

抽象コーシー問題について

早大 理工 実方宣洋

§1. 序

Banach 空間における有界線型作用素の作る強連続半群 (以下半群と略記) の生成作用素を抽象コーシー問題 (ACP) の立場から特徴付ける問題は, Phillips の研究 ([2] 参照) に始まり, その後 [4], [6], [10], [12] などの研究がある。これらの研究において取扱われた ACP は, 半群の意味で適切 (S.f. well posed, [11] 参照) な問題であった。本稿では主に S.f. well posed ではない ACP を考察する。本稿で ACP による特徴付けを試みる作用素族は最近 [8] により導入された。これらの作用素族は [5] により導入された超函数半群 (R.D.S.f.) と密接な関係を持つが, この関係及び本稿で必要な事柄は §2 において要約されている。詳細は, [1], [5], [8], [9], [14] を参照されたい。§3 では本稿の主な結果とその証明が述べられている。ここで扱われる ACP は S.f. well posed ではなく, 従って ACP の解の増大 order は制限を受けないため, 普通の意味

のラプラス変換を用いる事ができない。尚、この節の内容は [12] では触れなかったので、やや詳しく述べたい。又 ACP の定義も [12] とはやや異なる形にする。X を Banach 空間とし A をその中の線型作用素とする。

定義 1.1. $0 < T \leq \infty$, $x \in X$, $u(t) = u(t; x) : [0, T) \rightarrow X$

とする。このとき $u(t)$ が条件 (i) $u(t) \in C^1([0, T); X)$ (or $u(t) \in C([0, T); X) \cap C^1((0, T); X)$), (ii) $u(0; x) = x$, (iii) $u(t) \in D(A)$ & $u'(t) = Au(t)$ for $t \in (0, T)$, をみたすならば $u(t)$ は $(ACP; T, x)$ (or $(ACP_1; T, x)$) for A の解であると言う。

ここで ACP, ACP_1 という二つの抽象コーシー問題が定義されたが、これは §4 で得られる (C_k) 半群の生成作用素 (定義は [8] 又は本稿 §2 を参照) の抽象コーシー問題による特徴付けが二通り考えられるからである。尚、§4 の内容は [12] で述べたので、ここでは結果と二、三の注意を述べるに止め、証明は省略した。又、本稿を通して作用素 A は *resolvent set* $\rho(A) \neq \emptyset$ なるもののみを扱うが、 $\rho(A) = \emptyset$ の場合については [4], [6], [7], [10], [15] などの研究がある。

§2. Preliminaries.

$\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ を 半群, 即ち条件 $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ for $t, s \geq 0$, 及び $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x$ は連続 for $\forall x \in X$ をみたすとする。このとき $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ の type $\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|T(t)\|$,

infinitesimal generator (i.g.) A_0 ; $A_0 x = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(T(h)x - x)$, $D(A_0) = \{x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(T(h)x - x) \text{ exists}\}$, continuity set $\Sigma = \{x \in X; \lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x\}$, $\Sigma \supset X_0 = \bigcup_{t \geq 0} T(t)(X)$ が定義される。 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 上の仮定を置く。

$$(\alpha) \quad \overline{X_0} = X$$

$$(\beta) \quad \exists \omega_1 > \omega_0 \text{ が存在して, } \forall \lambda > \omega_1 \text{ に対して } \exists R(\lambda) \in \mathcal{B}(X) \text{ が存在して, } R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \text{ for } x \in X_0.$$

$$(\gamma) \quad R(\lambda)x = 0 \text{ for } \lambda > \omega_1 \text{ ならば } x = 0.$$

以上の仮定の下で A_0 は closable; $\overline{A_0} = A$ を $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ の complete infinitesimal generator (c.i.g.) と呼ぶ。さらに $\rho(A) \supset \{\lambda > \omega_1\}$ であり、 $R(\lambda) = R(\lambda; A)$ ($= A$ の resolvent) が示される ([8] 参照)。

