

磁性流体の表面形状決定における不連続性

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering Sciences, Hokkaido Univ.

1 はじめに

複雑変形した界面形状・任意に与えた外部磁場分布のもとで、磁性流体自由表面現象の厳密な解析を行うため、これまで、写像変換による流体と磁場の解析法を調べてきた。流体解析は、重力と表面張力だけで論じる定常表面張力波 [1] と同様に定式化した。一方磁場解析には、磁束保存と無電流条件から導いた「解析性」と磁場・磁束密度成分の連続性を要請する「界面条件」を満たす界面磁場を既知の外場から近似なく求める簡明な方法確立した [2, 3]。これにより、動的解析・3次元解析までが視野に入ってきている。しかし著しい非線形性のため、定常界面形状の決定でさえ未知の課題を含む。本稿では、界面形状を決める反復法で、弱い外部磁場では収束しても、ある強さ以上で収束が得られない場合について、その原因を探った。

2 流体解析と磁場解析

流体解析・磁場解析いずれにおいても、以下のような、Flat Space から Real Space への写像変換を用いる。

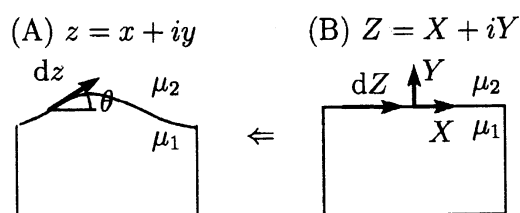


Fig. 1: (A) Real Space and (B) Flat Space.

$$\frac{dz(Z)}{dZ} = e^{i\theta - \tau}, \quad \frac{\partial \{x(X) + iy(X)\}}{\partial X} = e^{i\theta(X) - \tau(X)}. \quad (1)$$

ここで, θ, τ は界面勾配角と空間収縮率である. 界面形状は,

$$\begin{pmatrix} x(X) \\ y(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(X_0) \\ y(X_0) \end{pmatrix} + \int_{X_0}^X dX' e^{-\tau(X')} \begin{pmatrix} \cos \theta(X') \\ \sin \theta(X') \end{pmatrix} \quad (2)$$

のように, 多価形状でも有効な媒介変数表示の形で求める.

$\phi, g, \eta, \rho, \mathbf{v} = -\nabla\phi, p_i, p_e, p_c, \gamma, 1/R, T$ を流速ポテンシャル, 重力加速度, 界面変位, 磁性流体密度, 流速, 流体側圧力, 真空側圧力, 表面張力, 表面張力係数, 界面曲率, 界面磁気応力差 とすれば, 界面における力学的条件は, [4]

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta + \frac{p_i}{\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = 0, \quad p_i = p_e + p_c + T, \quad p_e = 0, \quad p_c = \frac{\gamma}{R}. \quad (3)$$

これは, (1) を用いて, θ, τ で次のように表すことができる.

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V_X}{\partial t} = F_G(X) + F_C(X) + F_D(X) + F_M(X), \quad (4)$$

$$F_G(X) \equiv -e^{-\tau} \sin \theta, \quad F_C(X) \equiv \frac{\gamma}{\rho g} \frac{\partial}{\partial X} \left(e^{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right),$$

$$F_D(X) \equiv -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{e^{2\tau}}{2} (V_X^2 + V_Y^2) \right\}, \quad F_M(X) \equiv -\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{T}{\rho g} \right).$$

(4) は, やはり (1) を用いて運動学的条件から導かれる θ, τ および V_X, V_Y の式と連立して, 磁性流体界面現象の動的解析に用いることができるが, 定常界面形状の決定には, (4) で $V_X = V_Y = 0$ とした

$$0 = F_G(X) + F_C(X) + F_M(X) \equiv R(\theta(X), \tau(X)) \quad (5)$$

だけあればよい. これは, 重力・表面張力・磁気力のつりあいを表している.

