

Invariant Theory for generalized root systems

(Looijenga の論文 (preprint) の紹介)

東大 理 徳山 豪

Generalized Cartan 行列 $N = (n_{ij})_{i,j=1,\dots,\ell}$ に対し、有限次元
 実ベクトル空間 V と、 $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subset V$, $B^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\} \subset V^*$ を、
 それぞれ一次独立かつ $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = n_{ij}$ であるように定義する。
 この時、 V 中の reflection $\Delta_{\alpha_i} : \Delta_{\alpha_i}(x) = x - (x, \alpha_i^\vee) \alpha_i$ たちによ
 って生成される $\text{Aut}(V)$ の部分群 W を、 generalized Weyl group と
 呼ぶ。これは、 N に対応する Kac-Moody Lie 環の Weyl 群となる。
 今、有限次元半単純 Lie 環の Weyl 群に於ける不変式論の拡張
 をこの W で考えてみよう。 W は (無限) Coxeter 群である。そ
 で、有限次元 Weyl 群の不変式論に於ける Chevalley の定理を適用
 するために、次の様な affine space Ω を作る。即ち、 W の fundamen
 tal chamber C を取り、 $I = W \cdot C$ を C の W -orbit とする。こ
 の時、 $\Omega := \{x + iy \mid x \in V, y \in \mathbb{R}\}$ 。今、 W を $Q = \mathbb{Z} \cdot B$ による
 translation で拡大し、 $\widehat{W} = \tau(Q) \cdot W$ を作ると、 $\widehat{W}$ は Ω 上 affine
 Weyl 群として properly discontinuous に働き、 $\Omega/\widehat{W}$ は complex manifold

$-1d$ の構造を持つ。

よって、この Ω/W の関数環は、 W の exponential type の不変式環と見なせる訳であるが、Looijenga はこの論文で、 Ω に低次元の analytic manifold を付け加える事によって $\hat{\Omega}/W$ が stein manifold になるような $\hat{\Omega}$ を構成している。この構成は又、 I 全体 $\wedge$ の W の作用に対する exponential type の不変式論に対応している。（ W が Euclidean type ならば theta 不変式に対応している。）

この結果は、ある種の singularity の性質を導き出しており、Looijenga は本文中でこの方面への次回の論文の予告をしている。

ここでは、主に $\hat{\Omega}$ の構成について述べる。

§ 1. W と、その Tits cone I の性質

Def 1.1. $N = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,\ell}$ が Generalized Cartan 行列 (GCM) とは、

① $m_{ii} = 2$ ② $m_{ij} \in \mathbb{Z}_-$ if $i \neq j$ ③ $m_{ij} = 0 \Leftrightarrow m_{ji} = 0$,

この N に対し、前に述べた (V, B) の pair を、 N の root basis と言う。今、 $(V, B) = (V_1 \times V_2, B_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times B_2)$ で、かつ (V_1, B_1) 、 (V_2, B_2) がそれぞれある GCM の root basis とできる時、 (V, B) を可約、そうでない時既約と言う。

対応する (generalized) Weyl 群を W と書く。

$C = \{x \in V, \langle x, \alpha_i^\vee \rangle > 0 \text{ for } \forall i\}$ を W の fundamental Weyl Chamber. その W -orbit $I := W \cdot C$ を Tits cone と呼ぶ。 I 中で C は W の基本領域となる。

Prop 1.1 $(W, \{\Delta_{\alpha_i} \mid \alpha_i \in B\})$ は Coxeter 系 となる。

Prop 1.2 I は convex cone., $I = V \iff W$ は有限群

Def 1.2 B の部分集合 X に対して.

$$F_X := \{x \in V \mid \langle x, \alpha^\vee \rangle = 0 \text{ for } \forall \alpha \in X, \langle x, \beta^\vee \rangle > 0 \text{ for } \forall \beta \in B - X\}$$

を基本面分と言ひ。

$F = w F_X$ ($\exists w \in W, X \subset B$) なる形の V の部分集合 F を面分と言う。

$$\text{又. } V_X := \sum_{\alpha \in X} \mathbb{R} \alpha \subset V$$

$$W_X := \langle \Delta_\alpha \mid \alpha \in X \rangle \subset W$$

とおく。以下、面分の性質を掲げる。

Prop 1.3 F_X の W 中の stabilizer は W_X

Prop 1.4. $F' = w' F_{X'} \subset \overline{w F_X} = \overline{F} \iff w W_X \subset w' W_{X'}$