定義 A. ([8]). $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ をみたす半群として、 A をその c.i.g. とする。このとき整数 $k \geq 0$ が存在して、 $D(A^k) \subset \Sigma$ ならば、 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ を class (C_k) の半群と呼ぶ。

A が $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in (C_k)$ の c.i.g. となる必要十分条件は、 $\overline{D(A)} = X$ と、次の二条件が成立することである。

$$(2.1) \quad \begin{cases} \text{ある } \omega_0 \in \mathbb{R}, \omega > \omega_0 \text{ が存在し, } \rho(A) \supset \{\lambda > \omega_0\} \\ \text{かつ } \forall T > 0 \text{ に対して } M_T > 0 \text{ が存在して,} \\ \sup \{ \|\lambda^n R(\lambda; A^n)x\|; 0 \leq n/\lambda \leq T, \lambda \geq \omega, n=1,2,\dots \} \leq M_T \|x\|_k \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } M_\varepsilon > 0 \text{ が存在し, 又 } \forall x \in D(A^k) \text{ に対して} \\ \exists \lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, x) > \omega \text{ が存在して,} \end{cases}$$

$$\left\{ \sup \{ \| \lambda^n R(\lambda; A)^n x \|; \varepsilon \leq n/\lambda \leq \varepsilon^{-1}, \lambda \geq \lambda_0, n=1,2,\dots \} \leq M_\varepsilon \| x \| \right.$$

ここで, $\| x \|_k \equiv \| x \| + \| Ax \| + \dots + \| A^k x \|$. さらに対応 $A \leftrightarrow \{ T(t) \}_{t \geq 0}$ は一対一, 又 $\{ T(t) \}_{t \geq 0}$ は指数公式, $T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{t}{n} A)^n x$ for $t \geq 0, x \in D(A^k)$ により生成される ([8] 参照).

ここで $\overline{D(A)} = X$ なる閉作用素 A に対して条件 (2.1) のみを仮定してみる. この条件下で指数公式

$$(2.3) \quad u(t; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{t}{n} A)^n x$$

は $t \geq 0, x \in D(A^k)$ に対して収束し, $x \in D(A^{k+1})$ とすれば $u(t; x)$ は $(ACP; \infty, x)$ for A の一意解を与えている ([13] 参照). しかし一般には条件 (2.1) のみでは, ACP for A は S.F. well posed ではない. 次に, さらに条件 (2.2) を仮定すると A は半群 $\{ T(t) \}_{t \geq 0} \in (C(k))$ の c.i.g. となる. A と $\{ T(t) \}_{t \geq 0}$ との間には次の関係がある ([8] 参照).

$$(a) \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^l T(t)x = A^l T(t)x = T(t) A^l x, \text{ for } x \in D(A^l), t > 0, l=1,2,\dots$$

$$(b) \quad T(t)x - x = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^t A T(s)x ds \quad \text{for } x \in D(A^k)$$

$$(c) \quad T(t)x - x = \int_0^t A T(s)x ds \quad \text{for } x \in D(A^{k+1}).$$

(b) (or (c)) より $\forall x \in D(A^k), k \geq 1$, (or $x \in D(A^{k+1}), k \geq 0$), $t \geq 0$ に対して, $u(t; x) = T(t)x$ は $(ACP_1; \infty, x)$ (or $(ACP; \infty, x)$) for A の一意解を与え, さらに (a) より $u(t; x) \in D(A^k)$ (or $u(t; x) \in D(A^{k+1})$) for $t \geq 0$ が示される.

