

確率論における BMO

秋田大教育 塩田 安信

(Yasunobu Shiota)

John-Nirenberg により導入された BMO (bounded mean oscillation) の概念は, 七十年初頭, Gettoor-Sharpe, Garcia によってマルティンゲール理論に移入された。その後, この方面の研究は急速に進み今日に至っている。

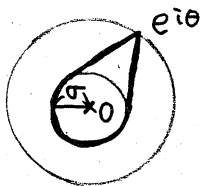
本稿では BMO 函数から BMO マルティンゲールかどのまうにして構成されるかを, Gettoor-Sharpe の論文に沿って解説する。それから BMO マルティンゲールの特徴付けに関する結果について述べる。

§1. H^p -function と H^p -martingale

1. u を harmonic function on $D = \{ |z| < 1 \}$ とする。このとき $\exists$ harmonic conjugate $\tilde{u} : \tilde{u}(0) = 0$ で $F = u + i\tilde{u}$ が analytic on D , とするときは良く知られている。この u に対して non-tangential maximal function :

$$N_\sigma u(e^{i\theta}) \equiv \sup \{ |u(z)| : z \in \Omega_\sigma(\theta) \}.$$

$\exists$ $0 < \sigma < 1$, $e^{i\theta} \in \Gamma = \partial D$ で $\Omega_\sigma(\theta)$ は Stolz domain (F. & S.) である。



$(B_t)_{t \geq 0}$, $B_0 \equiv 0$ を, ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の complex B.M. とし, stopping time

$$\tau(\omega) \equiv \inf \{ t > 0 : |B_t(\omega)| = 1 \}$$

とする。このとき, u の Brownian maximal function

$$u^*(\omega) \equiv \sup \{ |u(B_t(\omega))| : 0 \leq t < \tau(\omega) \}.$$

analytic function F on D が H^p -function ($0 < p < \infty$) とは

$$\|F\|_{H^p} \equiv \sup_{r < 1} \left[\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\mathbf{m}(\theta) \right]^{1/p} < \infty$$

なること。ただし, $d\mathbf{m}(\theta)$ は Γ 上の normalized Lebesgue measure.

2. Burkholder-Gundy-Silverstein (1971) の結果, u を harmonic on D とし, $F = u + i\tilde{u}$ とする。 $0 < \sigma < 1$ なる各 σ に対し,

$\forall \lambda > 0$ に対して $\exists$ const. C_σ, C_σ :

$$\begin{aligned} & C_\sigma m\{e^{i\theta} : N_\sigma u(e^{i\theta}) > \lambda\} \\ & \leq P\{\omega : u^*(\omega) > \lambda\} \leq C_\sigma m\{e^{i\theta} : N_\sigma u(e^{i\theta}) > \lambda\}. \end{aligned}$$

このとき明らかに

$$\|u^*\|_{L^p(\Omega)} \cong \|N_\sigma u\|_{L^p(\Gamma)}, \quad 0 < p < \infty.$$

B-G-S は $N_\sigma u$ を u^* で置きかえて評価することにより

$\exists \text{ const. } C_{\sigma,p}, C_{\sigma,p} :$

$$(1) \quad C_{\sigma,p} \|N_{\sigma} u\|_{L^p(\Gamma)} \leq \|F\|_{HP} \leq C_{\sigma,p} \|N_{\sigma} u\|_{L^p(\Gamma)}, \quad 0 < p < \infty$$

を導いた。即ち,

$$\|F\|_{HP} \cong \|N_{\sigma} u\|_{L^p(\Gamma)} \cong \|u^*\|_{L^p(\Omega)}.$$

なお(1)で左側の不等式は Hardy-Littlewood により, すでに示されており, 右側に ついても $p > 1$ のときは M. Riesz の定理から簡単に導くことが出来るという事を注意しておく.

3. B-G-S の結果をもとにして, H^p -function から H^p -martingale を導き出す. ただし p は $1 \leq p < \infty$ としておく.

$\tilde{B}_t \equiv B_{t \wedge \tau}$ (stopped B.M.) とし, $\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{\tilde{B}_s : 0 \leq s \leq t\}$ とする.

