

Cayley の公式の組合せ論的証明

京大・理 梅田 亨

(Tôru Umeda)

0: ここでいう所謂「Cayley の公式」とは 現代的に言えば, $GL_n \times GL_n$ が $Mat_{n \times n}$ に働くという 概均質ベクトル空間の μ -函数の計算のことである。実際に A. Cayley 自身がその公式を導いたのかは定かではない。ほかにもいくつか文献上の謎があって「数学史」として興味深いのだが、紙数も限られているのでいまは措く。

この公式の発展は Garding (1946), Shimura (1984) と続くし、冒頭で述べたように概均質ベクトル空間の μ -函数の計算がほかならぬ一般化を与えている。証明法はいくつかの異なるものが知られているが、大別して (a) Plücker relation, (b) $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx$ のような積分, (c) Capelli identity を使うものと分けられる。(see [S]; [GY], [T1], [T2], [G]; [Sh], [RS]; [HU]). また超局所解析による一般的な方法については [K] を参照された。筆者はこれに関しては知らずである。

本稿では公式にあうわれる $s(s+1)\cdots(s+n-1)$ という因子が如何にも組合せ論と関係してゐる事に注目して、上のいづれとも異なる「純」組合せ論的証明を与える。使う道具は高校で習う「順列・組合せ」と大学1年で習う行列式の基本性質のみである。

(注) 本稿は筆者の 1989-90 Yale 大学滞在中に思いついたささやかな結果に基づく。これは [HU] とは一応独立だが、その研究途中の副産物でもある。しかし多分に既知のものではないかと考えており、膨大な文献をいちいち調べるのも煩しく、発表するのはここが初めてである。はじめの Cayley の件も含めて識者の御教示を乞いたい。

1: 「順列・組合せ」の復習

高校数学(式には小中学校高学年で既習のことともいえるかも知れない)の復習から始める。

(a) 順列. 「ならべ方の数」をがどえることを反省する為に「 π 」を並べる」とはどういうことかと考えてみる。心理的には二つの逆の方向の描像があり得るが、簡単に済ませる。「 π 」(=記号)を「位置」に置くとは $\{\text{位置}\}$ から $\{\text{記号}\}$ への map (写像) に他ならずぬ。(π を置かないことも許すときは $\{\text{記号}\}$ を拡張して ゼロ記号 (=空) を入れておけばよ

い。零の発見に倣うのである。) これが「順列」である。数をかぞえる為に $X = \{\text{位置}\}$, $Y = \{\text{記号}\}$ という集合は有限として $r = \#X$, $n = \#Y$ と置く。

((例 1)):

map についての制限		$\#\{\text{maps}\}$	備考
1)	制限なし	n^r	「重複順列」
2)	injective	$nPr = n(n-1)\cdots(n-r+1)$	「順列」
3)	surjective	$n! \times \text{種 Stirling 数}$	

(b) 組合せ. 順列 $X \xrightarrow{f} Y$ について「位置」の集合 X の方で或る種の同一視を行うのが「組合せ」である。それが群による対称性である場合が典型的で(数珠を作ったり, サイコロに色を塗ったり), しかもそのうち群が置換全体の群 $S(X)$ の時が, いちばんよく知られている「組合せ」である。

((例 2)): 上の例 1 の 1) なら「重複組合せ」, 2) なら「組合せ」である。

$S(X)$ で割ると X の元には個性がなくなり「濃度」だけの問題となる(濃度の定義!). つまり $\#f^{-1}(y)$ ($y \in Y$) という f の fiber の箇数のみが問題となってくる。よってこれを別の言葉で言えば「組合せ」は不定方程式

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = r \quad (\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

の解と対応する, ここで map についての制限は α_i に反映して例 1 に対応して次の例を得る.

