

孤立特異点とその変形 (δ_m の上半連続性)

早大理工研 石井志保子

(Z, z) を解析空間の正規孤立特異点とする.

morphism の芽 $\pi: (X, x) \rightarrow (C, 0)$ が次の条件を満たす時に (Z, z) の small deformation であるという.

- (1) $(X_0, x) \simeq (Z, z)$
- (2) X : 正規, C : 非特異曲線
- (3) π : flat

またこのとき π が smooth でない点の集合を $S \subset X$ とし.

small deformation π の singular locus と呼ぶことにする.

今後、 $\tau \in C$ に対し fiber $\pi^{-1}(\tau), (\pi|_S)^{-1}(\tau), \dots$ を $X_\tau, S_\tau, \dots$ 等と表わすことにする.

本稿では次の結果を証明する.

主定理 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し、十分小 τ なる x の近傍 X をとれば、 $\delta_m(X_0, x) \geq \sum_{y \in S_\tau} \delta_m(X_\tau, y)$ が成立する.

この定理の系として Esnalt-Viehweg [1] の次の結果が導かれる。

系. (X_0, x) が 2次元商特異点ならば、 X を十分小さくとれば、 (X_t, y) も商特異点である。

§ 1. 準備

定義 1. X を正規解析空間とする。 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を X 上の特異点の good resolution とする (i.e. $E = f^{-1}(\text{sing. locus})_{\text{red}}$ が simple normal crossings). $m \geq 0$ とし

$$\Delta_m(X) := \mathcal{O}(mK_X) / f_* \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E) \quad \text{と置く.}$$

ここで $\Delta_m(X)$ は X の singular locus 上に support をもつ coherent sheaf で good resolution f のとり方によらない (log-ramification formula [5]).

定義 2 (X, x) が正規孤立特異点のとき、その多重種数 $\delta_m (m \in \mathbb{N})$ を、 $\delta_m(X, x) := \dim_{\mathbb{C}} \Delta_m(X)$ と定義する。

定義 3 $\pi: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を small deformation とする。ここで proper birational morphism $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が π の good resolution であるとは、次の 2 条件が満た

と出来るという。

- (1) f は analytic space X の good resolution
- (2) $f|_{[X_\tau]} : [X_\tau] \rightarrow X_\tau$ が good resolution $\tau \in C$ に対し $[X_\tau]$ は X_τ の proper transform を表わす。

そこで f に関する exceptional component は有限個であるから そのうち C の点につぶれてしまう因子も当然有限個である。したがって general には $\tau \in C$ について $[X_\tau] = \widehat{X}_\tau$ 。我々は X の芽で考えているのだから $\forall \tau \neq 0$ に対して $[X_\tau] = \widehat{X}_\tau$ と思ってもよい。

定義4. X を非特異解析空間、 $L \in X$ の line bundle とする。 $D \in |L^m|$ に対し $\varphi' : Y' \rightarrow X$ を D による構成した cyclic m -ple covering とする。今、 Y' の正規化を Y として 合成 $\varphi : Y \rightarrow X$ を D に associate した normal cyclic m -ple covering と呼ぶ。

命題5 ([1]又[6]) $\varphi : Y \rightarrow X$ を normal cyclic m -ple covering associated to $D \in |L^m|$ とする。いま D red な normal crossings ならば 次のことが成り立つ。

- (1) Y は高々 rational singularities しかもたない。

$$(2) \quad \varphi_* \mathcal{O}_Y = \bigoplus_{k=0}^{m-1} L^{-k}([kD/m])$$

$$(3) \quad \varphi_* \mathcal{O}_Y(K_Y) = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \omega_X \otimes L^k(-[kD/m])$$

そこで特に small deformation $\pi: X \rightarrow C$ の good resolution $\tilde{X}$ 上に上記の normal cyclic cover を作り、とみる。
 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を π の good resolution とし、 $E = \sum_{i=1}^r E_i$ を $\tilde{X}$ 上の f に関する reduced exceptional divisor とする。

form $\theta \in \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}))$ に対して、 $D_\theta \cup E$ が normal crossings と仮定する。ここで D_θ は、 $\theta|_{\tilde{X}-E}$ の零点集合の $\tilde{X}$ での closure である。適当に非負整数の組 $\{a_i\}_{i=1}^r, \{n_i\}_{i=1}^r$ があり、 $D_\theta + \sum_{i=1}^r n_i E_i \in |m(K_{\tilde{X}} + \sum_{i=1}^r a_i E_i)|$ と表わすことができる。 E_i に関する valuation を ν_i とすると θ は、同形 $\mathcal{O}_{\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} - D_\theta - \sum \nu_i(\theta) E_i)$ を与えるので、