$F = u + i\tilde{u} \in H^p$ に対して

$$X_t(\omega) \equiv u(\tilde{B}_t(\omega))$$

とおくと, Doob の良く知られた結果より $\{X_t; t \geq 0\}$ は $\mathcal{F}_t$ -martingale となり, さらに B-G-S の結果を用いれば

$$(2) \quad X^*(\omega) \equiv \sup_{t \geq 0} |X_t(\omega)| \in L^p(\Omega)$$

となることがわかる。また

$$X_t \rightarrow X_{\infty} = \phi(B_{\tau}) \text{ a.s.}, \quad \phi : u \text{ の boundary function}$$

で, 特に

$$(3) \quad X_{\infty} \text{ は } \sigma\{B_{\tau}\}\text{-measurable}$$

となる。

逆に $\{X_t, t \geq 0\}$ が (2), (3) をみたす $\mathcal{F}_t$ -martingale とすれば,

(3) より $\exists$ real measurable function ϕ on Γ : $X_n = \phi(B_n)$, として $X_n \in L^p(\Omega)$ より $\phi \in L^p(\Gamma)$ である。このとき

$$u(re^{i\theta}) \equiv \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\psi}) P(r, \theta - \psi) dm(\psi)$$

とすると, u は harmonic on D で $X_t = u(\widehat{B}_t)$ となることが示せる。従って (2) より $u^* \in L^p(\Omega)$ で B-G-S の結果より $F \in H^p$ がわかる。

§ 2. BMO-function と BMO-martingale

1. $I \subset \Gamma$ を subarc とし, f を Γ 上の function とする。

f の I 上での平均を

$$I(f) \equiv \frac{1}{m(I)} \int_I f dm$$

で定める。 $f \in L^2(\Gamma)$ が BMO-function on Γ とは

$$(1) \quad \sup_{I \subset \Gamma} I(|f - I(f)|) < \infty$$

をみたすこと。ただし $\sup$ は Γ のすべての subarc I について取る。(1) が任意の $p \geq 1$ に対して、条件

$$\sup_{I \subset \Gamma} I(|f - I(f)|^p) < \infty$$

と同値なことは John-Nirenberg の不等式

$$m\{e^{i\theta} \in I : |f(e^{i\theta}) - I(f)| > \lambda\} \leq m(I) e^{-c\lambda}$$

から導ける。BMO 函数については Fefferman-Stein によって詳細な研究がなされているが、それについては内山氏の講演録を参照して下す。

2. f を BMO-function とする.

$$u(z) \equiv \int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) P(r, \theta - \psi) dm(\psi), \quad z = re^{i\theta} \in D$$

とし, $X_t \equiv u(\tilde{B}_t)$ とおく. $f \in L^2(\Gamma)$ より $u + i\tilde{u} \in H^2$ で, 前節の z とより $\{X_t; t \geq 0\}$ は $\mathcal{F}_t$ に関する H^2 -martingale で

$$X_t \rightarrow X_\infty = f(\tilde{B}_\infty) \text{ a.s.},$$

$$(2) \quad X_\infty \text{ は } \sigma\{\tilde{B}_\infty\}\text{-measurable で } X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t]$$

が言える. さうに (1) に ついては

(1)

$$\longleftrightarrow \sup_{z \in D} P((f - Pf(z))^2) < \infty$$

$$\longleftrightarrow \sup_{z \in D} E_z[(f(\tilde{B}_\infty) - u(z))^2] < \infty \quad (\text{角谷の定理による})$$

$$\longleftrightarrow \sup_{t \geq 0} \|E[(f(\tilde{B}_\infty) - u(\tilde{B}_t))^2 | \mathcal{F}_t]\|_\infty < \infty \quad (\text{強 Markov 性による})$$

と同値変形ができる. 即ち,

$$(3) \quad \sup_{t \geq 0} \|E[(X_\infty - X_t)^2 | \mathcal{F}_t]\|_\infty < \infty$$

が言える (詳細は Petersen の本を参照のこと).

逆に, $\{X_t; t \geq 0\}$ が (2), (3) をみたす $\mathcal{F}_t$ -martingale とすると上の変形が同値なことから, $\exists$ BMO-function f on $\Gamma: X_\infty = f(\tilde{B}_\infty)$ 従って $X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t] = u(\tilde{B}_t)$ が言えるから, Γ 上の BMO-function 全体と (2), (3) をみたす $\mathcal{F}_t$ -martingale の間には一対一の対応が存在する.

§ 3. BMO-martingale (一般の場合)

1. § 1, 2 で得られた結果を基にして、一般の確率空間において H^p および BMO-martingale を定義する.

• $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: complete probability space とし, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を $\mathcal{F}$ の sub- σ -field の右連続増大列で $\mathcal{F} = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ なるものとする.

• unif. integrable martingale $X = (X_t)$ の path は一般に、右連続で左極限をもつ。また $X = (X_t)$ とその terminal r. v. $X_\infty \in L^1(\Omega)$ を同一視する.