((例 2'))

	制限	「組み合わせの数」	備考
1)	制限なし	$nH_r = n+r-1C_{n-1}$ (*)	「重複組合せ」
2)	$\alpha_i = 0, 1$	nC_r	「組合せ」
3)	$\alpha_i > 0$	$r-1C_{n-1} = nH_{r-n}$	

(*) 重複組合せの数 nH_r になぜ H という文字を使うのかよく知らないが n 変数 r 次斉次の homogeneous polynomials の「箇數」(次元)に等しいからだという説をきいたことがある。また $nH_r = n+r-1C_{n-1} = (n+r-1)!/(n-1)!r! = \frac{1}{r!} n(n+1)\cdots(n+r-1)$ という「公式」については高校以来さまざま工夫を知っている。あとで使うのはこのことである。

「組み合わせ」も「増加写像」の箇數を数えることに帰着させたり定式化したりして「写像一元論」を唱える立場もある。しかし、むしろこれは $\{\text{maps}\} \rightarrow \mathcal{G}(X) \setminus \{\text{maps}\}$ の section のうまいとり方として「順序」という構造が付けられたと見るべきであろう。これは対称性によって「幾何」をみる典型的状況のひとつといえる。

(c) 補足. あとで使わないのだが, ついでに述べしておく。 $X \rightarrow Y$ を $\mathcal{G}(Y)$ が割ることも考えられる。うまい名前

を知らないが、「区分け」とか「類別」のようなものである。
さらに $G(X)$ と $G(Y)$ の両方で割ると、さきほどの不定
方程式で α_i の順番をとりかえたものが同一視されるから
「数の分割」があらわれる。

2: 「順列・組合せ」と微分

本稿の主題 Cayley の公式の最も易しい場合は、ほかにならぬ

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

というものである。これをくりかえし使えば

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r x^n = n(n-1)\cdots(n-r+1) x^{n-r}$$

この係数として順列の数 nP_r が出てくるのは勿論偶然では
ない。まず $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ について見ると、 $x^n = \overbrace{x \cdots x}^n$ と
 $\frac{d}{dx}$ という derivation の積の微分の公式を使って微分を実行す
ると、どの x を消すかということが n 通りの場合が生じ、そ
れが係数の n となる。少し見易くする為に $\frac{d}{dx}$ の代りに $\xi \frac{d}{dx}$
という derivation を用いる

$$\xi \frac{d}{dx} x^n = \xi x^{n-1} + x \xi x^{n-2} + \cdots + x^{n-1} \xi$$

と書くと $\xi \frac{d}{dx}$ $x \cdots x$ のどの x が ξ にとり替わって
 $\xi \frac{d}{dx}$ $x \cdots \xi \cdots x$ となるか区別して書ける。この polarization
operator $\xi \frac{d}{dx}$ を用いて $\left(\frac{d}{dx}\right)^r x^n = n(n-1)\cdots(n-r+1) x^{n-r}$ と
解釈してみると、 $\xi_0, \dots, \xi_{r-1}$ を新たな文字として

$$(\xi_{r-1} \frac{d}{dx})(\xi_{r-2} \frac{d}{dx}) \cdots (\xi_0 \frac{d}{dx}) x^n$$

を計算すると もとあった n の x が $\xi_1, \dots, \xi_r$ に r 回替り
れて n 個ある可能性だけの和が生じる。その項数は順列
 $r \rightarrow n$ (injective) の個数であるから $n P_r$ となる。こ
こで公理的集合論の記号の便法を流用して $r = \{0, 1, \dots, r-1\}$ と
いう略記法を使つた (以下でも時に使う)。

以上は非常に易しい局面での説明だが、微分計算と組合せ
のこのような関係は MacMahon などによつて多く使われて
いる。併し詳しいことはよく知らない。

3: Cayley の公式

易しいことの復習は充分したから本題に入る。 $n \times n$ 行列
 $\text{Mat}_{n \times n}$ の座標を x_{ij} , 対応する微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ を ∂_{ij} と書
く。定数係数 n 階の微分作用素 Ω を

$$\Omega = \det(\partial_{ij})$$

と定義する。これは Cayley の ω process と呼ばれるわ
され古典不変式論及び典型群の不変式論に於て重要な役
割を果たして来た。さて Cayley の公式とは Ω を $\det(x_{ij})^s$
に作用させた時の計算がある。簡単の爲 $X = (x_{ij})$ と書く:

$$\Omega(\det X)^s = s(s+1) \cdots (s+n-1)(\det X)^{s-1}$$

一般に $\Omega(\det X)^s = \beta(s)(\det X)^{s-1}$ とする多項式 $\beta(s)$ の

存在すること, 及び s が正整数のとき $0 \neq 1$, などを見るのは易しい. よって問題となるのは $\beta(s)$ の具体的な計算である. いくつかの知られた方法については序に述べた文献を参照せたい.