Prop 1.5. I の内点全体を $\dot{I}$ とすると, $\dot{I}$ は, I の面分たちのうちで, 有限な stabilizer を持つ面分たちの和集合となる。

上の Proposition により, W が $\dot{I}$ に properly discontinuous に働く事が示される。

I の面分への分割と, 面分たちの間の closure relation を, I の Tits building 構造と言う。次の章では, I と同じ Tits building 構造を持ち $\dot{I}$ を含む W -space $\hat{I}$ で, $\hat{I}_W$ が locally compact になるものを構成する。

§2 $\hat{I}$ の構成

Def 2.1. $N = (m_{ij})$ に対応する Weyl 群 W の Dynkin 図形とは, B の元を頂点とし, 2 頂点 α, β 間には, $\alpha \rightarrow \beta$ 方向に $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ 本, $\beta \rightarrow \alpha$ 方向には $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ 本の向きのついた辺を書いたものと定義する。

Def 2.2. B の部分集合 X が special subset とは,

$\begin{cases} X = \emptyset \end{cases}$. 又は

$\begin{cases} X \text{ の Dynkin 図形 (即ち, } B \text{ の Dynkin 図形の } X \text{ への制限) の Connected component に対応する Weyl 群が全て無限群のいずれかであること。} \end{cases}$

Def 2.3 B の部分集合 X に対し、

$$X^* = \{ \alpha \in B \mid \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \text{ for } \forall \beta \in X \}$$

Def 2.4 V の subspace V' が special subspace であるとは、 B の special sub-set X と、 W の元 w が存在して、
 $V' = w V_X$ となる事をいう。

Prop 2.1 X が special sub-set ならば、 V_X の W 中の stabilizer は、 $W_X \cup X^* (= W_X \times W_{X^*})$

Def 2.5

今、special sub-set X に対し、次の様に W_{X^*} space $\tilde{I}(X)$ を定義する。

X が special sub-set ならば、natural map

$$\pi_X: V \longrightarrow \bigvee_{V_X} \text{ の } X^* \text{ 上への制限 } \varphi: X^* \longrightarrow \bigvee_{V_X}$$

を考えると、像 $\varphi(X^*)$ の元は $\bigvee_{V_X}$ 中で線型独立である。

$\alpha^\vee \in (X^*)^\vee$ は V_X 上で 0 なので、natural map

$$(X^*)^\vee \xrightarrow{\varphi^\vee} (\bigvee_{V_X})^\vee \text{ が定義できる。しかも、像 } \varphi^\vee(X^*)^\vee$$

は $(\bigvee_{V_X})^\vee$ 中で線形独立である。よって、 X^* は $\bigvee_{V_X}$ の上の 1

つの root basis を定める。

$$\pi_X: V \longrightarrow \bigvee_{V_X} \text{ は、} I \text{ を } \pi_X(I) = \pi_X(I_{X^*}) \text{ に写し、}$$

これは $(\bigvee_{V_X}, \pi_X(X^*))$ の Tits cone になる。

$I(x) := \pi_x(I)$ とおくと

$$\mathring{I}(x) = \pi_x(I) \cap \pi_x(\mathring{I}_x^*) = \pi_x(I \cap \mathring{I}_x^*)$$

$I(x)$ の面分を, $\pi_x(I_x^*)$ の面分と $I(x)$ との intersection.

$\mathring{I}(x)$ の面分を, $\pi_x(I_x^*)$ の面分と $\mathring{I}(x)$ との intersection

と定義してやると, 次の言える.

Lemma $\pi_x: V \longrightarrow V/V_x$ は, I (resp. $\mathring{I}$) の面分を $I(x)$ (resp. $\mathring{I}(x)$) の面分に写し, $\mathring{I}(x)$ の任意の面分は, $\pi_x(F)$; $F \subset \text{St}(F_x^*)$ の形に一意的に書ける.

