

Countable size counterexamples for Tamamo's problem concerning stratifiable κ -metrizable spaces

作新学院大学経営学部 酒井 政美 (Masami Sakai)

玉野氏は論文[5]の中で「 κ -metrizable Lašnev space は metrizable」であることを証明し、次の自然な問題を提出した。stratifiable space については[2]を、また κ -metrizable space については[3]を参照。

問題1. stratifiable κ -metrizable space は metrizable か?

この問題に対しては既に反例が知られており、論文[4]の中で first countable, stratifiable, κ -metrizable space であるけれども metrizable ではない空間が構成されている。ここで注目したのはこの反例が first countable という点である。つまり問題1は否定的であるが、少なくとも first countable になるという可能性は残されている。そこで次の自然な問題が生じる。

問題2. stratifiable κ -metrizable space は first countable か?

本稿ではこの問題2 に対しても反例が存在することを示したい。実際、次の条件を満たす空間 M が存在する。

Example. 次の条件を満たす空間 M が存在する。

1. 可算濃度で、孤立点はただひとつ。故に M は stratifiable,
2. κ -metrizable,
3. non-trivial な収束点列をもたない。故に M は first countable ではない。

構成した空間が κ -metrizable であることを示すために次の定理を利用する。集合 Y に対して、 $\mathcal{P}(Y)$ を Y の部分集合全体からなる集合とする。

定理 空間 X は $X = Y \cup \{p\}$ と表され、 Y の各点は X の孤立点であり、 p は孤立点ではない X の G_δ -point とする。このとき次は同値。

- (1) X は κ -metrizable,
- (2) 次の条件を満たす写像 $\varphi: \mathcal{P}(Y) \rightarrow [1, \omega]$ が存在する。

- (a) 各 $F \in \mathcal{P}(Y)$ に対して, F が X で閉集合であることと $\varphi(F) < \omega$ が同値,
 (b) $F_1 \subset F_2$ ならば $\varphi(F_1) \leq \varphi(F_2)$,
 (c) $\mathcal{P}(Y) \supset \{F_\alpha : \alpha < \tau\}$ が "increasing" であり, 各 $\alpha < \tau$ に対して $\varphi(F_\alpha) = \alpha < \omega$ であれば $\varphi(\bigcup_{\alpha} F_\alpha) = \tau$.

Example の構成

T を 0 または 1 からなる有限列全体からなる集合とし, $C = \{0, 1\}^\omega$ を Cantor 集合とする。各 $t \in T$ に対して $U(t) = \{f \in C : t \subset f\}$ とおく。このとき $\mathcal{U} = \{U(t) : t \in T\}$ は空でない clopen set からなる C の base となる。 $\mathcal{V}$ を C の clopen set 全体からなる集合とすると, $\mathcal{V}$ は可算であるから $\mathcal{V} = \{V_0 = \emptyset\} \cup \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ とかける。

$C_p(C; \{0, 1\})$ を C から $\{0, 1\}$ への連続関数全体に各点収束位相をいれた空間とする。 $C_p(C; \{0, 1\})$ の元と $\mathcal{V}$ の元は 1 対 1 に対応するから $C_p(C; \{0, 1\}) = \{f_0\} \cup \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$ とかける。ここで, f_0 は 0 への定値関数, また $f_m = \chi_{V_m}$ (V_m 上の特徴関数) である。

$C_p(C; \{0, 1\})$ において, f_0 の近傍系はそのままにして f_0 以外の各 f_m を孤立点にした空間を L とおく。

Claim L は k -metrizable。

(証明の概略) 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して, $V_m = \bigcup \mathcal{U}_m$ となる $\mathcal{U}$ の有限

部分集合 U_m を固定する。各 $A \subset \mathbb{N}$ に対して $L(A) = \{f_m : m \in A\}$ とおき、
 $Y = L(\mathbb{N})$ とおく。写像 $\varphi : \mathcal{P}(Y) \rightarrow [1, \omega]$ を次のように定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \varphi(\emptyset) = 1, \\ \bullet \varphi(L(A)) \leq \kappa < \omega \iff \text{ある } (U_m)_{m \in A} \in \prod_{m \in A} U_m \text{ が存在して,} \\ \quad \{U_m : m \in A\} \text{ の disjoint 部分集合は高々 } \kappa. \end{array} \right.$$

このとき φ は定理の (a)(b)(c) を満たし、 L は κ -metrizable となる。

論文 [1] により、 $C_p(C; \{0, 1\})$ は Fréchet にはならないことが知られている。故に $C_p(C; \{0, 1\})$ の部分集合 E で、 $f_0 \in \bar{E} - E$ を満たし、しかも E は f_0 への non-trivial な収束点列をもたないものがとれる。 $\pi : L \rightarrow C_p(C; \{0, 1\})$ を恒等写像とすれば、 $M = \pi^*(\{f_0\} \cup E)$ が求める空間である。

References

- [1] J. Gerlits and Zs. Nagy, Some properties of $C(X)$, I, Topology Appl. 14 (1982) 151-161.
- [2] G. Gruenhage, Generalized metric spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology (K. Kunen and J.E. Vaughan, eds.), North-Holland, 1984.

- [3] E.V. Ščepin, On κ -metrizable spaces, Math. USSR Izvestija 14 (1980) 407-440.
- [4] J. Suzuki, K. Tamano and Y. Tanaka, κ -metrizable spaces, stratifiable spaces and metrization, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989) 500-509.
- [5] K. Tamano, Closed images of metric spaces and metrization, Topology Proc. 10 (1985) 177-186.