界面磁気応力差は, 接線磁場 h_s と法線磁束密度 b_n から

$$T = -[1/\mu_j] (\mu_1 \mu_2 h_s^2 + b_n^2)/2 \quad (6)$$

のように求める. ここで $\mu_j, [\dots]$ は, 透磁率 ($j = 1$:流体, 2 :真空), 界面跳躍値 ($2-1$) を表している. 磁場と磁束密度を $\mathbf{h}_j = (h_{xj}, h_{yj}), \mathbf{b}_j = (b_{xj}, b_{yj})$ とすれば, 界面磁場 $h_s(X), b_n(X)$ は, 複素磁場 $f_j(z) = b_{xj} - ib_{yj} = \mu_j(h_{xj} -$

ih_{yj}) の解析性および界面条件 $[h_s] = 0, [b_n] = 0$ を満たすように決める。ただし、ある界面形状のもとで外場 $H^0(X), B^0(X)$ を与えて決められるようにしたい。この方法は、以下のようにまとめられる。

1. 界面磁場を、外場のみで定義される基本場 h_s^0, b_n^0 と、誘導場 h_s^1, b_n^1 に分ける。

$$\begin{cases} -h_s = -h_s^0 - h_s^1, & \begin{cases} -h_s^0 \equiv H^0 \cos \theta + 2B^0 \sin \theta / (\mu_2 + \mu_1), \\ b_n^0 \equiv B^0 \cos \theta - 2H^0 \sin \theta / (1/\mu_2 + 1/\mu_1). \end{cases} \\ b_n = b_n^0 + b_n^1, \end{cases} \quad (7)$$

2. 誘導場は、外場の大きさ、界面変位、界面勾配に関して必ずしも微小量ではなく、次の線形な「界面磁場方程式」から厳密に決める。

$$\begin{cases} -(\mu_2 H_2 + \mu_1 H_1) h_s^1 = \tilde{b} + \frac{(H_2 - H_1) \tilde{h}}{1/\mu_1 + 1/\mu_2}, & \begin{cases} \tilde{h} \equiv [1/\mu_j] B^0 \sin \theta, \\ \tilde{b} \equiv [\mu_j] H^0 \sin \theta. \end{cases} \\ \left(\frac{H_2}{\mu_2} + \frac{H_1}{\mu_1} \right) b_n^1 = \tilde{h} - \frac{(H_2 - H_1) \tilde{b}}{\mu_1 + \mu_2}, \end{cases} \quad (8)$$

誘導場は、透磁率差と界面勾配の両方がある場合にだけ現れる。

3. H は、 $Hh(X') \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX'}{X' - X} h(X')$ で定義される「Hilbert 変換演算子」、 $H_1 \equiv e^\tau H e^{-\tau}$, $H_2 \equiv e^{-\tau} H e^\tau$ は「伸縮 Hilbert 変換演算子」である。Hilbert 変換は、変換される量を基底関数列で展開後、基底関数列を入れ換えて処理する。

この方法の正当性は、「線磁極と透磁性円筒」の厳密解、「一様磁場中の界面変形」の近似解と比較して確認した。

3 離散化と展開

(4) または (5) を解いて $\theta(X), \tau(X)$ を求めるためには、スペクトル選点法 (spectral collocation method) を用いるのが便利である。これは、界面磁場方程式を解いて界面磁場 $h_s(X), b_n(X)$ を求める場合も同様である。

まず、区間 $-L/2 \leq X < L/2$ において、 $\theta(X), \tau(X)$ をそれぞれの境界条件を満たす固有関数で展開する。たとえば、 $\theta|_{X=-L/2} = \theta|_{X=L/2} = 0$,

$d\tau/dX|_{X=-L/2} = d\tau/dX|_{X=L/2} = 0$ を満たすためには,

$$\begin{cases} \theta(X_k) = \sum_{n=1}^N (a_n \sin k_n X_k + a'_n \cos k'_n X_k), \\ \tau(X_k) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos k_n X_k - a'_n \sin k'_n X_k), \end{cases} \quad \begin{cases} k_n \equiv \frac{2n\pi}{L}, \\ k'_n \equiv \frac{(2n-1)\pi}{L} \end{cases} \quad (9)$$

と展開する. ここで $X = 0$ に関して $\theta(X)$ を反対称, $\tau(X)$ を対称に限るならば, $a'_n = 0$ としてよい. また X_k は, $-L/2 < X_k < L/2$ なる離散点であるが, 上記の対称性を使うときは, a_n の個数に合わせて $1 \leq k \leq N$, $0 < X_k < L/2$ とする.