• T で $\mathcal{F}_t$ -stopping time を表わす.

unif. integrable martingale $X = (X_t)$ が BMO-martingale とは

$$\|X\|_{\text{BMO}} \equiv \sup_T \|E[|X_\infty - X_T| | \mathcal{F}_T]\|_\infty < \infty$$

なること。BMO-martingale 全体を BMO で表わす。定数だけ異なる二つの BMO-martingale を同一視すれば、BMO は $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$ で normed space となる。

2. BMO-martingale に関する諸結果.

(a) John-Nirenberg 型の不等式, $\alpha < 1/8 \|X\|_{\text{BMO}}$ ならば

$$\sup_T \|E[\exp \alpha |X_\infty - X_T| | \mathcal{F}_T]\|_\infty < \infty.$$

(b) (a) より $\forall p > 1$ に対し

$$\|X\|_{\text{BMO}} \cong \|X\|_{\text{BMO}, p} \equiv \sup_T \|E[|X_\infty - X_T|^p | \mathcal{F}_T]\|_\infty^{1/p}$$

が導ける。 $p = 2$ のときこの右辺は連続な martingale に対し § 2.(3) 式と一致する。

(c) Herz-Lepingle 表現. $X \in \text{BMO}$ とする. このとき, non-adapted process $B = (B_t)$ (必ずしも一意ではない) が存在して

$$\text{i) } \int_0^M |dB_s| \leq C \text{ for some const. } C,$$

$$\text{ii) } X_M = A_M, \text{ 且 } A \text{ は } B \text{ の dual optional projection.}$$

(d) 双対定理. $H' \equiv \{ \text{unif. integrable martingale } X = (X_t) : \|X\|_{H'} \equiv E[X^*] < \infty \}$ とすると

$$(H')^* \cong \text{BMO}.$$

従って BMO が Banach space ということがわかる。

3. 上の (c) で用いた dual optional projection について説明しよう. 詳しくは Dellacherie - Meyer の本を参照のこと.

(a) H を bounded measurable process とすると $\exists$ optional process oH :

$${}^oH_T I_{\{T < \infty\}} = E[H_T I_{\{T < \infty\}} | \mathcal{F}_T] \text{ for every } T.$$

oH を H の optional projection という。

(b) $B = (B_t)$: process of integrable variation (non-adapted) に対して

$$\mu(H) \equiv E\left[\int_0^M H_s dB_s\right], \quad H: \text{bdd. meas. proc.}$$

とすると, μ は $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ 上の bounded signed measure で evanescent set を charge しない。

逆にこのような measure μ が与えられたとき $\exists$ process of integrable variation $B = (B_t)$ で, μ は上の形に表わせる。

(c) μ に associate した process $B = (B_t)$ が adapted

$$\longleftrightarrow \mu({}^oH) = \mu(H), \quad H: \text{bdd. meas. proc.}$$

(d) μ に associate した process を $B = (B_t)$ とする。このとき新たに measure μ^0 を

$$\mu^0(H) \equiv \mu(^0H) = E\left[\int_0^\infty H dB\right]$$

により定める $\mu^0(H) = \mu(^0H)$ なる (b), (c) より $\exists$ adapted process of integrable variation $A = (A_t) : \mu^0(H) = E\left[\int_0^\infty H dA\right]$.
この A を B の dual optional projection とする。

§ 4. BLO-martingale と A_1 -条件

1. unif. integ. mart. $Y = (Y_t)$ が BLO-martingale とは

$$\exists C > 0 : Y_T - Y_\infty \leq C, |\Delta Y_T| \leq C \text{ a.s. for every } T$$

なること。BLO-mart. の全体を BLO で, positive BLO-mart. の全体を BLO_+ で表わす。

2. BLO に関する結果.

(a) $Y \in BLO$ with a const. C ならば $\|Y\|_{BMO} \leq 3C$. $Y \in BLO$ でも $-Y \in BLO$ とは限らないから BLO は BMO の subspace ではない。

(b) $X \in BMO$

$$\longleftrightarrow \exists Y^1, Y^2 \in BLO_+ \text{ (必ずしも一意ではない)} : X = Y^1 - Y^2.$$