よって特に

$$\text{Corollary} \quad \pi_x(\mathring{I}) = \mathring{I}(x)$$

上の Cor によって, 次の様にして, V の special subspace V' に対して, $I(V')$ が定義できる.

$$\text{Def 2.6} \quad I(V') := \pi_{V'}(I), \quad \mathring{I}(V') := \pi_{V'}(\mathring{I})$$

但し, $\pi_{V'}: V \longrightarrow V/V'$ は natural map.

$$(\text{注}) \quad \text{よって, } I(x) = I(V_x) \quad \mathring{I}(x) = \mathring{I}(V_x)$$

$\dot{I}(x)$ と同様に、 $\dot{I}(V)$ の面分を、 $\dot{I}$ の面分の π_x による像とすると、 $\dot{I}(V')$ も面分分解されている。

$V'' \subset V' \subset V$ $V'', V': \text{special}$ とする時、natural map $\pi_{V''}^{V'} : V/V'' \longrightarrow V/V'$ は、 $I(V'')$ (resp. $\dot{I}(V'')$)を $I(V')$ resp. $\dot{I}(V')$ に写す。

この時、 $\hat{I} = \bigcup \dot{I}(V')$ $V' \subset V: \text{special}$ なる disjoint union を作る。すると、 W は $\hat{I}$ に作用する。即ち、 $\dot{I}(V')$ の元 xV' と、 $w \in W$ に対し、 $w(xV') := wx(wV')$ $\dot{I}(wV')$ として作用させる。

以下、こうして作った $\hat{I}$ が I と同じ building 構造を持つようにできる事を示そう。

Lemma I 中の任意の面分 F に対し、 $\hat{I}$ 中の面分 $\hat{F}$ で F と $\hat{F}$ は同一の W -stabilizer を持つものが一意的に存在する。

(証明) B の部分集合 Z に対し、 F_Z に対える $\hat{F}_Z$ を作る。 $Z = X \cup Y$; X は Z の maximal sub-set とすると、 $Y \subset X^*$ 、 W_Y は有限群、 $\pi_x(F_Y)$ は、よって Prop 1.5 から $\dot{I}(x)$ の面分である。これを $\hat{F}_Z$ と書くと、 $\hat{F}_Z$ の W_{X^*} stabilizer は W_Y 。よって、

$\widehat{F}_Z$ の W -stabilizer $= W_x \times W_Y = W_Z = F_Z$ の W -stabilizer。
 一般の面分 $F = wF_Z$ に対しては $\widehat{F} = w \cdot \widehat{F}_Z$ としてやる。
 明らかに $F \rightarrow \widehat{F}$ なる対応は bijective で W -不変 //

$\widehat{I}$ の topology を定義しよう。

Def 2.7 $\widehat{I}$ の部分集合 U が、点 $x \in \overset{\circ}{I}(V)$ の近傍であるとは、
 U の部分集合 U' で、次の性質をもつものが存在することという。

- 1) $x \in U'$
- 2) $U' \cap \overset{\circ}{I}$ は、 $\overset{\circ}{I}$ の open convex set で、 x の stabilizer W_x で不変。
- 3) $U' \cap \overset{\circ}{I}(V') = \pi_{V''}(U' \cap \overset{\circ}{I})$ if $V'' \subset V'$

Lemma

- ① 上の U たちは近傍系の公理を満たす。
- ② 上の topology で、 W の $\widehat{I}$ への作用は continuous になる。
- ③ $\overset{\circ}{I}(V')$ の closure は $\bigcup_{V'' \subset V'} \overset{\circ}{I}(V'')$ である。

すると、 I と $\widehat{I}$ の building 構造は同じになる。即ち、

Prop 2.2.

$$\widehat{F}_1 \cap (\widehat{F}_2) \neq \emptyset \iff F_1 \subset F_2 \iff \widehat{F}_1 \subset (\widehat{F}_2)$$