4: 証明

$\beta(s)$ が多項式であることを認めると $\beta(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$ を証明するには s が正整数のとき言えばよい. 基本的な idea は polarization operator によって微分結果の各項と或る写像 (map) の対応を見ることがある. そしてこの場合は $\text{map} = \langle \text{順列} \rangle$ の数が高校数学の範囲で計算できるという訳である.

今, 行列 $X = (x_{ij})$ を n 個のタテベクトルが n 個並んだものとみなし $X = (X_1, \dots, X_n)$ と書く. 別に同じ size の一組のベクトルを用意する. それを並べた行列を $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$. これらに関して polarization operator

$$\sum_j \partial_{x_i} = \sum_{k=1}^n \sum_j \partial_{x_{kj}} \partial_{y_{ki}}$$

を考える. すると determinant は multilinear だから

$$(\sum_j \partial_{x_i}) \det X = \det (X_1, \dots, \overset{\downarrow}{\sum_j \partial_{x_i}} \cdots X_n)$$

となる. つまり i 番のベクトルが $\sum_j \partial_{x_i}$ と置き換わる. 今 s を正整数として $(\det X)^s$ にこの polarization operator を施すと,

S の因子のうち, ひとつだけがこうおき替ったものが混り
 そういふ S の和が生ずる. このことを念頭において $\sigma \in S_n$
 について

$$D_\sigma = (\xi_{\sigma(n)} \partial_{x_n}) (\xi_{\sigma(n-1)} \partial_{x_{n-1}}) \cdots (\xi_{\sigma(1)} \partial_{x_1})$$

を $(\det X)^S$ に施した結果を考えよう. $\det$ の multilinear 2^o
 あることを強調して $\det X = |x_1 \cdots x_n|$ のように書いてみ
 る. この S をタテに並べて「積」を表わすことにしよう.
 すると上の D_σ を $(\det X)^S$ に作用させたとき生ずる各項は

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_1 \cdots x_n| \\ x |x_1 \cdots x_n| \\ \vdots \\ x |x_1 \cdots x_n| \end{array} \right\} S \quad \left(\begin{array}{l} \text{これを図式化して} \\ \text{と書く} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{}^n \\ \hline \hline \hline \vdots \hline \hline \hline \end{array} \right\} S$$

のうちタテに並んだ S の x_i のうちどれかひとつが $\xi_{\sigma(i)}$
 に置きかわったものである. よって σ を fix すると $n \xrightarrow{f} S$
 という S^n 箇の項が並ぶ. とも込めて $n \xrightarrow{f, \sigma} n \times S \quad (i \mapsto (\sigma(i), f(i)))$
 と書く. さて我々が必要なのは $(\det X)^S$ への Ω の作用 2^o
 ある. 上の D_σ との関係をみると

$$(\det X) \cdot \Omega = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot D_\sigma$$

2^o あることは, 行列式の積の法則 2^o である (ξ_j は x_i と独立な
 新たな変数であるから微分と積が可換である). よって D_σ
 を施し交代和をつかったのち ξ_j を x_j と特殊化すれば必要

な結果が得られる。即ち

$$(\det \Xi) \cdot \Omega (\det X)^s \Big|_{\Xi \mapsto X} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn } \sigma \cdot D_{\sigma} (\det X)^s \Big|_{\Xi \mapsto X}$$

左辺は $(\det X) \cdot \Omega (\det X)^s$ となるから、示すべきは右辺が $s(s+1)\cdots(s+n-1) (\det X)^s$ となることである。

さて D_{σ} を $(\det X)^s$ に作用させて生ずる項を f_{σ} に対応するものを見る。ここで $\Xi \mapsto X$ と特殊化するとどうなるか。たとえば $|x_1 \ x_1 \ \cdots \ 1|$ のような因子を含んでいれば $x_1 \mapsto x_1$ により、2重複したタテバクトルを含み、消える。よってこの特殊化で生き残るのは f_{σ} についての条件