(9) の展開は, Flat Space の下半面で $\theta + i\tau$ が解析的であることを仮定している. これは, e^{-ikZ} ($k > 0$) が Flat Space の下半面で解析的であることからわかる. このとき $Y = 0$ 上で θ, τ は, $\tau = H\theta$ または $\theta = -H\tau$ と互いの Hilbert 変換から求めることができる.

定常界面形状を求めるため, (9) を (5) に代入すれば,

$$0 \equiv R(\theta(X_k, \{a_n\}), \tau(X_k, \{a_n\})) = R_k(\{a_n\}), \quad (1 \leq k, n \leq N) \quad (10)$$

という, $\{a_n\}$ に対する N 次元連立方程式が得られる. これは, 界面磁場方程式とは異なり, 非線形性の著しい方程式であるため, Newton-Raphson 法のような反復法で $\{a_n\}$ を求める必要がある.

4 磁場過程と流体過程

ここで, 反復法により, i ステップにおける $\{a_n^{(i)}\}$ から次のステップの $\{a_n^{(i+1)}\}$ を求めるまでの過程をまとめる.

界面磁気応力差 T は (6) のように界面磁場 h_s, b_n で表されるが, 界面磁場方程式など (7), (8) から h_s, b_n を求めるには, $\theta(X), \tau(X)$ および外場 H^0, B^0 を与える必要がある. H^0, B^0 は界面座標 $x(X), y(X)$ の関数として一義的に決まるが, それまでに, $\{a_n^{(i)}\}$ を用いる幾何学的過程を実行して, 固有関数展開 (9) より $\theta(X), \tau(X)$ を, さらに積分 (2) より $x(X), y(X)$ を決めて

おかなければならない. $\{a_n^{(i)}\}$ から T を求めるここまでの過程を以下のよう
にまとめ, 「磁場過程」とよぶことにする.

$$T_k = T(h_s(\theta(X_k; \{a_n\}), \tau(X_k; \{a_n\})), b_n(\theta(X_k; \{a_n\}), \tau(X_k; \{a_n\}))) \quad (11)$$

$$= T(X_k; \{a_n\}).$$

次に, (10) を満たす $\{a_n^{(i+1)}\}$ は, $\{a_n^{(i)}\}$ から以下のように近似的に求めら
れる.

$$0 = R_k(\{a_n^{(i+1)}\}) \simeq R_k(\{a_n^{(i)}\}) + \sum_{n=1}^N D_{kn} (a_n^{(i+1)} - a_n^{(i)}), \quad (12)$$

$$a_n^{(i+1)} \simeq a_n^{(i)} - \sum_{k=1}^N (D^{-1})_{nk} R_k(\{a_n^{(i)}\}), \quad D = \{D_{kn}\} \equiv \left\{ \frac{\partial R_k}{\partial a_n} \right\}.$$

(12) において, $R_k(\{a_n^{(i)}\})$ と D_{kn} の計算には, $\{a_n^{(i)}\}$ と磁場過程で求めた T_k
が用いられる. これを「流体過程」とよぶことにする.

5 擬定常界面形状の探索

(5) において, 表面張力項 $F_C(X)$ を落とせば,

$$e^{-\tau} \sin \theta = \operatorname{Im} e^{i\theta - \tau} = -\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{T_0}{\rho g} \right) \quad (13)$$

となる. 界面磁気応力差 T は θ, τ に依存するが, 取り敢えず $T = T_0$ に固
定して, (13) から直接定常界面形状を決められるようにする. これは, 反復
法の初期値を選んだり, 定常解の大まかな性質を理解するのに役立つ. 既に
述べた, Flat Space の下半面における $\theta + i\tau$ の解析性, あるいは $e^{i(\theta + i\tau)}$ の
解析性を仮定すれば, (13) より

$$\theta + i\tau = \frac{1}{i} \ln(1 + W), \quad W \equiv (H - i) T_1, \quad T_1 \equiv \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{T_0}{\rho g} \right) \quad (14)$$

となる. ここで, 対数関数の引数の 1 は, $T_0 \rightarrow 0$ で $\theta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ となる
ことを保証する.