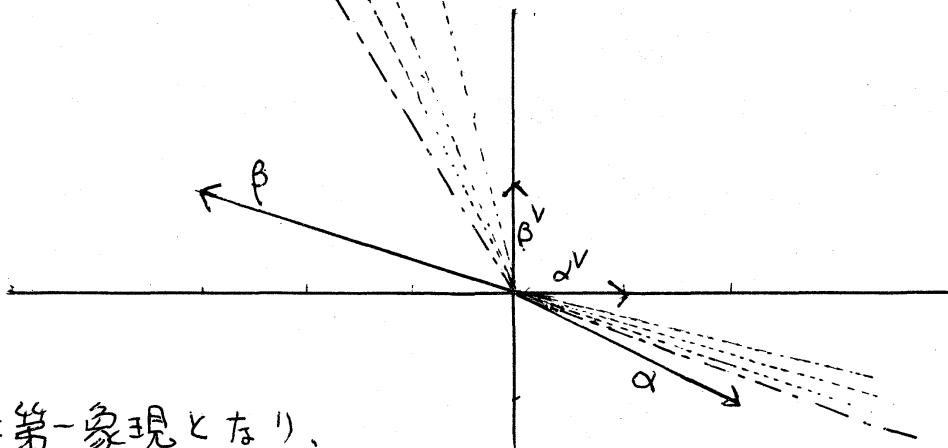
topological space $\hat{I}/W$ について、次の性質が証明できる。

Prop 2.3 $\hat{I}/W$ は第=可算性を持つ。Hausdorff, locally compact space である。

今までの事を2次元の実例で示そう。

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad V = \mathbb{R}^2. \quad B = (\alpha, \beta)$$

$\alpha = (2, -2), \beta = (-4, 2)$ V 中の内積によって V と V^* を同一視して、 $\alpha^V = (1, 0), \beta^V = (0, 1)$



C は第一象限となり、

$\overset{\circ}{I}$ は $\begin{cases} \alpha^V(x) > (-2+\sqrt{2})\beta^V(x) \\ \text{or } \alpha^V(x) > (-2-\sqrt{2})\beta^V(x) \end{cases}$ なる領域。
(破線の内側)

つまり、 $2\alpha^V(x)^2 + 2 \cdot 4 \cdot \alpha^V(x)\beta^V(x) + 4\beta^V(x)^2 > 0$ なる

領域の内て $(1, 1)$ を含む連結部分である。

$$I = \overset{\circ}{I} \cup \{(0, 0)\}$$

1次元の面分は原点を通る I 中の半直線。(点線はその一例)

これら 1-次元の面分は可算無限大本ある。

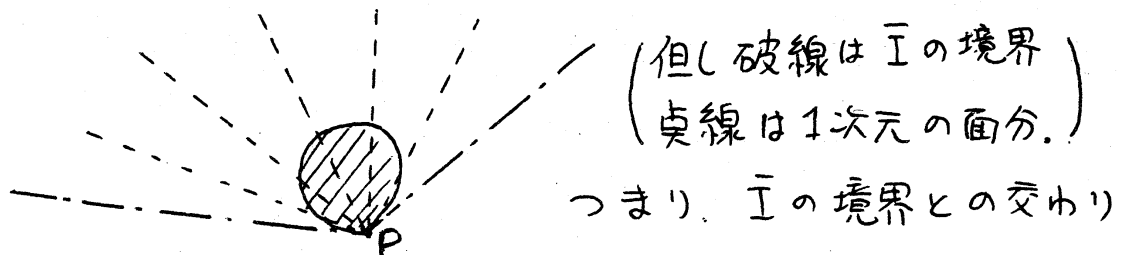
この時、 B の special sub set は B と、 $\emptyset$ である。

$\hat{I}(\emptyset) = \hat{I}$ $\hat{I}(B) = \{(0,0)\}$ - 点 と見なせる。

$\hat{I}$ を構成すると、集合としては、

$\hat{I} = \hat{I}(\emptyset) \cup \hat{I}(B) = \hat{I} \cup P$ P : 1 点 であり、

Topology は、 p を $\hat{I}$ の無限遠点として付けたものであるが、
この p の周りでの近傍の基は下図の様なもの



が p だけであるような集合が p の近傍になりうる。

(注) よって、この場合は $\hat{I}$ 自身が locally compact. 但しこれは一般には言えない。

次に、この $\hat{I}$ の complex analogue を作る。

§3. $\hat{\Omega}$ の構成

Def 3.1 B の special sub set X に対して、 $\Omega(X)$ を、次のように定義する。 $\Omega(X) := \{x + iy \in V_{\mathbb{C}} / (V_X)_{\mathbb{C}} : x \in V / V_X, y \in \hat{I}(X)\}$

