

集団遺伝学における折れ棒モデル

日本大学大学院総合基礎科学研究科 河合 泰男(Yasuo Kawai)

Graduate School of Intergrated Basic Sciences,Nihon University

日本大学文理学部 情報システム解析学科 鈴木理(Osamu Suzuki)

Department of Computer Sciences and System Analysis,Nihon University

1. はじめに

長さ 100 センチの棒を、ランダムに 25 箇所折るシミュレーション実験を行い、その結果、短い棒の方に分布が偏っていることが示される。この様に与えられた分布をもつモデルを折れ棒モデルという(図 1)。自然現象の多くが折れ棒モデルで表すことができると期待される。

たとえば、化石属の平均寿命はおよそ 2000 万年である。分布はひどく偏っており、寿命が平均よりも短い属の方に多く分布していることが確認されている(図 2)。

図 1

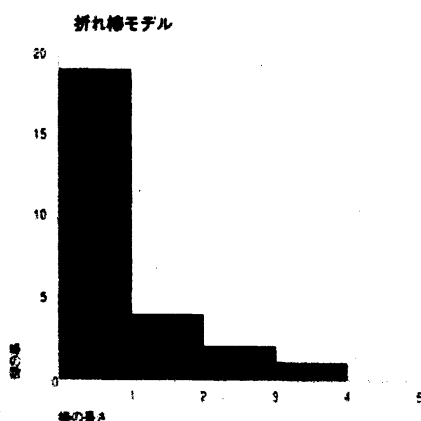
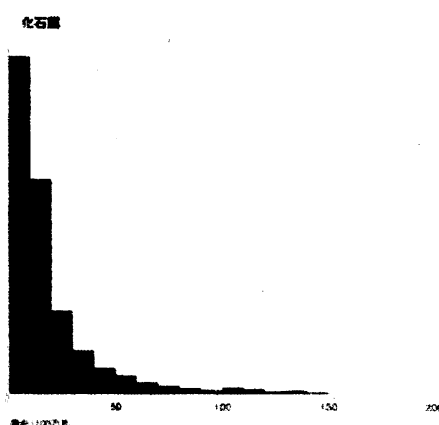


