

Super KP 系, Osp -Super KP 系

早大・理工 上野喜三雄

(Kimio UENO)

§ 0. SKP (Super KP) 系, Osp (Ortho-Symplectic) SKP 系について基本的なことが固ったので報告する。この仕事は, 山田裕史氏 (琉球大学), 池田薫氏 (都立大学, 大学院生) の協同によるもので, 本論文は現在 (昭和63年4月の時点) 執筆中である。

§ 1. KP, BKP, CKP 系についておさらいしておく。詳しいことは DJKM (伊達, 神保, 柏原, 三輪) の一連の論文を参照して欲しい。

(x, t) を空間-時間変数, ただし, $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ として, $\mathcal{R} = \mathbb{C}[[x, t]]$ に係数をもつ x 変数の (擬) 微分作用素環を $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ と記す。

$$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \left[\frac{\partial}{\partial x} \right], \quad \mathcal{E}_{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} \right).$$

KP 系を Sato 方程式により定義する:

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで, W は波動作用素,

$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-j}$, $w_j \in \mathbb{R}$, $w_0 = 1$,
 また, $B_n := \left(W \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n W^{-1}\right)_+ \in \mathcal{D}_R$ とする。

波動関数 $w(x, t, \lambda)$ は, スペクトル変数 λ についての形式的関数として, 次により定義される:

$$\begin{aligned} w(x, t, \lambda) &= W \left(\exp \left(x\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n \right) \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j(x, t) \lambda^{-j} \right) \exp \left(x\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n \right) \end{aligned} \quad (1)$$

波動作用素 W の形式的随伴作用素 W^* ,

$$W^* = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-j} w_j(x, t)$$

を持ち込むことで, 双対波動関数

$$w^*(x, t, \lambda) = (W^*)^{-1} \left(\exp(-x\lambda - \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n) \right) \quad (2)$$

が定義される。

$\mathcal{E}_R$ における双線型留数公式 (Bilinear Residue Formula, BRF) とは次の定理を言う。

定理 1 (BRF in $\mathcal{E}_R$). $P = P(x, \frac{\partial}{\partial x})$, $Q = Q(x, \frac{\partial}{\partial x}) \in \mathcal{E}_R$ とする。このとき, 次の (i), (ii) は同値である。

(i) $PQ \in \mathcal{D}_R$

(ii) $\forall x, x'$ について,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=\infty} \left(d\lambda P(x, \frac{\partial}{\partial x})(e^{x\lambda}) \cdot Q^*(x', \frac{\partial}{\partial x})(e^{-x'\lambda}) \right) \\ = 0. \end{aligned}$$

これを用いて, KP 系の波動関数, 双対波動関数を特徴付けることができる。

定理2 (BRF for the KP). $w(x, t, \lambda)$, $w^*(x, t, \lambda)$ は各々 (1), (2) で定義される形式的函数とする。このとき, これらが KP 系の波動, 双対波動函数である為の必要十分条件は,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\infty} (d\lambda \, w(x, t, \lambda) \cdot w^*(x', t', \lambda)) = 0$$

が任意の (x, t) , (x', t') について成立することである。

定理1の証明は色々有るうが, その中で最も本質をついたものは野海正俊氏 (上智大学) による, Laplace 変換の双対性を活用する証明であらう。(私は, 同氏から個人的に教えて頂いた。)

次に, BKP, CKP についてまとめておく。これらの系を考えるときは, 偶数番目の時間発展を凍結する; $t_{2n} = 0$ ($n=1, 2, \dots$), 従って, $t = (t_1, t_3, \dots)$ 。その上で,

$$(BKP) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1} W^* \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = W^{-1}$$

$$(CKP) \quad W^* = W^{-1}$$

という条件を課す。BKP, CKP に関する双線型留数公式は, 波動函数だけの形で与えられる。

定理3 (BRF for the BKP, CKP) (1)の型をした形式的函数 $w(x, t, \lambda)$ が, BKP, CKP の波動函数である為の必要十分条件は

$$(BKP) \quad \operatorname{Res}_{\lambda=\infty} \left(\frac{d\lambda}{\lambda} w(x, t, \lambda) w(x', t', -\lambda) \right) = 1$$

(CKP) $\text{Res}_{\lambda=\infty} (d\lambda \, w(x, t, \lambda) w(x', t', -\lambda)) = 0$
 が任意の $(x, t), (x', t')$ に対して成立することである。