すると、 $\Omega(X)$ は W_X^* 不変。(作用は $w \cdot (x + iy) = w \cdot x + i w \cdot y$)

$Q(x) = \mathbb{Z} \cdot B / \mathbb{Z} \cdot x$ と定義する。ここで $Q(x)$ の元 g に対し、 V_x 中の translation $\tau(g) : V_x \longrightarrow V_x$ を、 $\tau(g)z = z + g$ で定義する。

この translation が作る群を $\tau(Q(x))$ と書く。今、 $\tau(Q(x))$ を $\Omega(x)$ の実成分に働かせる事により、 $\Omega(x)$ 上に次の半直積 $\widetilde{W}_x := \tau(Q(x)) \cdot W_x^*$ が作用する。

この時、Affine Weyl 群の性質により、次のことが示される。

Lemma. $\Omega(x)$ の一点 ω の $\widetilde{W}_x$ -stabilizer は有限鏡映群となる。かつ、これが non-trivial group になるには、 $W_x^* \cdot X^*$ の元 α が存在して、 $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle$ が整数になるようにできる事が必要十分条件。

上の Lemma により、 $\Omega(x)$ に Chevalley の定理を適用でき、 $M(x) := \Omega(x) / \widetilde{W}_x$ は canonical に analytic manifold となる。

$\Omega = \Omega(\phi)$, $\widetilde{W} = \widetilde{W}_\phi$ とすると、 $M = \Omega / \widetilde{W}$ は W の $\mathbb{I}$ への作用を記述している。そこで、 I から $\mathbb{I}$ を構成した元針に従って、 Ω に低次元の manifold を添加することにより $\widehat{\Omega}$ を作り、 W の $\mathbb{I}$ への作用、即ち I への作用を記述する Stein manifold

$\widehat{M} = \widehat{\Omega}/\widehat{W}$ を構成する。

Def 3.2 V の special subset V' に対し、

$$\Omega(V') := \{ \omega \in V_{\mathbb{C}}/V'_{\mathbb{C}} \mid \text{Im}(\omega) \in \overset{\circ}{I}(V') \}$$

Def 3.3 $\widehat{\Omega} = \bigcup \Omega(V') \quad V': \text{special subspace}$

すると $\widehat{W}$ は $\widehat{\Omega}$ 上自然に作用する。

今、canonical projection $\widehat{\Omega} \xrightarrow{I_m} \widehat{I}$ と $\widehat{W} \rightarrow W$ に従って、projection $\widehat{\Omega}/\widehat{W} \xrightarrow{I_m} \widehat{I}/W$ が引きおこされる。このとき、 $S(x) = \overset{\circ}{I}(x)/_{W, x^*}$ とおくと、 $\widehat{I}/W = \bigcup S(x) \quad x: \text{special}$ となるので、同様に $\widehat{M} = \bigcup M(x) \quad x: \text{special}$ と stratify できる。明らかに $M(x) \xrightarrow{I_m} S(x)$ である。

$\widehat{\Omega}$ の topology を定義しよう。

Def 3.4 $\widehat{\Omega}$ の部分集合 U が、点 $\omega \in \Omega(V')$ の近傍であるとは、 U の部分集合 U' で、次の性質を持つものが存在することと言う。

1) $\omega \in U'$

2) $U' \cap \Omega$ は、 Ω の $\widehat{W}_\omega$ 不変な open convex subset
(但し $\widehat{W}_\omega$ は、 ω の $\widehat{W}$ -stabilizer)

$$3) \quad \Pi' \cap \Omega(V') = \pi_{V''}(\Pi' \cap \Omega) \quad \text{if } V'' \subset V'$$

すると、以下のことが成り立つ。

Prop 3.1 $\hat{M} = \hat{\Omega} / \hat{W}$ は、第=可算性を持つ Hausdorff, locally compact space である。

Th. (main theorem)

$\hat{M} = \hat{\Omega} / \hat{W}$ は、canonical に Stein manifold になり、 $M(X)$ の上に analytic structure を induce する。