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}) \simeq \mathcal{O}(D_\theta + \sum \nu_i(\theta) E_i).$$

これにより各 i に対して、 $n_i = ma_i + \nu_i(\theta)$ 。

よって $D_\theta + \sum_{i=1}^r n_i E_i$ に associate した normal cyclic m -ple cover を $\varphi_\theta: Y_\theta \rightarrow \tilde{X}$ と表わす。ここで φ_θ は、 a_i, n_i のとり方に依らないことに注意しておく。

補題6 $\varphi_\theta: Y_\theta \rightarrow \tilde{X}$ を上記のように θ によって構成すれば normal cyclic m -ple cover とすると、

$\varphi_{0*} \mathcal{O}_{Y_0}(K_{Y_0})$ の $(m-1)$ -直和因子 (命題 5a (3) で $k=m-1$ とし $\mathbb{C}$ とする因子) は, $\mathcal{O}_X(mK_X - \sum_{i=1}^r \nu_i'(\theta) E_i)$ である. $\mathbb{C}$ に対し $\nu_i'(\theta) = \nu_i(\theta) - \lceil \nu_i(\theta)/m \rceil$.

補題 7 θ, ν_i, ν_i' は上記の通りとすると次が成立.

- (1) $\nu_i(\theta) > 0 \Rightarrow 0 \leq \nu_i'(\theta) \leq \nu_i(\theta)$
- (2) $-m+1 \leq \nu_i(\theta) \leq 0 \Rightarrow \nu_i'(\theta) = \nu_i(\theta)$
- (3) $\nu_i(\theta) \leq -m \Rightarrow \nu_i'(\theta) < \nu_i(\theta)$

§2. Key Lemma ($L^{2/m}$ -拡大可能性)

以後 正規孤立特異点の small deformation $\pi: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を固定する. singular locus S とすると,

$\pi' = \pi|_{X-S} : X-S \rightarrow \mathbb{C}$ は smooth family であり, 各 fiber の normal bundle が trivial であるから自然に写像 $\Gamma(X-S, \mathcal{O}(mK_X)) \xrightarrow{\gamma_\pi} \Gamma(X_\pi-S_\pi, \mathcal{O}(mK_{X_\pi}))$ が得られる.

鍵補題 8 $\pi: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ に対し 適当な good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ とすれば 次が成立している.

(*) $\hat{\theta} \in \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}))$ に対し

$\gamma_0(\tilde{\theta}) \in \Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]} + (m-1)E|_{[X_0]})$ と Γ が γ_0 を通すとき.

ある $\tilde{\theta}' \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$ があつて $\gamma_0(\tilde{\theta}) = \gamma_0(\tilde{\theta}')$

(注意. $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$ は $\log$ -ramification formula により f により $\tilde{\alpha}$ により決まらないうから. Γ の (*) は. 任意の resolution について成立することになる.)

[補題 8 の証明] $H = \text{Im } \gamma_0 \cap L^{2/m}(X_0 - \{x_3\})$ とおく.
 $\gamma_0^{-1}(H) \subset \Gamma(X - S, \mathcal{O}(mK_X))$ の general element $\tilde{\theta}$ に対し. $\tilde{\theta}|_{X-S}, \gamma_0(\tilde{\theta})|_{X_0 - \{x_3\}}$ の零点集合は非特異であると見てよい. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を γ_0 の適当な good resolution とし $\tilde{D}_{\tilde{\theta}} \cup E \cup [X_0]$ が normal crossings になるようにできる. ここで $\tilde{D}_{\tilde{\theta}}$ は $\tilde{\theta}$ の $\tilde{X} - E$ 上の零点集合の $\tilde{X}$ 上の closure である.

E_i に対応する $\tilde{X}$ 上の valuation $v_i: E_i|_{[X_0]} \rightarrow \mathbb{R}$ に対応する $[X_0]$ 上の valuation $v_{0,i}$ とする. ここで $\theta = \gamma_0(\tilde{\theta})$ は H の中で各 $v_{0,i}$ の最小値を与えるとしてよい (θ の generality).