条件 (2.1) をみたす $\overline{D(A)} = X$ なる作用素 A は, X 上の

R.D.S. 的 infinitesimal generator (i.g.) となるが、逆に R.D.S. 的 i.g. は必ずしも (2.1) をみたさない。そこで [8] [9] では条件 (2.1) を変型して、R.D.S. 的 i.g. を特徴付けている。

定理 B. A を線型作用素、又 $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ を seminorm 系 $\{\|\cdot\|_n; n=1, 2, \dots\}$ により位相を導入された局所凸空間とする。次の A に対する 4 条件は同値である。

(I) $\rho(A) \supset \{\lambda \geq \omega\}$ for some $\omega \in \mathbb{R}$, $\overline{D(A)} = X$ かつ $\forall T > 0$ に対してある整数 $k(T) \geq 0$ 及び実数 $C = C_T > 0$ が存在して、

$$\sup \{ \|\lambda^n R(\lambda; A^n)x\|; 0 \leq n\lambda \leq T, \lambda \geq \omega, n=1, 2, \dots \} \leq C \|x\|_{k(T)}$$
for $\forall x \in D(A^{k(T)})$.

(II) $\rho(A) \neq \emptyset$, $\overline{Y} = X$ かつ A の Y への制限 $A|_Y$ は Fréchet 空間 Y 上のある局所同等連続半群の i.g. ([3] 参照)。

(III) A は X 上のある R.D.S. 的 i.g. ([5] 参照)。

(IV) $\overline{D(A)} = X$ かつ A の resolvent set $\rho(A)$ はある複素平面上の領域、

$$(2.4) \quad \Omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha_0 \log |\operatorname{Im} \lambda| + \beta_0, \operatorname{Re} \lambda \geq \omega_0\}$$

を含み、 A の resolvent $R(\lambda; A)$ は、ある m と $C > 0$ が存在して、

$$(2.5) \quad \|R(\lambda; A)\| \leq C (1 + |\lambda|)^m \quad \lambda \in \Omega$$

をみたす。

ここで (III) $\Leftrightarrow$ (IV) は Chazarain [1], (II) $\Leftrightarrow$ (III) は Ushijima [14] により示され, (I) $\Rightarrow$ (II) 及び (IV) $\Rightarrow$ (I) はそれぞれ Oharu [8], [9] の中で証明された。

条件 (I) の下で, $\forall T > 0$ に対して対応する $k(T) \geq 0$ をとれば指数公式 (2.3) は $0 \leq t \leq T$, $x \in D(A^{k(T)})$ に対して収束し, $x \in D(A^{k(T)+1})$ ならば $u(t; x)$ は $(ACP; T, x)$ for A の一意解を与え, さらに $u(t; x) \in C^1([0, T]; X)$ である ([8])。

§3. S.G. well posedでない ACP について。

命題 3.1. A を $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \neq \emptyset$ なる作用素とする。このとき $\forall T > 0$ に対して, 整数 $k(T) \geq 0$ が存在して, $\forall x \in D(A^{k(T)+1})$ に対して $(ACP; T, x)$ for A の一意解 $u(t; x)$ が存在したと仮定するならば, A は, $\forall T > 0, \forall \varepsilon > 0$, 1 に対して $M_{T, \varepsilon} > 0$ が存在して,

$$(3.1) \quad \sup \{ \| \lambda^n R(\lambda, A)^n x \|; 0 \leq \lambda \leq T - \varepsilon, \lambda \geq \omega, n = 1, 2, \dots \} \leq M_{T, \varepsilon} \| x \|_{k(T)}$$

for $\forall x \in D(A^{k(T)})$ をみたし, 解は指数公式 (2.3) ($0 \leq t < T$, $x \in D(A^{k(T)+1})$) で表現される。ここで (3.1) における $k(T)$ は, 命題の仮定の $k(T)$ と同一整数。

定理 3.2. A を $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \neq \emptyset$ なる作用素とし, $k \geq 0$ を整数とする。このとき $\forall x \in D(A^{k+1})$ に対して, $(ACP; \infty, x)$ for A の一意解 $u(t; x)$ が存在したと仮定するならば, A は (2.1) をみたし, 解は指数公式 (2.3) ($0 \leq t < \infty$,