$M(X)$ は、中でない X に対しては、 $\hat{M}$ 中 codimension が 2 より大きく。

Corollary $\hat{M}$ は、 M の holomorphic hull となる。

が示される。

§4. Main Theorem の証明

$\hat{M}$ 上の関数環を考えてみよう。

Def $P := \{x \in I, \langle x, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall \alpha \in B\}$ を W の weight
 と言う。 $P_+ := P \cap \bar{C}$, $P_{++} := P \cap C$
 $P^\vee = \{x \in I^\vee, \langle \alpha, x \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall \alpha \in B.\}$
 $P_+^\vee = P^\vee \cap \bar{C}^\vee$, $P_{++}^\vee = P^\vee \cap C^\vee$ とする。

この時、次の Proposition が成り立つ。

Prop 4.1 P_+^V の元 p と $\Omega(V)$ の点 ω に対し、次の級数 $S_p(\omega)$ を定義すると、これは $\Omega(V)$ 上広義一様収束する。

$$S_p(\omega) = \sum_{p' \in W(p), p'|V'=0} \exp(-2\pi i \langle \omega, p' \rangle)$$

Prop 4.2 $S_p(\omega)$ は $\hat{\Omega}$ 上 continuous で、 $\hat{W}$ -不変な関数である。

今、 P_+^V 全ての p に関して S_p を考えると、次が成り立つ。

Prop 4.3 $\{S_p \mid p \in P_+^V\}$ は $\hat{\Omega}$ の $\hat{W}$ -orbit を分離する。

以上の事により、定理の大部分が言える。即ち、

$\mathcal{O}$ を $\hat{M}$ 上の連続関数で、 $M(x)$ に制限すると各々 analytic になる関数のなす sheaf とする。今、 M の open subset U への $\mathcal{O}$ の section を、 U 上の holomorphic function と呼ぶと、 S_p は $\hat{M}$ 上の holomorphic function $\underline{S}_p$ を自然に定義する。

よって、今、次のことが言えている。

$$(i) \quad \overline{M(x)} = \bigcup_{x \subset x'} M(x')$$

(ii) $\hat{M}$ のすべての点の近傍系の基として、 M との intersection が connected なものがとれる。

(iii) M の任意の点 x は、近傍 U で、 $\mathcal{O}(U)$ が U の点を分離するようなものを持つ。

又、次の事もすぐに判る。

(iv) $M(x)$ 上への $\mathcal{O}$ の restriction は、 $M(x)$ の structure sheaf を induce する。

$\hat{M}$ は、第二可算性を持つ Hausdorff、locally compact space なので、以上の事から次の proposition が示される。

Prop 4.4 ringed space $(\hat{M}, \mathcal{O})$ は、normal analytic space である。分割 $\hat{M} = \bigcup M(x)$; x is special subset, は、 M の analytic stratification となっている。

ここで、次の Lemma を示す。 $p: \hat{\Omega} \rightarrow \hat{M} = \hat{\Omega}/\sim$ natural map.

Lemma. V の compact convex set K' と、 $\bar{C} \cap \bar{I}$ の compact convex subset K'' に対し、 $K = K' + iK''$ とおく。 $\hat{\Omega}$ の subset $\hat{K}$ を、 $\hat{K} \cap \Omega(V) = \pi_V(H(\hat{\omega} \cdot K))$ で定義する。但し、 $H(\hat{\omega} \cdot K)$ は、 $\hat{\omega} \cdot K$ の convex hull。すると、 $\hat{\Omega} - \hat{K}$ の各点 ω に対し、 $p^*\mathcal{O}$ のある section f があって、 $|f(\omega)| > \sup\{|f(\omega')| \mid \omega' \in \hat{K}\}$ 。

ところが、 $\hat{M}$ の任意のcompact subset L に対して、上の Lemma で作った K で、かつ $p(K)$ が L を含むものがある。よって $\hat{M}$ は holomorphic convex である。即ち、次の corollary が示された。

Corollary $(\hat{M}, \mathcal{O})$ は Stein space である。

よって、 $\hat{M}$ の非特異性を示せば定理が証明される。

W が Euclidean とは、対応する GCM が Euclidean type である事を言う。(c.f. 小池和彦氏の報告)

W が Euclidean でない時に、 $|B|$ による induction により、 $\hat{M}$ の非特異性を示そう。

$\hat{M}$ 中で、 $M(B)$ は最小次元の唯一の stratum である。従って、induction の仮定により、 $\hat{M} - M(B)$ は非特異である。よって、 $\hat{M}$ が $M(B)$ の任意の点 ω で非特異ならばよい。