$\tilde{\theta}$ により normal cyclic m -ple cover $\varphi = \varphi_{\tilde{\theta}}: Y_{\tilde{\theta}} \rightarrow X$ を構成する. ここで restriction $\varphi|_{Y_0}: Y_0 = \varphi^{-1}([X_0]) \rightarrow [X_0]$ は Y_0 の構造層を観察することにより. 命題 5 の (2) より θ により構成された $[X_0]$ の normal cyclic m -ple cover

であることがわかる. いま $\text{films } f^{-1}(X_0), \varphi^{-1}f^{-1}(X_0)$ をそれぞれ $[X_0] + E_v, Y_0 + F_v$ と分解しておく. 次の完全列が得られる.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(K_{Y_0}) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}(K_{Y_0} - F_v) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_0}(K_{Y_0}) \rightarrow 0$$

これにより, $\tilde{X}$ 上の完全列.

$$0 \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}(K_{Y_0}) \xrightarrow{\pi^*} \varphi_* \mathcal{O}(K_{Y_0} - F_v) \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_{Y_0}(K_{Y_0}) \rightarrow 0$$

が得られる. (ただし C の 0 は a local parameter)

ここで Y_0 が高々 rational singularity (かもしれないことと). 中野消滅定理を用いれば, $H^1(Y_0, \mathcal{O}(K_{Y_0})) = 0$ かつ,

$$H^1(\tilde{X}, \varphi_* \mathcal{O}(K_{Y_0})) = 0. \quad \text{これにより, global sections の}$$

$$\text{全射 } \Gamma(\tilde{X}, \varphi_* \mathcal{O}(K_{Y_0} - F_v)) \rightarrow \Gamma([X_0], \varphi_* \mathcal{O}(K_{Y_0})) \quad \dots (1)$$

が得られる. (1) における 2 つの module の $\pi^*(m-1)$ -重因子をとりこきとる.

$$\text{全射 } \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} - \sum \nu_i'(\theta) E_i - E_v)) \rightarrow \Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]} - \sum \nu_{0i}'(\theta) E_i|_{[X_0]}) \quad \dots (2)$$

が得られる. ここで ν_i', ν_{0i}' はそれぞれ $\nu_i - \lceil \nu_i/m \rceil, \nu_{0i} - \lceil \nu_{0i}/m \rceil$.

いま (2) の右辺 $\Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]} - \sum \nu_{0i}'(\theta) E_i|_{[X_0]})$ が H と一致することを示そう.

まず $\subset$ の証明. (2) の全射は γ_0 の制限でありここに注意し

て $\Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]} - \sum \nu_{0i}'(\theta) E_i|_{[X_0]}) \subset \text{Im } \gamma_0$ を得る. 各 i に対し,

$\nu_{0i}(\theta) \geq -m+1$ であるから 補題 7 の (1)(2) により, $\nu_{0i}'(\theta) \geq$

$-m+1$ かつ, $\Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]} - \sum \nu_{0i}'(\theta) E_i|_{[X_0]}) \subset H$.

逆に $V_{0i}(\theta) \geq -m+1$ 及び $V_{0i}(\theta) \leq V_{0i}'(\theta)$ (再び補題 7. (1), (2))
 より, $\theta \in \Gamma([X_0], mK_{[X_0]} - \sum V_{0i}'(\theta) E_i |_{[X_0]})$. $\rightarrow \bar{\theta}$. θ
 12. H の元 $\bar{\theta}$ 中で, V_{0i} が最小の i だけも n であるから, H の他
 の元も すべて $\Gamma([X_0], mK_{[X_0]} - \sum V_{0i}(\theta) E_i |_{[X_0]})$ に入る.

よって Γ の diagram を得られる.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}})) & \xrightarrow{\gamma_0} & \Gamma([X_0] - E, \mathcal{O}(mK_{[X_0]})) \\ \tilde{\theta} \in \gamma_0^{-1} \bigcup (H) & \longrightarrow & \bigcup H \\ \bigcup & \nearrow & \\ \tilde{\theta}_i \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} - \sum V_{0i}(\tilde{\theta}_i) E_i - E_0)) & (2) & \end{array}$$

左下 Γ の module 上の general element $\tilde{\theta}_i$ をとると
 もし $V_{0i}(\tilde{\theta}_i) \leq -m$ とすると, E_0 が effective であることと,
 $V_i \rightarrow V_i'$ の変換 (Lemma 7. (3)) に注意すると, $V_{0i}(\tilde{\theta}_i) \geq V_{0i}(\tilde{\theta})$
 になっている. もし すべて i に対して, $V_{0i}(\tilde{\theta}_i) \geq -m+1$ とおき
 2 行目は証明は終り. そうでないとして証明を続ける.