6 「線電流による回転磁場」と「一様磁場中の界面変形」

以下では、(A) 界面上方に紙面に垂直な定電流 I があって回転磁場 H を誘起するときの界面上昇、(B) 一様鉛直磁場下での界面変形、について、定常界面形状を Newton-Raphson 反復法で求めたときの収束状況を示す。

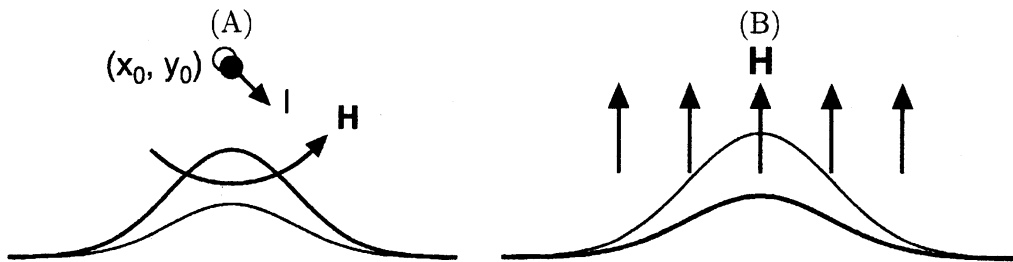


Fig. 2: (A) Rise of magnetic fluid free surface when electric current I normal to paper induces circular magnetic field H . (B) Change of magnetic fluid free surface under homogeneous vertical magnetic field.

Fig. 3 は、(A) における界面形状と $R(X)$ にもとづく力の残差の総和の収束を、2通りの電流の強さについて示したものである。弱い電流では、指数関数的に残差を減少させながら界面形状は定常形状に近づくが、強い電流では、界面形状はある形からそれ以上変化しなくなる。

(A) と同様の現象は、(B) でも見られた。磁場が弱ければ、任意の界面形状は水平面へ収束するが、ある値 (1.4) 以上では、やはり界面形状は変化しなくなる。Fig. 4 左列は、磁場の強さ 0.7 / 1.3 / 1.4 および反復の最初について、(14) における $-T_1(X)$ (実線), HT_1 (点線), $\theta(X)$ (実線), $\tau(X)$ (点線) および a_n (実線), b_n (点線, (9) で $\tau(X_k)$ の a_n に相当する) を、右列は、 $Z = X + iY$, $W \equiv (H - i)T_1$ (点線 / 実線: $X < 0 / X > 0$) を示したものである。これらの中で、次のことが反復法の収束の阻害原因に関係すると思われる。

1. 磁場の強さ 1.4 では、 $\theta(X)$ の $X = 0$ 付近で不連続となる。磁場過程、流体過程全体を通じて、 $\theta \rightarrow \theta \pm \pi$, $X \rightarrow -X$ という置換に対して不変である。Fig. 4 で $\theta(X)$ は $0 \rightarrow -\pi \rightarrow +\pi \rightarrow 0$ と変化しているが、実際は $-\pi \rightarrow 0 \rightarrow \pi$ と変化しているかもしれない。そうであれば、境界

