

軸対称粘性流に与える円孔効果

東大理 橋本 英典

§ 1 はしがき

流体力学に与える混合境界値問題の 1 例として、二次元粘性流に与える細孔の効果と前講究録 335 p. 1 で述べたが、ここでは、その拡張として、軸対称の場合、特に円孔のあいたスクリーンに垂直に中心軸上を運動する微小球によるストークス流れを議論してみよう。

§ 2 基本解と境界条件

半径 1 の円孔の中心に原点、スクリーンに垂直に x 軸をとり、それに平行な単位ベクトルを e とすれば、ストークスの方程式

$$\mu \Delta V = \text{grad } p, \quad \nabla \cdot V = 0 \quad (2.1)$$

の今の問題に適當な一般解は、2つの調和関数 $\bar{\Phi}$, ψ を用いてあらわされるが²⁾、特に、

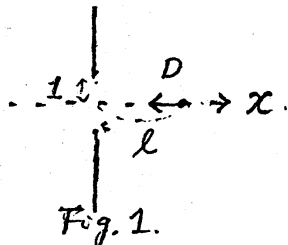
$$\mu V = x \text{ grad } \bar{\Phi} - \bar{\Phi} e + \text{grad } \psi + \mu V_0, \quad (2.2)$$

$$p = 2\mu \partial \bar{\Phi} / \partial x + p_0, \quad \bar{\Phi} = \phi + \partial \psi / \partial x \quad (2.3)$$

の形をとると便利である。以下、

$$\Delta\phi = \Delta\psi = 0, \phi(-x, y, z) = \phi(x, y, z), \psi(-x, y, z) = \psi(x, y, z) \quad (2.4)$$

で V_0, P_0 は (2.1) を満足する外場である。中心軸上、原点から l の距離にあり軸に沿って負の方向に抵抗 D を受ける特異点 (ストークスレット) の場合、対応する ϕ, ψ は、



$$\phi_0 = C/R, \quad C = -D/8\pi$$

$$\psi_0 = -l\phi_0, \quad R = [(x-l)^2 + y^2]^{1/2} \quad (2.5)$$

Fig. 1.

の形に書ける。以下 ρ は軸からの距離を表わす。したがって、 ϕ と ψ に対する境界条件は (I) は (2.5) のとき

i) $x = 0, \rho > l$ に対して $V = 0$ すなわち

$$\phi = \mu v_{0x} [= -\phi_0 - l \partial\phi_0/\partial x = -(1 - l \frac{\partial}{\partial l}) \phi_0]$$

および

$$\partial\psi/\partial\rho = -\mu v_{0\rho} [= l \partial\phi_0/\partial\rho \text{ i.e. } \psi = l(\phi_0 + a), \quad a \text{ は定数}] \quad (2.6)$$

ii) $x = 0, |\rho| < l$ での連続性: $\partial\psi/\partial x = \partial\phi/\partial x = 0 \quad (2.7)$

iii) $|\rho| \rightarrow \infty$ での誘導圧および速度 $\rightarrow 0$, すなわち、

$$\phi = O(1/\rho^2), \quad \partial^2\psi/\partial x^2 = O(1/\rho^2), \quad \partial\psi/\partial\rho = O(1/\rho^2) \quad (2.8)$$

となる。(圧力差の問題は Ref. 1, 4)。そこで $R = (\rho^2 + x^2)^{1/2}$

§3 解

従って、円孔のあるスクリーンのグリーン関数 $\phi_g = \phi_0 + \bar{\phi}$ すなわち

$$\begin{aligned}
 x=0 \quad \rho > 1 \quad \text{および} \quad |x| \rightarrow \infty \quad \tilde{\phi} = -\phi_0 \\
 x=0 \quad \rho < 1 \quad \text{で} \quad \partial \tilde{\phi} / \partial x = 0
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

を満足する補足調和関数 $\tilde{\phi}$ がわかれば、(2.6) から、 ϕ, ψ が

$$\phi = (1 - l^2/x^2) \tilde{\phi}, \quad \psi = -l(\tilde{\phi} + \phi_c) \quad (3.2)$$

の形に求まる。ただし、 ϕ_c は壁の上で一定値をとる調和関数で、その必要性は後に述べる。

境界条件(3.1)は対称条件を考慮し、 $\tilde{\phi}$ をベッセル積分

$$\tilde{\phi} = \int_0^\infty e^{-\lambda|x|} A(\lambda) J_0(\lambda\rho) d\lambda \quad (3.3)$$