以下 $(\tilde{a}_t)_{t \geq 0}$ は, すべての $\tilde{a}_t$ -martingale が連続となるものと仮定する。

(c) $X \in BMO \longrightarrow X^* \in BLO_+.$

$$(d) \quad Y \in BLO_+ \longrightarrow Y^* - Y_\infty \in L^\infty,$$

$$Y^* - Y_\infty \in L^\infty \longrightarrow Y \in BLO.$$

(c), (d) より

$$(e) \quad Y \in BLO_+ \longrightarrow \exists X \in BMO: Y_\infty = X^* + \text{bounded r.v.},$$

$$\exists X \in BMO: Y_\infty = X^* + \text{bounded r.v.} \longrightarrow Y \in BLO.$$

3. positive unif. integ. mart. $W = (W_t)$ が A_1 -条件をみたす

$(W \in A_1) \Leftrightarrow$ は

$$\exists C > 0: W_T \leq C W_\infty \text{ a.s. for every } T.$$

S^+ -条件をみたす $(W \in S^+) \Leftrightarrow$ は

$$\exists C > 0: W_T \leq C W_{T-} \text{ a.s. for every } T.$$

A_1 -条件に ついては 実解析の とまに 対応して 次の こと が 言える。

(a) (内山, Doleans-Dade and Meyer) $E[W_\infty] = 1$ とす べし, $Q \equiv W_\infty P$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の p.m. この とま

$$W \in A_1 \iff \lambda Q(X^* \geq \lambda) \leq K E_Q[X_\infty] \text{ for every positive unif. integ. mart } X, \lambda > 0.$$

(b) reverse Hölder inequality (Doleans-Dade and Meyer)

$W \in A_1 \cap S^+ \Leftrightarrow$ とす と

$$\exists \varepsilon, C > 0: E[W_\infty^{1+\varepsilon} | \mathcal{F}_T] \leq C W_T^{1+\varepsilon} \text{ a.s. for every } T.$$

(b) は も と 弱 い 仮定 の 下 で 言える。 詳し い こと は D.-M. の 論文 を 見よ。

A_1 -条件は次のことより BLO と結びつけられる.

$$(c) \quad Y \in BLO_+ \longleftrightarrow W_t = E[\exp \alpha Y_\infty | \mathcal{F}_t] (\geq 1) \in A_1 \cap S^+ \\ \text{for some } \alpha > 0.$$

$W \geq 1$ の条件を除けば $Y \in BLO$.

$$(d) \quad W(\geq 1) \in A_1 \cap S^+ \text{ とすると}$$

$$0 < \exists \delta < 1, \exists \text{ unif. integ. mart. } M(\geq 1), E[(M^*)^\delta | \mathcal{F}_t] \in S^+,$$

$$\exists H \in L^\infty, 0 < C_1 \leq H \leq 1 : W_\infty = (M^*)^\delta H.$$

逆も $W \geq 1$ を除いて成り立つ.

(c), (d) により

$$(e) \quad Y \in BLO_+ \text{ とすると}$$

$$\exists \text{ const. } a > 0, \exists \text{ unif. integ. mart. } M(\geq 1),$$

$$E[(M^*)^\delta | \mathcal{F}_t] \in S^+ \text{ for some } 0 < \delta < 1, \exists H \in L^\infty_+ :$$

$$Y_\infty = a \log M^* + H$$

逆に, $Y_\infty = a \log M^* + H$ で a, M, H が上の条件を満たすならば
 $Y \in BLO$.

参考文献

1. C. Bennett, Another characterization of BLO, Proc. of A.M.S. 85, 552 - 556
2. Burkholder, Gundy and Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p , Trans. A.M.S. 157, 137-153

3. Coifman and Rochberg, Another characterization of BMO,
Proc. of A.M.S. 79, 249 - 254.
4. Dellacherie et Meyer, Probabilites et Potentiels II,
Herman, Paris.
5. Doléans-Dade and Meyer, Inégalités de normes avec poids,
Sem. de Proba. XIII, L.N. in Math. 721, 313 - 331
6. Garia, Martingale inequalities: Seminar note on
recent progress, Benjamin
7. Gettoor and Sharpe, Conformal martingales, Inventiones
Math. 16, 271 - 308
8. 風巻, マルティンゲールの理論, 確率論セ三一
9. Petersen, Brownian motion, Hardy spaces and bounded
mean oscillation, Cambridge Univ. press
10. Shiota, Certain decompositions of BMO-martingales,
Tohoku Math. J. 33, 561 - 565
11. Uchiyama, Weight functions on probability spaces,
Tohoku Math. J. 30, 463 - 470
12. Varopoulos, The Helson-Szegö Theorem and A_p -Functions
for Brownian motion and Several variables, J. of
Funct. Anal. 39, 85 - 121