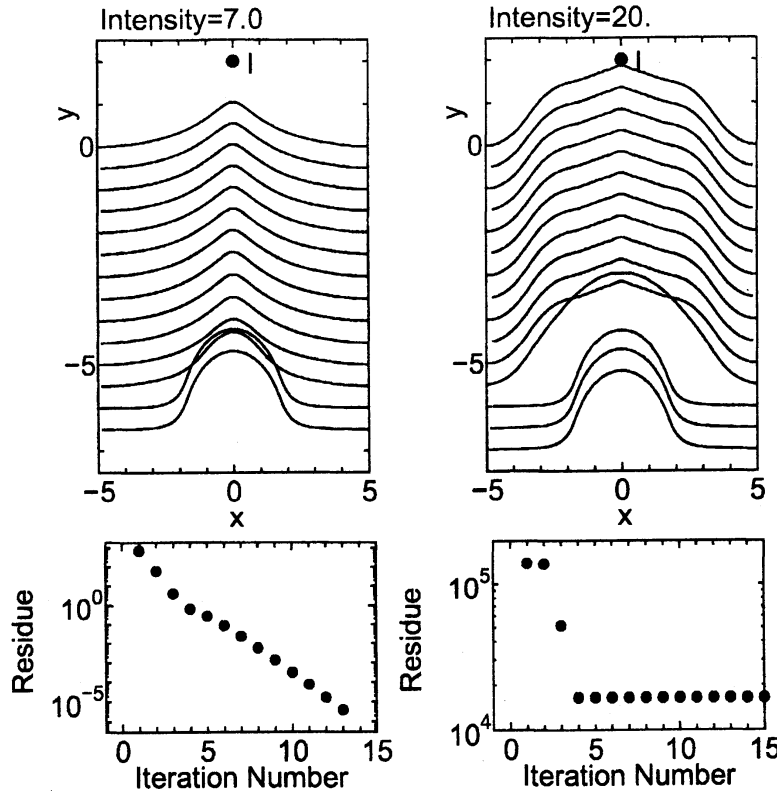


Fig. 3: Convergence of interface profile (upper) and residue of forces (lower) for circular magnetic field at intensity of electric current $I = 7.0 / 20.0$ (left / right).

値を 0 とする $\theta(X)$ の固有関数展開 (9) は不適切である。

2. 磁場の強さ 1.3 / 1.4 では、 $\theta(X)$, $\tau(X)$ の $X = \pm 1.3$ 付近で特異性が目立つ。これは右列に見られるとおり、 W が -1 の近くを通り、(14) で対数関数の引数を 0 に近づけるためである。
3. 磁場の強さ 1.4 では、(9) による $\theta(X)$, $\tau(X)$ の展開係数 a_n , b_n は一致しない。(9) の展開は $\theta + i\tau$ の Flat Space の下半面における解析性を前提としているが、大きな磁場で (14) の $\ln(1 + W)$ はこの前提を破っている。

Fig. 5 に、(B) で磁場の強さ 1.4 の場合の、最初の反復における磁場過程と流体過程の諸量を示す。ただし、最初の a_n , b_n には Fig. 4 で求めたものは使っていない。5 段目に示した (5) の $F_G(X)$, $F_C(X)$, $F_M(X)$, $R(X)$ (細点線 / 細破線 / 細実線 / 太実線) において、この磁場の強さでは $F_M(X)$ が