(*) σ は 各 $f^{-1}(j)$ ($j \in S$) の中で閉じた置換、を満たすものに限る。またこのとき $\Xi \mapsto X$ と特殊化して得られるものは up to $\text{sgn } \sigma$ で $(\det X)^s$ である。符号は交代和の符号と打ち消すので、結局は (*) をみたす f_{σ} の個数を数えればよいことになった。

ここで $\{f_{\sigma}\}$ に $\mathfrak{S}_n$ が次のように働く：

$$f_{\sigma} = (\sigma, f) \xrightarrow{\tau} \tau f_{\sigma} = (\tau \sigma \tau^{-1}, f \tau^{-1}) \quad \tau \in \mathfrak{S}_n$$

これは(*)を保つ。(*)をみたす $\{f_{\sigma}\}$ の $\mathfrak{S}_n$ -同値類は $\{f^{-1}(j); j \in S\}$ という data でまきまきすることは容易だから、 $\# \{f_{\sigma}; (*) \text{をみたす}\} / \sim \mathfrak{S}_n$ という「組合せ」は $\alpha_j = f^{-1}(j)$ と

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

の解の個数に等しい。これは既に見た通りに sH_n である。

更に $sH_n = \binom{s+n-1}{n} = \frac{(s+n-1)!}{n!(s-1)!} = \frac{1}{n!} s(s+1)\cdots(s+n-1)$ を
 使うと, これが S_n -(2) 種類の数であるから $n! = \#S_n$ と乗
 じたものが, 結局 (*) をみたす $\{f_\sigma\}$ の函数となる. よって

$$\beta(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$$

が示された. (注: これは同時に $\sum_{\sigma \in S_n} s^{c(\sigma)} = \beta(s)$ とも見れるが詳しくは
 略す. 但し, ここで $c(\sigma)$ は σ の cycle の数.)

5: 問題

証明は終わったが, 残りの数値を使うと, 問題を提出してお
 こう. 必ずしも意味のあるものとは限らないかも知れないが
 当然考えられるものである. 但し, 筆者は充分吟味した訳で
 はない.

[1] 同様の論法が別の L -函数 (及び Shimura の L -函数)
 に使えるか? 特に Garding の例など. または [HV] の中
 の multiplicity-free action の例など

[2] Cayley の公式の q -analogue に対して, 組合せ論
 的な解釈も含めて拡張できるか? 特に有限体上のベクトル
 空間の写像, 函数との関連.

[3] Capelli 恒等式の組合せ論的証明. さらに [HV]
 の中の skew symmetric case について.

以上 (1991 年 1 月 25 日)

BIBLIOGRAPHY

- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Annalen **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Ricerca delle operazioni invariantive fra piu serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie*, Atti delle Scinze Fis. e Mast. di Napoli (2) **I** (1888), 1–17.
- [Ca3] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Annalen **37** (1890), 1–37.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli Identity, the Double Commutant Theorem, and Multiplicity-Free Actions*, preprint 1990.
- [G] L. Gårding, *Extension of a formula by Cayley to symmetric determinants*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 73–75.
- [GY] J.H. Grace and A. Young, *The Algebra of Invariants*, Cambridge University Press, 1902.
- [K] T. Kimura, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, (in Japanese), Sugaku **32** (1980), 97–118.
- [KS] B. Kostant and S. Sahi, *Capelli identity, the domains and the generalized Laplace transform*, preprint 1989 Dec..
- [Ra] M. Raïs, *Distributions homogènes sur des espaces de matrices*, (Thèse Sc. math. Paris, 1970), Bull. Soc. math. France, Mémoire **30** (1972), 1–109.
- [RS] H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Opérateurs différentiels de Shimura et espace préhomogènes*, Invent. math. **90** (1987), 409–442.
- [S] M. Sato, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, notes by T. Shintani (in Japanese), Sugaku no Ayumi **15–1** (1970), 85–157.
- [Sh] G. Shimura, *On differential operators attached to certain representations of classical groups*, Invent. math. **77** (1984), 463–488.
- [T1] H.W. Turnbull, *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Dover, 1960.
- [T2] ———, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 76–86.
- [W] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1946.