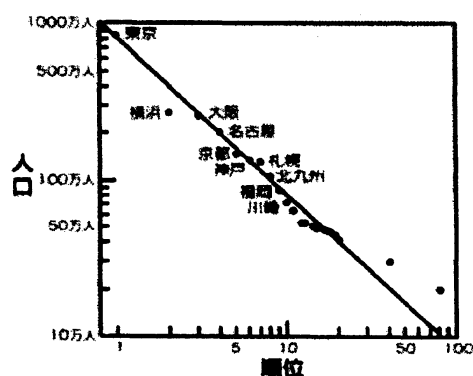
図 2



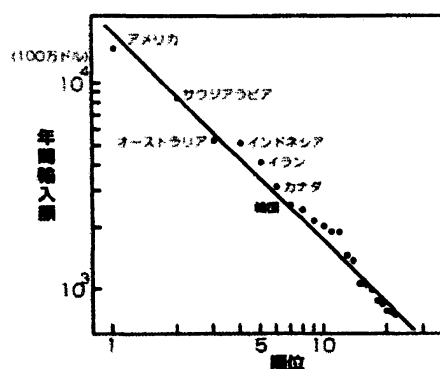
2. $1/f$ -ゆらぎ

多くの自然現象の分布は、対数座標をとると、傾きが-1の直線上にあることが分かる。

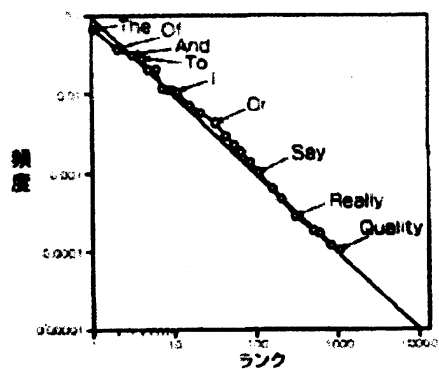
都市人口の分布



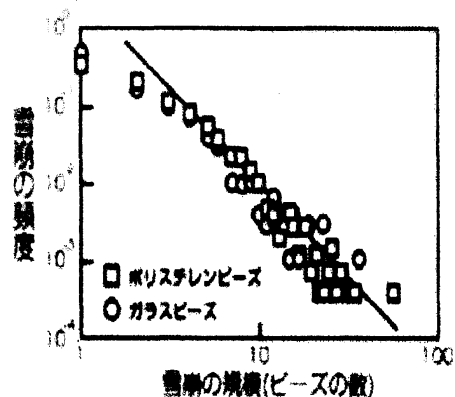
年間国別輸入額の分布



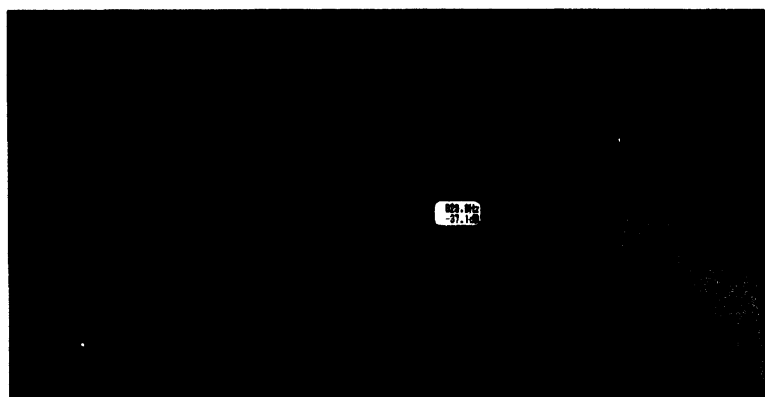
単語の使用頻度の分布



雪崩の規模と頻度に関する分布



一般的に知られている音楽における $1/f$ -ゆらぎは、フーリエ級数のスペクトルを対数座標で表すことにより、傾きが-1を示す。

音楽における $1/f$ -ゆらぎ

3. 折れ棒モデル

長さ n の棒を m 回分割した際に得られる折れ棒の長さの分布を $f_m(n)$ とする。

m カ所で折ったときの棒の長さの分布を $m=1,2,3$ について下記の表として表す。

N	m=1	m=2	m=3
2	1 1		
3	1 2	1 1 1	
4	1 3	1 1 2	1 1 1 1
	2 2		
5	1 4	1 1 3	1 1 1 2
	2 3	1 2 2	
6	1 5	1 1 4	1 1 1 3
	2 4	1 2 3	1 1 2 2
	3 3	2 2 2	

次の漸化式を満たすことが示される。

$$f_m(n) = \sum_{k=1}^n f_0(k) * f_{m-1}(n-k) = \sum_{k=1}^n k * f_{m-1}(n-k)$$

より一般的に、

$$f_m(n) = \sum_{k=l+1}^n f_l(k) * f_{m-l}(n-k) \quad A * B = 0 (A > B)$$

と表される。

$m=1$ の場合には

$$f_1(2) = 1 * 1$$

$$f_1(3) = 1 * 2$$

$$f_1(4) = 1 * 3 + 2 * 2$$

$$f_1(5) = 1 * 4 + 2 * 3$$

$$f_1(6) = 1 * 5 + 2 * 4 + 3 * 3$$

を得る。

$m=2$ の場合には

$$f_2(3) = 1 * f_1(2) = 1 * (1 * 1) = 1 * 1 * 1$$

$$f_2(4) = 1 * f_1(3) = 1 * (1 * 2) = 1 * 1 * 2$$

$$f_2(5) = 1 * f_1(4) + 2 * f_1(3) = 1 * (1 * 3 + 2 * 2) + 2 * (1 * 2) = 1 * 1 * 3 + 1 * 2 * 2$$

