

Alexandroff width とコホモロジー次元

小山 晃 (大阪教育大学 数理科学)

Alexandroff による古典的な次元の特徴づけ:

compact 距離空間 X が n 次元以下である必要十分条件は,

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 高々 n 次元の compact polyhedron P と

ε -map $f: X \longrightarrow P$ が存在することである

を断片として, 次の Alexandroff width の概念を知る。

compact subset $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (ここで, $n \geq 1$ は十分大きなものを知る) の k 次元

Alexandroff width $A_k(X)$ を

$\inf \{ \varepsilon > 0 \mid \text{高々 } k \text{ 次元の compact polyhedron } P \text{ と } \varepsilon\text{-map } X \longrightarrow P \text{ が存在する} \}$

によって与える

Alexandroff width の概念は単純な定義の書き換えてナンセンスなもののように思えるかもしれない。ひょっとしたら結構威力のある所を見せることになった。あるいは, CE-problem を次の Alexandroff width の問題に置き換えることができる。

compact polyhedron $P \subseteq \mathbb{R}^n$ の k -次元 Alexandroff width $A_k(P)$ は,

P の任意の triangulation T の $(k+1)$ -skeleton $T^{(k+1)}$ の k -次元 Alexandroff width $A_k(T^{(k+1)})$ を等しいか?

実際, CE-problem は negative に解決されたのだから, この問題は意味を失った

ように見えるが、2つの問題の関連を追求すると、整係数フホモロジー次元の特徴づけの Alexandroff width とその拡張された概念において最初の Alexandroff の結果に対して得られることか Shechepin [1] によって示された。ここでは、より一般的にフホモロジー次元との関連を与える試みを示したい。

特に二とわらわい限り。空間は compact 距離空間であり、 G は任意の可換群とする。

定義: 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ の G 係数フホモロジー次元 n 以下であるとは、

任意の開部分集合 $B \subseteq Y$ と任意の連続写像 $\varphi: B \rightarrow K(G, n)$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} \text{連続写像 } \bar{\varphi}: X \rightarrow K(G, n) & & \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & \searrow \bar{\varphi} & \uparrow \\ f^{-1}(B) & \xrightarrow{f|_{f^{-1}(B)}} & B \xrightarrow{\varphi} K(G, n) \end{array} \\ \text{st. } \bar{\varphi}|_{f^{-1}(B)} = \varphi \circ f|_{f^{-1}(B)} & & \\ \text{かつ} & & \\ \text{c-dim}_G f \leq n & & \\ \text{と表わす。} & & \end{array}$$

この概念を用いて連続写像 $f: X \rightarrow Y$ の G 係数 Alexandroff width の概念を次のように定義する。

定義. $G\text{-}a_k(f) = \inf \{d(f, h) \mid \text{連続写像 } h: X \rightarrow Y \text{ st. c-dim}_G h \leq k\}$

さらに、 G 係数 binary (n, k) -次元 Alexandroff width を

$G\text{-}a_k^n(f) = \sup \{G\text{-}a_k(f \circ \varphi) \mid \text{連続写像 } \varphi: Z \rightarrow X \text{ st. dim } Z \leq n\}$ と定義する。

(注1) $G\text{-}a_k^n(f) = 0$ である必要十分条件は、任意の連続写像 $\varphi: Z \rightarrow X$, $\dim Z \leq n$

と $\varepsilon > 0$ に対し

連続写像 $h: Z \longrightarrow Y$ s.t. $d(f \circ \varphi, h) < \varepsilon$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} h \leq k$ が見つかることである。

係数群を定めた連続写像の Alexandroff width は Shchepin [1] によつて次のように与えられている。

定義. 連続写像 $f: X \longrightarrow Y$ に対し k 次元 Alexandroff width $a_k(f)$ を,

$$a_k(f) = \inf \{ d(f, h) \mid \text{連続写像 } h: X \longrightarrow Y \text{ s.t. } \dim h(X) \leq k \}$$

さらに, binary (n, k) -次元 Alexandroff width $a_k^n(f)$ を,

$$a_k^n(f) = \sup \{ a_k(f \circ \varphi) \mid \text{連続写像 } \varphi: Z \longrightarrow Y \text{ s.t. } \dim Z \leq n \}$$

と定義する。

(注2) 定義から、直ちに次のことがわかる

$$\begin{aligned} G - a_k^n(f) &\leq G - a_k(f) \leq a_k(f) \leq \text{diam}[Y] \\ \text{かつ} \quad G - a_k^n(f) &\leq a_k^n(f) \leq a_k(f) \leq \text{diam}[Y] \end{aligned}$$