2.2. SKP 系と $\text{OSP} - \text{SKP}$ 系

(x, θ) を $(1|1)$ 次元 super space での座標,
 $t = (t_1, t_2, \dots)$ を super time variables, $x, t_{2\ell}$ が
 even で, $\theta, t_{2\ell-1}$ が odd である。 A を background と
 なる supercommutative 代数 (係数体の役を担う) とし
 て, (formal regular) super field のつくる代数を

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}[[x, \theta, t]] \otimes A$$

とおく。 $\mathcal{S}$ はもちろん自然なやり方で supercommutative
 代数となる。 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1$ をその $\mathbb{Z}_2$ gradation とする。
 $\mathcal{S}$ においては微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ の平方根が定義される; $D = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial x}$
 $D^2 = \frac{\partial}{\partial x}$ 。 $\mathcal{S}$ に係数をもつ supermicrodifferential
 作用素の代数を

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}((D^{-1}))$$

により定義する。 superdifferential 作用素の方は

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}[D]$$

で定義される。代数構造は言うまでもなく superLeibniz 法
 則で与えられ, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ は super かつ noncommutative
 代数となる。 $\mathcal{S}$ には, 時間発展を記述する supervector

場,

$$D_{2l} = \frac{\partial}{\partial t_{2l}}, \quad D_{2l-1} = \frac{\partial}{\partial t_{2l-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k-1} \frac{\partial}{\partial t_{2l+2k-2}}$$

が作用する。これから,

$$[D_{2l}, D_{2k}] = 0 = [D_{2l}, D_{2k-1}], \quad [D_{2l-1}, D_{2k-1}]_+ = 2D_{2l+2k-2}$$

等の交換・反交換関係をみたすことに注意せよ。

SKP系の Sato 表示は次で与えられる:

$$D_n(W) = \varepsilon_n (B_n \cdot W - W \cdot D^n) \quad (n=1, 2, \dots) \quad -- (3)$$

ただし, W は super 波動作用素

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x, \theta, t) D^{-j}, \quad w_j \in \mathcal{S}_j, \quad w_0 = 1$$

であり,

$$B_n = (W \cdot D^n W^{-1})_+ \in \mathcal{D}_s(n), \quad \varepsilon_n = (-)^{n(n+1)/2}$$

である。SKP 系の解をどの様に積分し, 解空間が USGM (普遍 super Grassmann 多様体) になる等の事柄については上野-山田の論文を参照して頂くことにし, ここでは次のことに注意する。USGM は UGM $\times$ UGM 上の fibre 空間としての構造をもっているが, それに対応して次の命題が成立する。

命題 4. SKP 系の解を, 2つの独立な KP 系の解に自然に射影することができる。

それを図式的に

$$\begin{array}{c} \text{SKP系} \\ \downarrow \cap \\ (\text{KP系}, \text{KP系}) \end{array}$$

と表現することしよう。自然な射影 $\cap$ は次の様に構成される。

まず, $\mathcal{S}' := \mathbb{C}[[x, t]]$, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}'} := \mathcal{S}'((\frac{\partial}{\partial x})^{-1})$ とおく。

$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の 2-spinor 表示とは次で定義される写像 π のことである。

$$\pi : \mathcal{E}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \text{Mat}(1|1; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$$

ただし,

$$\pi(D^n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \pi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(f) = \text{diag}(f, f) \quad (f \in \mathcal{S}'_+),$$

$$\pi(f) = \text{diag}(f, -f) \quad (f \in \mathcal{S}'_-)$$

これにより, π は $\mathcal{S}'$ -superalgebra iso. となる。

SKP 系の Sato 方程式 (3) を 2-spinor 表現して, さらに, $\text{Mat}(1|1; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$ の中で body part を取れば, $\cap$ が得られる。

さて, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ における BRF を定式化する。その為に, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ における形式的随伴を定義しなければならない: $\Delta(dx/d\theta)$ を (x, θ) 空間上での super volume form とする。これは odd な量で, $f(x, \theta) = p(x) + \theta q(x)$ を compact 台をもつ C^∞ super field とするとき, その積分は

$$\int \Delta(dx/d\theta) f(x, \theta) := \int q(x) dx$$

により定義される。 $P = P(x, \theta, D) \in \mathcal{E}_S$ の形式的随伴は、通常の場合と同様に super 積分を径由して定義される：

$$\int \Delta(dx/d\theta) Pf \cdot g = \int \Delta(dx/d\theta) f \cdot P^*g$$

$f = f(x, \theta)$, $g = g(x, \theta)$ は even な super field とする。例えば、

$$(w D^n)^* = (-)^{a \cdot n} \varepsilon_n D^n \cdot w \quad (w \in \mathcal{S}_a, n \in \mathbb{Z})$$