$\mathcal{O}'_{\omega}$ を、 $\{Sp(p \in P_{+}^{\vee})\}$ で生成された、 $\mathcal{O}_{\omega}$ の subring であるとする。すると、 $\mathcal{O}'_{\omega}$ は ω の適当な近傍の各点を分離する。従って、 $\mathcal{O}'_{\omega}$ が regular ring である事を示せば十分である。

さて、 $F_B^{\vee} = \{p \in V^* \mid \langle \alpha, p \rangle = 0 \text{ for } \forall \alpha \in B\}$ とおき、 A_0 を、 $\{Sp(p \in F_B^{\vee})\}$ により生成された、 $\mathcal{O}_{\omega}$ の sub-algebra とする。 A_0 の ω で定義された maximal ideal を m_0 とし、 m_0 による A_0 の完備化を $\hat{A}_0$

と書く。今、 $\{Sp; p \in P_+^V - F_B^V\}$ と m_0 で生成した ideal は $\mathcal{O}_\omega$ の maximal-ideal になるが、これによる $\mathcal{O}_\omega$ の完備化を $\hat{\mathcal{O}}_\omega$ と書こう。すると、exponential type の不変式論の拡張により、次の proposition が得られる。

Prop 4.5 W を non-Euclidean type の Weyl 群とすると、上の $\mathcal{O}_\omega$ について、次が言える。

$$\hat{\mathcal{O}}_{\omega'} = \hat{A}_0[x_1, \dots, x_l] \quad l = |B|$$

$\hat{A}_0$ は regular であるから、特に、 $\mathcal{O}_\omega$ が regular である事が判った。 W が Euclidean の時には別に考察して、次が示される。

prop 4.6. Generalized Weyl group W に対して作った $\hat{\mathcal{M}}$ は、一般に非特異である。

よって定理が示された。

§5. Singularity の応用

今、 $W \xrightarrow{\det} \{\pm 1\}$ の kernel を W_+ と書く。この W_+ に対して、

$\hat{W}_+ := \pi(Q) \cdot W_+$ と定義すると、これは Ω と $\hat{\Omega}$ に作用する。

$\mathcal{M}_+ := \Omega / \hat{W}_+$, $\hat{\mathcal{M}}_+ := \hat{\Omega} / \hat{W}_+$ と定義する。

この時 $\hat{\mathcal{M}}_+ \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}$ (canonical map) は、2層の branched covering となり、 $\hat{\mathcal{M}}_+$ は Stein space の構造を持つ。 $\hat{\mathcal{M}}_+$ の singularity

について考察しよう。

$\hat{M}_+$ の関数環 $\mathcal{O}_+$ は、 W の反不変環と思えるが、 $\hat{M}$ の関数環 $\mathcal{O}$ 上で、一つの生成元 J によって自由生成される。

今、 p_0^v を B のすべての元 α に対して $\langle \alpha, p_0^v \rangle = 1$ となるような p^v の一つの元として、これを取り fix する。

Δ を $W \cdot B$ とし、この元を root (real root と呼び、こどももある。) と呼び、 Δ の元で $\mathbb{C}^v$ 上 positive なものの全体を Δ_+ と書く。この時、生成元 J として次のものが与えられる。

$$J(\omega) := \exp(-2\pi i \langle \omega, p_0^v \rangle) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - \exp(2\pi i \langle \omega, \alpha^v \rangle))$$

この時、branched covering $\hat{M}_+ \rightarrow M$ の discriminant D は、 J^2 で定義される。

例 $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $uv > 4$ とする。 $M(B) = \{*\} = 1$ 点。

この時、 $\hat{M}_+$ は M 上、次の方程式で与えられる。

$$Z^2 = X_1^{u+2} + X_1^2 X_2^2 + X_2^{v+2} \quad (\text{Mod}[\max(u+2, v+2)\text{ 次の項}])$$

変数変換により、これは Cusp singularity $T_{2, u+2, v+2}$ で、定義式は $Z^2 = X_1^{u+2} + X_1^2 X_2^2 + X_2^{v+2}$ であることが判る。