の形に表わせば混合型積分方程式

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_0(\lambda\rho) d\lambda &= 0, \quad \rho < 1 \\
 \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda\rho) d\lambda &= -C(p^2 + l^2)^{-1/2}, \quad \rho > 1
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

の形に書き、その解として

$$A(\lambda) = -\frac{2C}{\pi} \int_1^\infty \frac{t}{t^2 + l^2} \sin \lambda t dt \quad (3.5)$$

が得られる。これは $\rho = 0, x = 0$ に対して、

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(x, 0) &= -\frac{2C}{\pi} \frac{1}{x^2 - l^2} (x \tan^{-1} x - l \tan^{-1} l) \\
 x=0 \text{ に対して} \\
 \tilde{\phi}(0, \rho) &= -\frac{2C}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + l^2}} \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{l^2 + 1}}; \rho < 1 \\
 &= -C / \sqrt{\rho^2 + l^2} \quad \rho > 1 \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

と与えらるが, (3.7) は $\rho \rightarrow 1_-$ で

$$\tilde{\phi} \sim -\ell \sqrt{1-\rho^2}, \quad \ell = 2c/(\ell^2+1) \quad (3.8)$$

となり, $\ell = 0$ でない限り, 速度に $(1-\rho^2)^{-1/2}$ の特異性を生じる。

これと除くには, (3.2) の未定の調和関数 ϕ_c と

$$x=0, \quad \rho > 1 \quad \text{で} \quad \phi_c \text{ が一定} (=0)$$

$$\rho < 1 \quad \text{で} \quad \partial \phi_c / \partial x = 0 \quad \text{かつ} \quad \rho \rightarrow 1_- \quad \text{で} \quad \phi_c \sim \ell \sqrt{1-\rho^2} \quad (3.9)$$

の条件から定めてやればよい。

そのようなポテンシャルは, 平板 $\rho < 1$, $x=0$ と x 方向に動かしときの $x > 0$ での速度ポテンシャルに相当するもので, 回転双曲面座標 ($0 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \zeta < \infty$)

$$x = \mu \zeta, \quad \rho = \sqrt{(1-\mu^2)(\zeta^2+1)} \quad (3.10)$$

を導入すれば, 次の形に書ける:

$$\phi_c = B(\mu + x \tan^{-1} \zeta) = B\mu(1 + \zeta \tan^{-1} \zeta) \quad (3.11)$$

$$\mu = 0 \quad \text{すなわち} \quad x=0, \quad \rho > 1 \quad \text{で} \quad \phi_c = 0 \quad (3.12)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{すなわち} \quad x=0, \quad \rho = \sqrt{1-\mu^2} < 1 \quad \text{で}$$

$$\phi_c = B\mu = B\sqrt{1-\rho^2} \quad (3.13)$$

となって, $B = \ell$ と選べばよいことがわかる。さらに

$$\zeta \rightarrow \pm\infty \quad \text{すなわち} \quad x \rightarrow \pm\infty \quad \text{で}$$

$$\phi_c \sim \frac{\pi}{2} B |x| \quad (3.14)$$

となるが, これによる誘導速度, 圧力は $|x| \rightarrow \infty$ で 0 となる

ことがわかる。さらに, 軸上 $\mu = 1$, $\zeta = x$ で ϕ_c は,

$$\phi_c = \frac{1}{2} (\kappa \tan^{-1} \kappa + 1) \quad (3.15)$$

の値をとる。

特に軸上の x 方向の誘導速度の $x=l$ での値 $\langle \delta u \rangle$ は

(2.2), (2.3), (3.2), (3.6), (3.11) を用いると容易に計算され

$$\begin{aligned} \mu \delta u &= - \left[\left(l \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right) \left(l \frac{\partial}{\partial l} - 1 \right) \tilde{\phi} - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tilde{\phi} + \phi_c) \right]_{\substack{r=0 \\ x=l}} \\ &= \kappa C \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\kappa = \frac{1}{\pi} \left[\frac{3}{l} \tan^{-1} l + \frac{3l^2 - 1}{(l^2 + 1)^2} \right] \quad (3.17)$$

となる。半径 ε の球が v の速度で x 方向に進行するときの抵抗 $D_0 = 6\pi\mu\varepsilon v$ に対する補正 δD は Faxén の定理により

$$\frac{\delta D}{D} = - \frac{\langle \delta u \rangle}{v} = \frac{\kappa D_0}{8\pi\mu} = \frac{3}{4} \kappa \varepsilon \quad (3.18)$$

(Fig. 2) により与えられる。 $\delta D_0 / D_0$ は $l \rightarrow \infty$ で ロ-レンツ の値 $\frac{3}{4}$