$x \in D(A^{k(t)})$) で表現される。ここで (2.1) における k は定理の仮定にある k と同一整数。

命題 3.1 は定理 A の条件 (I) をみたす作用素を形式的に ACP により特徴付けたもので、やや不自然であるが、定理 3.2 は命題 3.1 の特別な場合とも考えられるので、この節では以下命題 3.1 を証明する。

$T > 0$ に対して $k(t)$ を命題 3.1 の仮定にある様にとる。解作用素 $\{U(t)\}_{0 \leq t < T}$ を、 $D(A^{k(t)+1}) \ni x \mapsto U(t)x \equiv u(t; x) \in D(A)$, と定義する。次の補題が成立する。

補題 3.3. すべての整数 $l \geq 1$ に対して,

$$(\frac{d}{dt})^l U(t)x = A^l U(t)x = U(t)A^l x, \quad 0 \leq t < T, \quad x \in D(A^{k(t)+l+1}).$$

次に閉グラフ定理を用いて,

補題 3.4. $\forall T > 0, \forall \varepsilon > 0$ に対して $M_{T,\varepsilon} > 0$ が存在して,

$$(3.2) \quad \|U(t)x\|_1 \leq M_{T,\varepsilon} \|x\|_{k(t)+1}, \quad x \in D(A^{k(t)+1}), \quad 0 \leq t \leq T-\varepsilon,$$

$$(3.3) \quad \|U(t)x\| \leq M_{T,\varepsilon} \|x\|_{k(t)}, \quad x \in D(A^{k(t)}), \quad 0 \leq t \leq T-\varepsilon.$$

(3.3) より解作用素は、 $\{U(t)\}_{0 \leq t < T} \subset \mathcal{B}([D(A^{k(t)})]; X)$ と一意的に拡張される。ここで、norm $\|\cdot\|_k$ により $D(A^k)$ を Banach 空間としたものを $[D(A^k)]$ と書いた。又 $Y = \bigcap_{n \geq 1} D(A^n)$ を §2, 定理 B にある様に Fréchet 空間と考えると、 $U(t)|_Y$ はすべての $t \geq 0$ に対して定義でき、補題 3.3, 補題 3.4 より $U(t)(Y) \subset Y$, $\{U(t)|_Y\}_{t \geq 0}$ は局所同等連続 in Y , 又すべ

この $x \in Y$ に対して, $[0, \infty) \ni t \mapsto U(t)x$ は Y の位相で無限階微分可能で, $U'(0)x = Ax$. さらに解の一意性より, $U(t+s)|_Y = U(t)|_Y U(s)|_Y$ for $t, s \geq 0$. 故に次の補題の(i)が示された。

補題 3.5. (i) $\{U(t)|_Y\}_{t \geq 0}$ は Y 上の局所同等連続半群で, その i. g. は $A|_Y$. (ii) $\overline{Y} = X$.

(ii) を示すためには集合

$$Z = \left\{ y \in X; y = \int_0^T \phi(t) U(t)x dt, \phi \in C_0^\infty(0, T), x \in D(A^{k(t)}) \right\}$$

が X で稠密で, $\cap_{T>0} Z \subset Y$ となる事を注意すればよい。

== ところで Ushijima [14] と Chazarain [1] の結果 (本稿 §2, 定理 B の (II) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (IV)) を用いると, A の resolvent set $\rho(A)$ は (2.4) の形をした領域 Ω を含み, A の resolvent, $R(\lambda; A)$ に対しては, ある $m, C > 0$ が存在して (2.5) の評価を得る。
 T_0 , $0 < T_0 < T$, を任意に取れば,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} U(t)x dt &= A \int_0^{T_0} e^{-\lambda t} U(t)x dt \\ &= e^{-\lambda T_0} U(T_0)x - x + \lambda \int_0^{T_0} e^{-\lambda t} U(t)x dt \end{aligned}$$