(注3) (注1) と Edwards-Walsh complex を用いると次のことは明らか。

$$a_m^{n+1}(f) = 0 \iff \Pi - a_{n+1}^n(f) = 0 \quad \text{for all maps } f: X \longrightarrow P$$

よって, Shchepin [1] は 整数次元 のホモロジー次元の特徴づけとして, $\mathbb{C}$ の連続写像に関する Alexandroff width の概念を導入しているが, ここで導入した係数群のついた連続写像の Alexandroff width の概念は自然な拡張であることがわかる。

二つを導入した概念によって次の二つがわかれようというわけか(?)

問題1. 次の conditions は 同値か?

$$1) C\text{-dim}_G X \leq n$$

$$2) G\text{-}a_m^{\text{MH}}(X) = 0$$

3) 任意の連続写像 $f: X \longrightarrow P$, ただし P は polyhedron, に対して.

$$G\text{-}a_m^{\text{MH}}(f) = 0$$

いろいろ試してみたが、この問題が成立するとはちょっと思えない。実際、[2]で導入した approximable 次元について成立すると思える方が自然だと思っている。

定義. polyhedron 上の連続写像 $\varphi: Q \longrightarrow P$, $n \geq 1$ かつ $\varepsilon > 0$ について.

φ が (G, n, ε) -approximable であるとは、次の condition (*) をみたす P の triangulation L が存在することをいう。

(*) 任意の Q の triangulation M に対して、次の map φ' が存在する

$$\text{map } \varphi': |M^{(n)}| \longrightarrow |L^{(n)}|$$

$$\text{s.t. (1) } d(\varphi', \varphi|_{|M^{(n)}|}) < \varepsilon$$

(2) 任意の map $\alpha: |L^{(n)}| \longrightarrow K(G, n)$ に対して.

$$\text{map } \beta: |M^{(n)}| \longrightarrow K(G, n)$$

$$\text{s.t. } \beta|_{|M^{(n)}|} = \alpha \circ \varphi'$$

が存在する

定義. X の G 係数 approximable 次元が n 以下であるとは、任意の polyhedron P ,

連続写像 $f: X \longrightarrow P$ かつ $\varepsilon > 0$ に対して

polyhedron Q & 連続写像 $\varphi: X \longrightarrow P, \psi: P \longrightarrow Q$

s.t. (1) $d(f, \psi \circ \varphi) < \varepsilon$

(2) $\psi: (G, n, \varepsilon)$ -approximable

が成り立つことをいひ、 $a\text{-dim}_G X \leq n$ と表わす。

$\chi = v$. conjecture を 正確に書くと次のようになる。

問題 2. 次の conditions は同値か？

$$1) a\text{-dim}_G X \leq n$$

$$2) G\text{-}a_m^{\text{wh}}(X) = 0$$

3) 任意の連続写像 $f: X \longrightarrow P$, ただし P は polyhedron, に対して

$$G\text{-}a_m^{\text{wh}}(f) = 0$$

部分解として次のことかわかる。

定理 1. $G = \prod$ または $\prod p$ ならば、(問題 2) は肯定的に成立する

(問題 2) が肯定的に解けるならば、次の定理と比較することによって、(問題 1) は否定的な解を持つことかわかる

定理 2 ([2]) $a\text{-dim}_G X \leq n$ ならば、高々 n 次元の空間 Y と連続な全射

$$f: Y \longrightarrow X$$

$$\text{s.t. } H^*(f^{-1}(x); G) = 0 \text{ for all } x \in X$$

が成り立つ

これらの結果を総合的に見ると係数群が有限生成ならば、同様の法を持つこと及び非輪状の resolution の存在等、比較的わかりやすい成果が得られる。無限生成である場合は何一つうまくいかぬように思える。二二十年ほどでトポロジー次元は飛躍的に動いたが、大切なのは Edwards-Walsh complex の構成であった。これを modify していろいろ考えたが、無限生成群については使えそうにない。無限生成群をとらえるためには、まったく別の idea を開発することが必要と思われる。

参考文献

- [1] A. N. Dranishnikov and E. V. Shchupin, Cell-like maps. The problem of raising dimension, Russian Math. Surveys, 41:6 (1986), 59-111
- [2] A. Koyama, Approximable dimension and acyclic resolutions, preprint