今度は $\tilde{\theta}_i$ に対して, $D_{\tilde{\theta}_i} \cup E'' \cup [X_0]^{(1)}$ が normal crossings
 になるように, $\tilde{X}$ の exceptional set Σ に中心をとって blow
 up $g_1: \tilde{X}^{(1)} \rightarrow \tilde{X}$ とする. $\Sigma \subset E''$ は $f \circ g_1$ に属する
 $\tilde{X}^{(1)}$ の exceptional divisor $[X_0]^{(1)}$ は, X_0 の $f \circ g_1$ に入る

proper transform. $\tilde{X}^{(1)} \in \tilde{\Theta}_1$ により, 2. covering
をつく, 2. 同様の議論をすれば.

全射 $\Gamma(\tilde{X}^{(1)}, \mathcal{O}_{\tilde{X}^{(1)}}(mK_{\tilde{X}^{(1)}} - \sum \alpha_i^{(1)} E_i^{(1)})) \rightarrow H$ --- (4)
が得られる. $\therefore$ もし $V_i(\tilde{\Theta}_1) \leq -m$ なら, $\alpha_i^{(1)} > V_i(\tilde{\Theta}_1)$
(補題 7.3) と $E_i^{(1)}$ の effectivity).

この操作を順次くり返してやると $\therefore$ 最終的に,

good resolution $f \circ g_1 \circ g_2 \cdots \circ g_r : \tilde{X}^{(r)} \rightarrow X$ と.

全射 $\Gamma(\tilde{X}^{(r)}, \mathcal{O}_{\tilde{X}^{(r)}}(mK_{\tilde{X}^{(r)}} - \sum \alpha_i E_i^{(r)})) \rightarrow H$ が得られる.

$\therefore$ $\tilde{X}$ の exceptional component a proper transform
と仮定, $\therefore$ $\tilde{X}$ の component $E_i^{(r)}$ に対して

$\alpha_i \geq -m+1$. $\therefore$ $\Gamma(\tilde{X}^{(r)}, \mathcal{O}_{\tilde{X}^{(r)}}(mK_{\tilde{X}^{(r)}} - \sum \alpha_i E_i^{(r)})) \subset$
 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$. $\therefore$ 以下より確かに.

H の元は $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$ の中に逆像と
あつことがわかる.

補題 9 $\Delta_m(X_0)$ の subsheaf として $\Delta_m(X) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}(0) \hookrightarrow$
canonical は全射が存在する.

[証明]. $\mathcal{O}(mK_X) \otimes \mathcal{O}(0) \rightarrow \mathcal{O}(mK_{X_0}) \rightarrow \Delta_m(X_0)$
は合成写像と表わす $I_0 := \text{Ker}$ とおくと
 $\mathcal{O}(mK_X) \otimes \mathcal{O}(0) / I_0 \subset \Delta_m(X_0)$

ところで I_0 の元は 補題 8 により $f_* \mathcal{O}(mK_X + (m-1)E)$ の像に含まれる. よって全射 $\mathcal{O}(mK_X) \otimes \mathcal{O}(0)/I_0 \rightarrow \Delta_m(X) \otimes \mathcal{O}(0)$ が存在.

§3. general fibre 上の現象.

補題 10. (i) canonical map $k_\tau: \mathcal{O}(mK_X) \otimes \mathcal{O}(\tau) \rightarrow \mathcal{O}(mK_{X_\tau})$ は任意の $\tau \in C$ に対し単射. (X と τ が小さくとれば) $\tau \neq 0$ について全単射とわかる.

(ii) X と小さくとりおけば, $\tau \neq 0$ に対し k_τ は同型. $\Delta_m(X) \otimes \mathcal{O}(\tau) \simeq \Delta_m(X_\tau)$ と導く.

[証明]. 次の完全列を考よう.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(mK_X) \xrightarrow{\pi(-\tau)} \mathcal{O}_X(mK_X) \xrightarrow{\gamma_\tau} \mathcal{O}_{X_\tau}(mK_{X_\tau})$$

そこで $\mathcal{O}_X(mK_X) \otimes \mathcal{O}(\tau) = \mathcal{O}_X(mK_X) / \pi(-\tau) \mathcal{O}_X(mK_X)$ へ.

γ_τ の像に他はらない. (i) の主張が証明される.)