$9\varepsilon / 8l$, $l \rightarrow 0$ で $3\varepsilon / 2\pi$ となるが、 $l \rightarrow 0.8702$

で極大値をとるのは l と同様である。また、 $\kappa = 0$ での速度は、
(0.6876...)

$$u = u_0 + \delta u \quad (3.19)$$

$$\mu u_0 = -(1 - l\partial/\partial l)\phi_c, \quad \mu \delta u = -\phi = -(1 - l\partial/\partial l)\tilde{\phi} \quad (3.20)$$

より $\mu u = -(1 - l\partial/\partial l)\phi_c$ となる。全流量 $Q = 2\pi$

$\int \rho d\rho u$ は、 $Q = 4\varepsilon^3 c / (l^2 + \varepsilon^2)$ で 2π は u_0 に対

する値 $Q_0 = 2\pi\varepsilon c / \sqrt{l^2 + \varepsilon^2}$ より 明らかに 小さい。

Reference

- 1) 橋本英典: 数理解析研究所講究録 355 (1978) 1.
- 2) 今井 功: 流体力学 前編, 裳華房 (1973)
- 3) 今井・橋本: 流体力学 1, 東京図書 (1978) p. 143, 150.
- 4) Hasimoto, H.: J. Phys. Soc. Japan 13 (1958) 633.
- 5) Lorentz, H.A. (1907): Happel & Brenner: Low Reynolds number hydrodynamics p. 88.
- 6) Sneddon, I.N.: Mixed boundary value problems in potential theory (North Holland, Amsterdam 1966) p. 93.

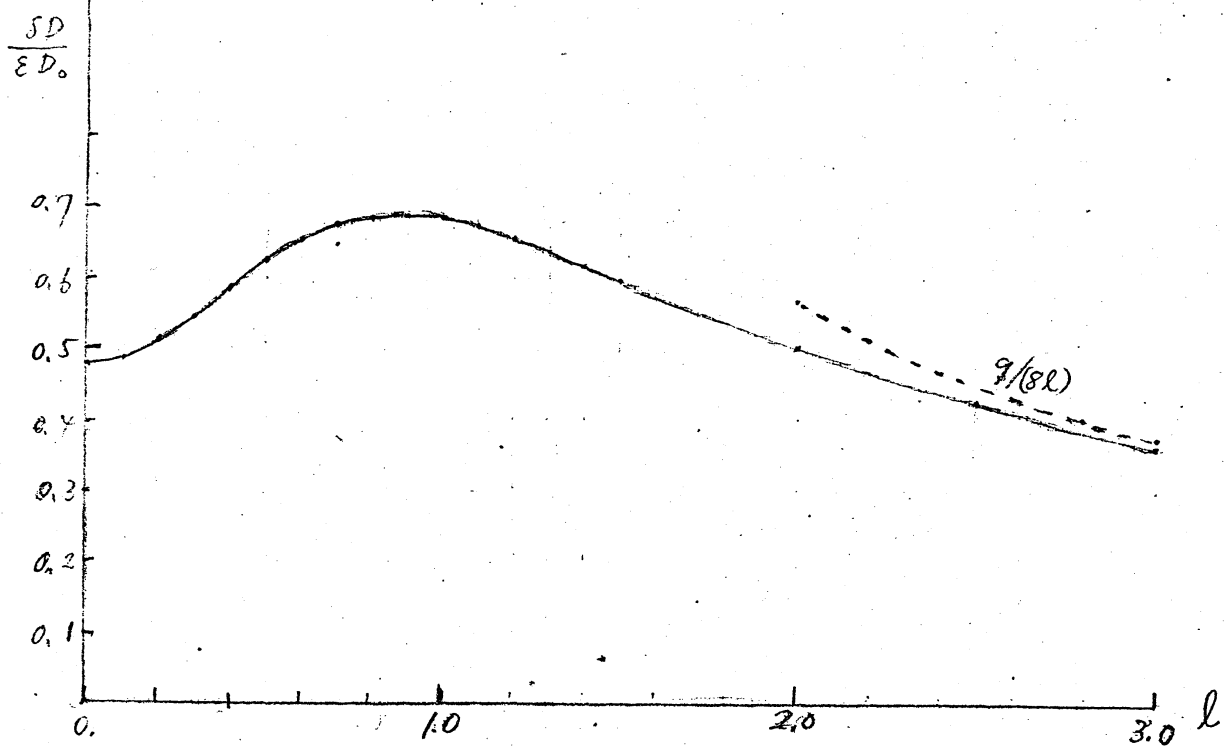


Fig. 2