より,

$$(3.4) \quad R(\lambda; A)x = \int_0^{T_0} e^{-\lambda t} U(t)x dt + e^{-\lambda T_0} R(\lambda; A)U(T_0)x$$

$$x \in D(A^{k(t)}), \quad \lambda \in \Omega$$

を得る。 $T_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ を $0 < (1+\varepsilon)T_1 < T_0 < T$ をみたす任意の数とする。 $\alpha > \max\left\{\alpha_0, \frac{m+2}{T_0 - (1+\varepsilon)T_1}\right\}$, $\beta > \max\{\beta_0, 0\}$,

$\omega_1 > \max\{\omega_0, \beta\}$, $\omega > 2\omega_1$, $\eta_0 = \exp(\frac{\omega_1 - \beta}{\alpha}) (> 1)$
 ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ は $\mathbb{C}$, α, β, ω_0 は (2.4) における定数) とお
 い 2, 複素平面上の積分路 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ($\subset \Omega$) を,

$$\Gamma_1 = \{ \zeta = \xi + i\eta; \xi = \alpha \log |\eta| + \beta, |\eta| \geq \eta_0 \}$$

$$\Gamma_2 = \{ \zeta = \omega_1 + i\eta; |\eta| \leq \eta_0 \}$$

と定め, 下から上へ向きを付ける. Cauchy の積分表示式よ
 り,

$$R(\lambda; A)x = \int_0^{T_0} e^{-\lambda t} U(t)x dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\zeta T_0} R(\zeta; A) U(T_0)x}{\lambda - \zeta} d\zeta$$

for $x \in D(A^{k(n)})$, $\lambda > \omega_1$.

さらに,

$$\begin{aligned} \lambda^n R(\lambda; A)^n x &= \frac{(-1)^{n-1} \lambda^n}{(n-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{n-1} R(\lambda; A)x \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{T_0} e^{-\lambda t} (-t)^{n-1} U(t)x dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\zeta T_0} \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right)^n R(\zeta; A) U(T_0)x d\zeta \\ &\equiv I_1 + I_2 \quad \text{for } \lambda > \omega_1, x \in D(A^{k(n)}), n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

こゝで命題 3.1 を証明するためには, $C > 0$ が存在して,

$$(3.5) \quad \sup \{ \| \lambda^n R(\lambda; A)^n x \|; 0 \leq \eta/\lambda \leq T_1, \lambda \geq \omega, n=1, 2, \dots \} \leq C \|x\|_{k(T)}$$

が成立する事を示せばよい。

補題 3.6. $M_{T, T_0} > 0$ が存在して,

$$\|I_1\| \leq M_{T, T_0} \|x\|_{k(T)}.$$

補題 3.7. $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $C_\varepsilon > 0$ が存在して,

$$|(1 - \frac{\zeta}{\lambda})^{-n}| \leq C_\varepsilon e^{(1+\varepsilon)T_1 \xi}$$

for $\zeta = \xi + i\eta \in \Gamma$, $0 \leq \eta/\lambda \leq T_1$, $\lambda \geq \omega$, $n=1, 2, \dots$.

(2.5), (3.3), 補題 3.7 及び積分路 Γ の取り方から,

$$\begin{aligned} \|I_2\| &\leq \text{Const.} \|x\|_{k(\Gamma)} \cdot \int_{\Gamma} e^{-\beta T_0} e^{(1+\varepsilon)T_1} (1+|\beta|+|\eta|)^m |dS| \\ &\leq \text{Const.} \|x\|_{k(\Gamma)} \left\{ \int_{\eta_0}^{\infty} e^{-(\alpha \log \eta + \beta)(T_0 - (1+\varepsilon)T_1)} (1+\eta)^m d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta_0}^{\eta_1} e^{-\omega(T_0 - (1+\varepsilon)T_1)} (1+|\eta|)^m d\eta \right\}. \end{aligned}$$

== で, $\alpha > \max \left\{ \alpha_0, \frac{m+2}{T_0 - (1+\varepsilon)T_1} \right\}$ である事に注意すれば,

$$\|I_2\| \leq \text{Const.} \|x\|_{k(\Gamma)}.$$

== で得られた $\|I_2\|$ の評価と, 補題 3.6 より, (3.5) が示された。

§4. (C_k) 半群の特徴付け.