が成立し、より一般的には、

$$(PQ)^* = (-)^{ab} Q^* \cdot P^* \quad (P \in \mathcal{E}_{S,a}, Q \in \mathcal{E}_{S,b})$$

が成立する。従って super 波動作用素 W に対して、

$$W^* = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \varepsilon_{-j} D^{-j} \cdot w_j(x, \theta, t)$$

となっている。super 波動函数 (field というべきか?) 及びその双対は

$$w(x, \theta, t, \lambda, \bar{z}) = W(e^H)$$

$$w^*(x, \theta, t, \lambda, \bar{z}) = (W^*)^{-1}(e^{-H}) \quad (4)$$

と与えられる。ただし、

$$H = H(x, \theta, t, \lambda, \bar{z}) = x\lambda + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-)^{\ell} t_{2\ell} \lambda^{\ell} + (\bar{z} + h)(\theta + \lambda^{-1}h)$$

$$h = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-)^{\ell} t_{2\ell-1} \lambda^{\ell}$$

である。 $(\lambda, \bar{z})$ は super spectral parameter である。また、

$$D^2(e^H) = \lambda e^H, \quad D_n(e^H) = \varepsilon_n D^n(e^H)$$

$$D^{-2j}(e^H) = \lambda^{-j} e^H, \quad D^{-2j+1}(e^H) = \lambda^{-j} (\lambda\theta - \bar{z} - h) e^H$$

に注意する。super Laplace 変換 の duality を考察すること

により定理 1, 2 の super 版が得られる。

定理 5 (BRF in $\mathcal{E}_s$). $P = P(x, \theta, D)$, $Q = Q(x, \theta, D) \in (\mathcal{E}_s)_0$ とする。次の (i), (ii) は同値である。

(i). $PQ \in \mathcal{D}_s$

(ii). $\operatorname{Res}_{\lambda=\infty} (\Delta(d\lambda/d\zeta) P(x, \theta, D) (e^{x\lambda+\zeta\theta}) \cdot Q^*(x', \theta', D') (e^{x'\lambda+\zeta'\theta'})) = 0$

が任意の (x, θ) , (x', θ') について成立する。

Remark. $e^{x\lambda+\zeta\theta}$ が super Laplace 変換の核である。

定理 6 (BRF for the SKP). $w(x, \theta, t, \lambda, \zeta)$, $w^*(x, \theta, t, \lambda, \zeta)$ を (4) の型をした super fields とする。これから SKP 系の super 波動関数及びその双対である為の必要十分条件は,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\infty} (\Delta(d\lambda/d\zeta) w(x, \theta, t, \lambda, \zeta) w^*(x', \theta', t', \lambda, \zeta)) = 0$$

が任意の (x, θ, t) , (x', θ', t') に対して成立することである。

次に OSP -SKP 系について述べよう。BKP のときと同様に, $t_{4n} = t_{4n+1} = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) として時間発展のセクターを限定する; $t = (t_{4n+2}, t_{4n+3})_{n=0, 1, \dots}$. その上で, super 波動作用素に対して次の symmetry を課す

$$D^{-1} W^* D = W^{-1} \quad (5)$$

次の命題はこの系の名前の由来を明らかにする。

命題 7.

OSp - SKP系

 $\downarrow \omega$

(BKP系, CKP系)

図式の意味は明らかであろう。BKP系は $o(\infty)$ を無限小変換群にもち, CKP系のそれは $sp(\infty)$ である。そして OSp-SKP系は super Lie algebra $osp(\infty|\infty)$ を無限小変換群にもののである。

最後に OSp-SKP系に対する定理らの拡張を述べてこの報告をしめくくる。

定理 8 (BRF for the OSp-SKP) (4)の型をした super field $w(x, \theta, t, \lambda, \xi)$ が OSp-SKP系の super 波動函数である為の必要十分条件は,

$$\text{Res}_{\lambda=\infty} \left(\Delta(d\lambda/d\xi) w(x, \theta, t, \lambda, \xi) v(x', \theta', t, \lambda, \xi) \right) = 1$$

が任意の $(x, \theta, t), (x', \theta', t')$ に対して成立することである。

ただし, $v(x, \theta, t, \lambda, \xi) = (W \cdot D^{-1})(e^{-H})$ である。