$$f_2(6) = 1 * f_1(5) + 2 * f_1(4) + 3 * f_1(3)$$

$$= 1 * (1 * 4 + 2 * 3) + 2 * (1 * 3 + 2 * 2) + 3 * (1 * 2)$$

$$= 1 * 1 * 4 + 1 * 2 * 3 + 2 * 2 * 2$$

を得る。

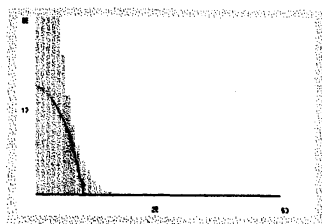
$m=3$ については省略する。

上式からすべての棒の長さに対する分布を表すことができる。

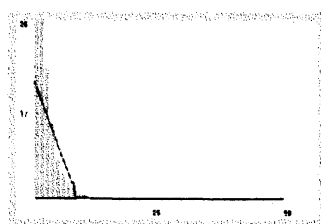
4. 折れ棒モデルが示す $1/f$ -ゆらぎ

折れ棒モデルを対数座標で表したときの傾きを示す。

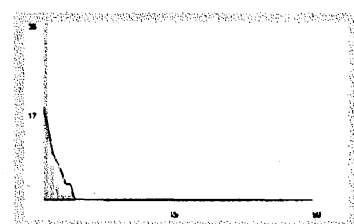
$n=20, m=5$



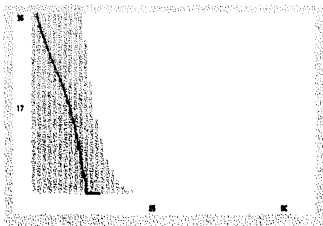
$n=20, m=10$



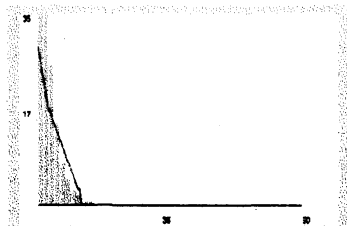
$n=20, m=15$



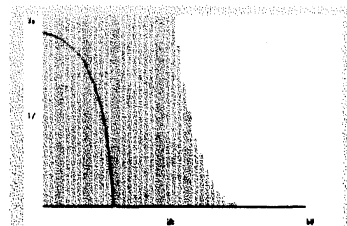
n=40, m=5



n=40, m=20



n=40, m=30



棒の長さ n のとき、棒を折る回数 m が $n/2$ の近くでは、 $1/f$ -ゆらぎが観察される。

5. メンデル代数

$S_1, \dots, S_2$ を生成元とし、積構造を

$$S_i \circ S_j = \frac{1}{2}(S_i + S_j)$$

$$X = \sum a_i S_i, Y = \sum b_j S_j$$

$$X \circ Y = \sum a_i b_j S_i \circ S_j$$

と定めて得られる代数を、メンデル代数という。

6. メンデル代数の折れ棒モデル上における表現定理

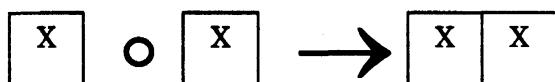
定理：メンデル代数は、 $N = 2^k$ ($k = 1, 2, \dots$) のとき、折れ棒モデル上の表現を導く。

証明のアイデア：

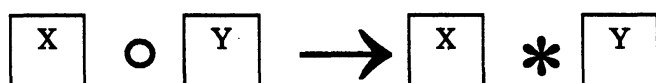
メンデルの法則の内、分離の法則に着目し、次に示すようにメンデル代数と折れ棒モデルを対応づけることができる。

$$\begin{cases} X \circ Y \Rightarrow X * Y (X \neq Y) \\ X \circ X \Rightarrow X \end{cases}$$

$$X \circ X = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X = X$$



$$X \circ Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$$



N=2 の場合には、A,B を用いて

$$A^{\circ}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A$$

$$\boxed{A} \circ \boxed{A} \rightarrow \boxed{A \ A}$$

$$A^{\circ}B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

$$\boxed{A} \circ \boxed{B} \rightarrow \boxed{A * B}$$

N=4 の場合には、A,B,C,D を用いて

$$(A^{\circ}A)^{\circ}(A^{\circ}A)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A)$$

$$= \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}A$$

$$= A$$

$$\boxed{A} \circ \boxed{A} \circ \boxed{A} \circ \boxed{A}$$

$$\rightarrow \boxed{A \ A \ A \ A}$$

$$(A^{\circ}A)^{\circ}(B^{\circ}B)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B)$$

$$= \frac{2}{4}A + \frac{2}{4}B$$

$$\boxed{A} \circ \boxed{A} \circ \boxed{B} \circ \boxed{B}$$

$$\rightarrow \boxed{A \ A} * \boxed{B \ B}$$

$$(A^{\circ}B)^{\circ}(B^{\circ}B)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B)$$

$$= \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B$$

$$\boxed{A} \circ \boxed{B} \circ \boxed{B} \circ \boxed{B}$$

$$\rightarrow \boxed{A} * \boxed{B \ B \ B}$$

$$(A^{\circ}B)^{\circ}(C^{\circ}C)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C)$$

$$= \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C$$

$$\boxed{A} \circ \boxed{B} \circ \boxed{C} \circ \boxed{C}$$

$$\rightarrow \boxed{A} * \boxed{B} * \boxed{C \ C}$$

$$(A^{\circ}B)^{\circ}(C^{\circ}D)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D)$$

$$= \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$$

$$\boxed{A} \circ \boxed{B} \circ \boxed{C} \circ \boxed{D}$$

$$\rightarrow \boxed{A} * \boxed{B} * \boxed{C} * \boxed{D}$$

以下、 $N = 8, 16, \dots, 2^k$ ($k = 1, 2, \dots$) については省略する。

7. まとめ

折れ棒モデルは $1/f$ -ゆらぎを示すモデルである。メンデルの法則は、折れ棒モデルを導き出す。このことから、折れ棒モデルは $1/f$ -ゆらぎとメンデルの法則を結びつけるモデルであるといえる。

8. 参考文献

- [1] 時田恵一郎、入江治行、「島の生物地理学と Zipf の法則」、京都大学数理解析研究所講究録 No.1432「生物数学の理論とその応用」p1~p6(2006)
- [2] 「集団と生態」、朝倉書店(1980)
- [3] 「生命科学Ⅲ遺伝学」、サイエンス社(2005)
- [4] 「整数の分割」、数学書房(2006)