定理 4.1. A を $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \neq \emptyset$ なる作用素とし, $k \geq 1$ を整数とする。このとき $\forall x \in D(A^k)$ に対して, $u(t; x) \in D(A^k)$ for $t \geq 0$, となる様な $(ACP_1; \omega, \lambda)$ for A の一意解 $u(t; x)$ が存在したと仮定するならば, A は半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in (C_{(k)})$ の c.i.g. となり, $T(t)x = u(t; x)$ for $t \geq 0, x \in D(A^k)$ 。

系 4.2. A を $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \neq \emptyset$ なる作用素として, $k \geq 1$ を整数とする。このとき $\forall x \in D(A^k)$ に対して, $u(t; x) \in D(A^k)$ for $t \geq 0$, となる様な $(ACP; \omega, \lambda)$ for A の一意解が存在したと仮定するならば, A は半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in (C_{(k-1)})$ の c.i.g. となり, $T(t)x = u(t; x)$ for $t \geq 0, x \in D(A^k)$ 。

(注意) 次の補題が成立する事に注意する。

補題 4.3. A を $\rho(A) \neq \phi$ なる作用素, $0 < T \leq \infty$ かつ $1 \leq n \leq \infty$ を整数とする。次の 2 条件は同値である。

- (1) $(ACP; T, 0)$ for A の解は $u \equiv 0$ のみ。
- (2) $(ACP; T, 0)$ for A の解 u の中で, $u(t) \in D(A^n)$ for $t > 0$ なるものは $u \equiv 0$ のみ。

この補題により, 定理 4.1 あるいは系 4.2 の仮定の中で, 解の一意性に関しては, " $u(t) \in D(A^k)$ for $t > 0$ となる解の中で一意" と仮定すれば十分である。

文 献

- [1] J. Chazarain, Problèmes de Cauchy au sens des distributions vectorielles et applications, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 266 (1968), 10-13.
- [2] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31 (1957).
- [3] T. Kōmura, Semigroups of operators in locally convex spaces, J. Funct. Anal., 2 (1968), 258-296.
- [4] S.G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Space (in Russian), Nauka, Moscow, 1967.
- [5] J. Lions, Les semigroups distributions, Portugal Math., 19 (1960), 141-164.

- [6] 宮寺功, 抽象的 Cauchy 問題についての注意, 早稲田大学教育学部, 学術研究, 21号 (1972).
- [7] I. Miyadera, S. Oharu and N. Okazawa, Generation theorems of semigroups of linear operators, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ..
- [8] S. Oharu, Semigroups of linear operators in a Banach space, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7 (2) (1971), 205-260.
- [9] S. Oharu, Eine Bemerkung zur Charakterisierung der Distributionenhalbgruppen, to appear in Math. Ann.
- [10] 岡沢登, 抽象的 Cauchy 問題の適切性について, 数理解析研究所講究録 134, 121-135.
- [11] H. Sunouchi, Convergence of semi-discrete difference schemes of abstract Cauchy problems, Tôhoku Math. J., vol. 22 (1970), 394-408.
- [12] N. Sanekata, A note on the abstract Cauchy problem in a Banach space, to appear.
- [13] T. Takahashi and S. Oharu, Approximation of operator semigroups, to appear in Tôhoku Math. J., 24 (1972).
- [14] T. Ushijima, Some properties of regular distribution semigroups, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 224-227.
- [15] T. Ushijima, On the generation and smoothness of semigroups

of linear operators, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA,
19 (1) (1972), 65 - 127.