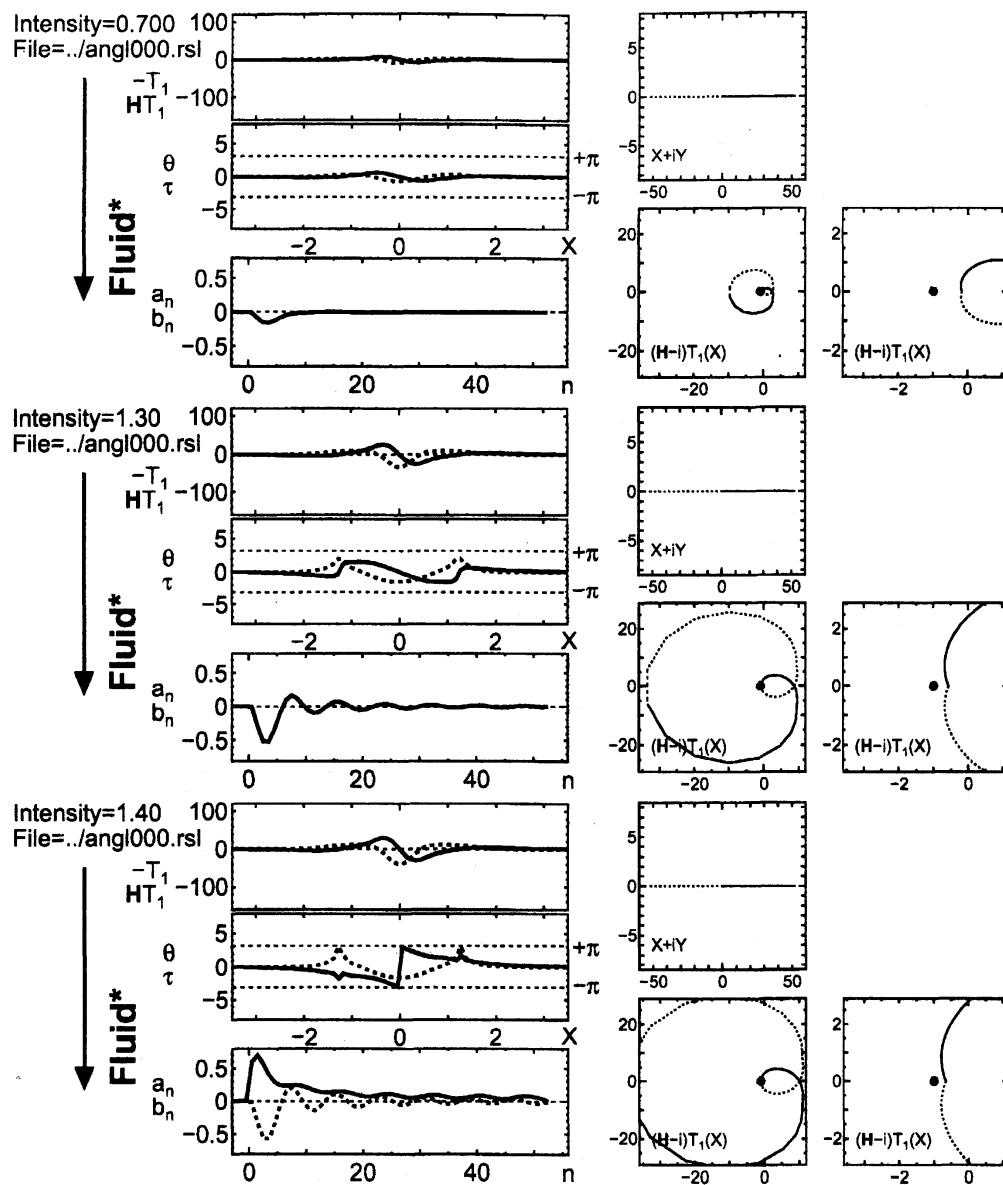


Fig. 4: $W \equiv (H-i)T_1$, $\theta + i\tau$, a_n and b_n for homogeneous vertical magnetic field 0.7/1.3/1.4.

他の力より大きくなり、反復を繰り返しても $X = 0$ 付近の $R(X)$ は小さくならずに残る。

7 まとめ

磁性流体の定常界面形状を反復法で求めるとき、ある大きさより強い磁場で収束が得られなくなる原因を調べた。現在、解析法の改良と、分岐・動

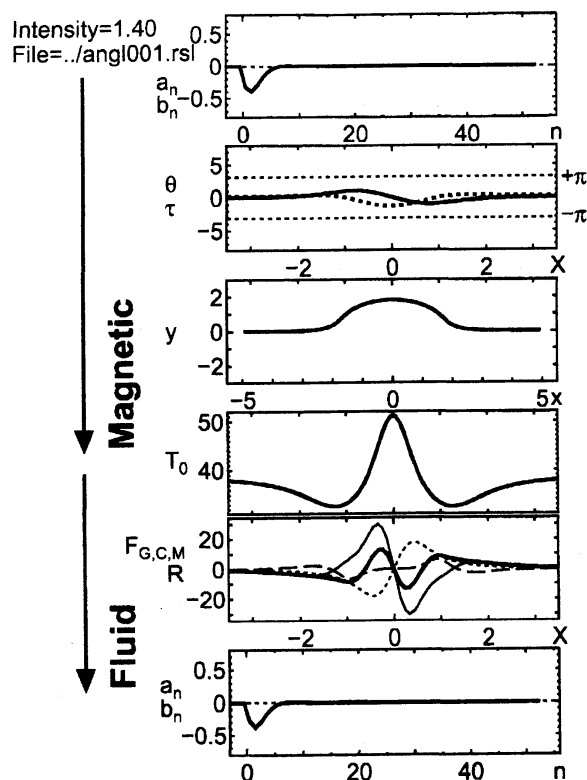


Fig. 5: Magnetic process and fluid process from zero-th to first iteration for homogeneous vertical magnetic field 0.7 / 1.3 / 1.4.

的現象の可能性の両方から、考察を進めている。

参考文献

- [1] 岡本 久: 定常表面張力波について; ながれ, **13**, p.184 (1994).
- [2] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析における界面磁場方程式の解の検証; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **1311**, p.111 (2003).
- [3] 水田 洋: 複雑変形した磁性流体自由表面でも有効な界面磁場決定方法; 第15回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム講演論文集, p.179 (2003).
- [4] R.E.Rosensweig: Ferrohydrodynamics (Cambridge University Press, Cambridge) Chap.4, Chap.5 (1985).