X と小さくとりおかし. $\pi|_{S-\{x\}}: S-\{x\} \rightarrow C^* = C-\{0\}$ は finite morphism であり, $E|_{C^*} \rightarrow C^*$ は projective morphism であり, $E' \subset \hat{X}$ は exceptional divisor への support を持つ divisor であり $\mathcal{O}(-E')$ は f に沿って relatively ample であることがわかる.

$E'|_{C^*} \rightarrow C^*$ は projective かつ flat であり $\mathcal{O}_{E'}(mK_X + rE')$

is flat over C^* である. cohomology 次元の上連続性により. ある $r_0 > 0$ があり, 任意の $r \geq r_0$ に対し

$$f_* \mathcal{O}_E(mK_X + rE') = 0 \quad \text{on } C^*$$

$$R^i f_* \mathcal{O}_E(mK_X + rE') = \begin{cases} 0 & \text{on } C^* \text{ if } n = \text{rel dim } \pi \geq 3 \\ \text{locally free on } C^* & \text{if } n = 2. \end{cases}$$

よ, 2. $n \geq 3$ のときも $n = 2$ のときも. 次の exact になる.

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow R^i f_* \mathcal{O}_X(mK_X + rE') \rightarrow R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + (r+1)E') \\ &\rightarrow R^i f_* \mathcal{O}_{E'}(mK_{\tilde{X}} + (r+1)E') \rightarrow 0, \quad \text{for } r \geq r_0. \end{aligned}$$

よ, 2. $R^i f_* \mathcal{O}_X(mK_X + rE')$ が ある $\frac{\epsilon}{2}$ だけ torsion free であること. $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + r_0 E')$ が ^(3.0.4.1) torsion free であることと同値. したがって, C 上十分小さくとりおかし. あるいは C^* 上: $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + rE')$ は 任意の $r \geq r_0$ について torsion free である.

よ, 1. 次の exact sequence を得る. ($r \geq r_0$)

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow f_* \mathcal{O}_X(mK_X + rE') \xrightarrow{\psi_r} f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + rE') \\ &\rightarrow f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + rE') \rightarrow R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + rE') \xrightarrow{\psi_r} R^i f_* \mathcal{O}_X(mK_X + rE') \end{aligned}$$

ここで ψ_r は, $(\pi - r)$ を引く写像である. $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} + rE')$ は torsion free on C^* である. ψ_r は injective

よ、2. $f_* \mathcal{O}_X(mK_X + rE') \otimes \mathcal{O}(\tau) \simeq f_* \mathcal{O}_{X_c}(mK_{X_c} + rE') \otimes \mathcal{O}(\tau)$ ($r \geq 0$)
 2.2 r を十分大きくとると、

$$\mathcal{O}_X(mK_X) \otimes \mathcal{O}(\tau) = f_* \mathcal{O}_X(mK_X + rE') \otimes \mathcal{O}(\tau)$$

$$\mathcal{O}_{X_c}(mK_{X_c}) = f_* \mathcal{O}_{X_c}(mK_{X_c} + rE') \otimes \mathcal{O}(\tau)$$

である。よって、上の同型により $\dim$ の主張が示される。

(ii) について、補題 9 の diagram

$$\Delta_m(X_c) \xrightarrow{i_c} \mathcal{O}(mK_X) \otimes \mathcal{O}(\tau) / I_c \xrightarrow{i_c} \Delta_m(X) \otimes \mathcal{O}(\tau)$$

を思い出す。(i) より f_c は全射。よって $\widehat{X}_c = [X_c]$

よって I_c は $f_* \mathcal{O}(mK_X + (m-1)E)$ の像以外にはない。

よ、2. I の diagram は両端が一致。

§4. 主定理と 5. の証明

主定理の証明

補題 9, 10 を用いる。

$$\dim(X_0, X) = \dim_{\mathbb{C}} \Delta_m(X_0) \geq \dim_{\mathbb{C}} \Delta_m(X) \otimes_{\mathcal{O}_c} \mathcal{O}(0)$$

$$\dim(X_c, Y) = \dim_{\mathbb{C}} \Delta_m(X_c) = \dim_{\mathbb{C}} \Delta_m(X) \otimes_{\mathcal{O}_c} \mathcal{O}(\tau)$$

X_c を十分小さい Stein space とすると、中の補題

より coherent sheaf $\Delta_m(X)$ は $\dim_{\mathbb{C}} \Delta_m(X) \otimes_{\mathcal{O}_c} \mathcal{O}(0)$ 以下の generator で生成されていると示すことができる。よ、2.

$$\dim \Delta_m(X) \otimes_{\mathcal{O}_c} \mathcal{O}(0) \geq \dim \Delta_m(X) \otimes_{\mathcal{O}_c} \mathcal{O}(\tau) \quad [\text{QED}]$$

系の証明 Z 次元の場合. 商特異点 $\Leftrightarrow \delta_m = 0 \ (\forall m \in \mathbb{N})$

に注意する. (X, x) は rational singularity ならば.

