $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ があって

$$\nu(D_k) \geq \epsilon > 0 \quad (\forall k) \quad \text{とすると} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \neq \emptyset.$$

が成立すれば", $\mu(M) < \infty$ の場合は, OKである。

不等式条件(3.8)も簡単ではなく, この問題が well-posed であるかどうかとも不明であるが, 何か別の話題との関連があってもよさそうな気がする。

REFERENCES

- [1] D. Aldous and J. Pitman, On the zero-one law for exchangeable events, *Ann. Probability*, 7(1979), 704-723.
- [2] T. Enright, R. Howe and N. Wallach, A classification of unitary highest weight modules, in "The Representation Theory of reductive groups", *Proc. of Univ. Utah Conference*, Birkhäuser, 1983, pp.97-143.
- [3] H. Furutsu and T. Hirai, Representations of Lie superalgebras I, *J. Math. Kyoto Univ.*, 28(1988), 695-749.
- [4] I.M. Gelfand and D.A. Raikov, Irreducible unitary representations of locally compact groups, *Mat. Sbornik*, 13(1943), 301-319 (in Russian).
- [5] I.M. Gelfand, Spherical functions on symmetric Riemannian spaces, *Doklady A.N. SSSR*, 70(1950), 5-8 (in Russian).
- [6] I.M. Gelfand et al., Generalized Functions, Vol.5, "Integral Geometry and Representation Theory", Academic Press, 1962.
- [7] R. Godement, A theory of spherical functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73(1952), 496-556.
- [8] T. Hirai, Construction of irreducible unitary representations of the infinite symmetric group S_∞ , *J. Math. Kyoto Univ.*, 31(1991), 495-541.
- [9] T. Hirai, Irreducible unitary representations of the group of diffeomorphisms of a non-compact manifolds, *ibid.*, 33(1993), 827-864.
- [10] T. Hirai, Representations of diffeomorphism groups and the infinite symmetric group, in "Noncompact Lie Groups and Some of Their Applications" (E.A. Tannner et al. ed.), pp.225-237, Kluwer Acad. Publ., 1994.
- [11] R.S. Ismagilov, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of a circle, *Funct. Anal. Appl.*, 5(1971), 45-54.

- [12] R.S. Ismagilov, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *Funct. Anal. Appl.*, 9(1975), 144-145.
- [13] D. Pickrell, Measures on infinite dimensional Grassmann manifolds, *J. Funct. Anal.*, 70(1987), 323-356.
- [14] G. Segal, Unitary representations of some infinite dimensional groups, *Commun. Math. Phys.*, 80(1981), 301-342.
- [15] H. Shimomura, Measures on configuration spaces and elementary representations of a group of diffeomorphisms generated by Poisson measures, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*
- [16] H. Shin'ya, Spherical functions and spherical matrix functions on locally compact groups, *Lect. Notes in Math.*, Vol.7, Kinokuniya, 1974.
- [17] Ș. Strătilă and D. Voiculescu, Representations of AF-algebras and of the group of $U(\infty)$, *Lect. Notes in Math.*, Vol.486, Springer-Verlag, 1975.
- [18] K. Suto, Exponentials of certain completions of the unitary form of a Kac-Moody algebra and associated groups, *J. Math. Kyoto Univ.*, 30(1990), 93-107.
- [19] E. Thoma, Über unitäre Darstellungen abzählbarer, diskreter Gruppen, *Math. Ann.*, 153(1964), 111-138.
- [20] E. Thoma, Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, *Math. Z.*, 85(1964), 40-61.
- [21] A.M. Vershik, I.M. Gelfand and I.M. Graev, Representations of the group of diffeomorphisms, *Russian Math. Surveys*, 30(1975), 1-50.
- [22] A.M. Vershik and S.V. Kerov, Characters and factor representations of the infinite symmetric group, *Soviet Math. Dokl.*, 23(1981), 389-392.
- [23] 山崎泰郎, 無限次元空間の測度(下), 紀伊国屋書店.