X_c は 高々 rational singularity にもなる.

より, $\mathbb{Q}$ -Gorenstein singularity である. general には.

$\tau \in C$ に対し, configuration E_c は 同じであるから.

general には $\tau \in C$ に対し 共通の $\rho > 0$ が存在し.

$\mathcal{O}(sK_{X_c})$ が invertible になる.

一般に n 次元 index r の $\mathbb{Q}$ -Gorenstein singularity (Z, z) は, 次の n 条件が成り立つ. ([8])

$$(1) \delta_m(Z, z) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(2) \delta_m(Z, z) = 1 \quad \text{for } m \equiv 0 \pmod{r}$$

$$(3) \delta_{rm}(Z, z) \text{ は order } n \text{ で増える.}$$

とすると, 同様に (2.2) の条件の下で, (1) は 次と同値である.

" $\mathcal{O}_Z(sK_Z)$ invertible となる s はある" に対し, $\delta_s(Z, z) = 0$

より我々の場合, $m = \rho$ に対し δ_m の 上半連続性定理を適用すれば, $\delta_\rho(X_c, z) = 0$ が成り立つ. (X_c, z)

は 商特異点.

§5. Du Bois 特異点の変形.

Steinbrink は [7] で, Du Bois 特異点の small deformation

はまた Du Bois 特異に付きか? という問題を提起しな.
 これは isolated Gorenstein の条件をつければ正しい.

命題 11 $\pi: (X, x) \rightarrow (C, 0)$ は isolated Gorenstein
 Du Bois singularity (X_0, x) の small deformation とする.
 と X は十分小さくすれば, $X_\tau (\tau \neq 0)$ は isolated Du Bois
Gorenstein singularity のみをもつ.

[証明] 十分小さい X は Gorenstein に付きこれより
 知られており. しかし, X_τ も Gorenstein になる.

補題 9 より $\dim \Delta_m(X) \otimes \mathbb{C}(0) \leq \dim \Delta_m(X_0)$

とこれより (X_0, x) は Gorenstein Du Bois であるからその
 特徴づけ ([2]) により, 右辺 ≤ 1 が任意の m について

成立. ところで上の補題により X を小さくすれば $\Delta_m(X)$
 は 高々 1 個の元で生成されている. よって X は Goren-
 stein であることを考慮すると, $K_X = f^* K_{X_0} + \sum m_i E_i$ ($m_i \geq 1$)
 が得られる. $\tau \neq 0$ とすると, $f^{-1}(X_\tau) = \tilde{X}_\tau \rightarrow X_\tau$ が good
 resolution を与えるから, $K_{\tilde{X}_\tau} = f^* K_{X_\tau} + \sum m_i E_i|_{\tilde{X}_\tau}$ ($m_i \geq 1$)
 より X_τ は Du Bois singularity のみをもつ. (Q.E.D.)

しかしこれより Gorenstein の条件をはずすと成立しない ([4]).

References.

- [1]. Esnault, H., Viehweg, E.: Two dimensional quotient singularities deform to quotient singularities. Math. Ann. 271, 439-449 (1985)
- [2]. Ishii, S.: On isolated Gorenstein singularities Math. Ann. 270, 541-554 (1985)
- [3] — : Du Bois singularity on a normal surface. to appear in Advanced Studies in Pure Math. 8, 1986.
complex analytic singularities.
- [4] — : Small deformation of normal singularities, preprint
- [5] Kawamata, Y.: The cone of curves of algebraic varieties Annals. Math. 119, 603-633. (1984).
- [6] — : Minimal model and Kodaira dimension of algebraic fiber spaces. preprint.
- [7] Steenbrink, J.: Mixed Hodge structures associated

with isolated singularities. Proc. Sym. in Pure Math, 40
Part 2. 513-536 (1983)

[8] Watanabe, K.: On pluri-genera of normal
isolated singularities I. Math. Ann. 210. 65-94
(1980)