

関数環と作用素環にわたる解析性の問題について

山形大、理 河村新蔵

作用素環の研究の中で *non-self adjoint algebra* の研究は Kadison-Singer の *triangular algebra* (1960) [6] の研究に始まる。*triangular algebra* は *diagonal* に極大な可換 *von-neumann* 環をもつ環で、可換な *von-neumann* 環の議論と密接に結びついていた。*von-neumann* 環に離散型と連続型がある様に *triangular algebra* もその *diagonal* の型によって二つの型に分類される。

Arveson は *non-self adjoint algebra* を *diagonal* とそれへの *conditional expectation* との関係でとらえ、有限次元 *triangular matrix algebra* と *function algebra* の性質の一般化 (*sub-diagonal algebra* [2]) を考察した。即ち、Hadamard の不等式、分解定理、Jensen の不等式、Szegő の定理について研究した。これらの問題は個々の例について調べ、一般的な形としては完成していない。

一方関数環の研究の中で *non-self adjoint* な一般的な環の

研究として Arens-Singer によって *generalized analytic function algebra* が詳しく調べられている。Muhly は *flow* による解析環を考え、それがある条件の下で *Dirichlet algebra* になる事や *flow* に関して *invariant* な *measure* が *representing measure* になる事を示し、解析環の極大イデアルの研究を行った (1973) [12]。又 *flow* に関する *analytic measure* は *quasi-invariant* になるというのは一般化された F.M. Riesz の定理であるが、その時 *distant future = 105* という条件が大きな役割をする。逆に、*distant future = 105* の時その *measure* は *analytic measure* の絶対値 *measure* か？ という Forelli の問題があるが、これは田中によって部分的に解決された (1978) [15]。

von Neumann 環上の *flow*、即ち一径数 $\ast$ 弱連続同型群による $H^\infty(\alpha)$ の研究は関数環のそれに対応して始まった (1976) [7] [10]。しかし潜在的には竹崎の *homogeneous state* の研究 [14] (1973) の中にも *flow* による $H^\infty(\alpha)$ の構造を見る事ができる。富田 - 竹崎理論によれば、全ての *von Neumann* 環 M に対し *faithful normal state* が存在し、それによる *modular automorphism group* が存在する。この *flow* により、 M の中に $H^\infty(\alpha)$ を作る事ができ、それが *maximal subdiagonal* となる。この $H^\infty(\alpha)$ に対し Jensen の不等式、Szegő の定理、

不変部分空間の問題等 どの様になっているか興味深いのであるが、それは今後の $H^p(\alpha)$ の研究の一つの課題である。

§1. *Triangular operator algebra.* M_n を $n \times n$ 行列全体とする。 M_n の上方三角行列全体 $J = \{(a_{ij}) \in M_n; a_{ij} = 0 \text{ if } i > j\}$ を射影作用素 $\{F_k\}_{k=1}^n$ ($F_k = (a_{ij}); a_{ii} = 1 \text{ } 1 \leq i \leq k$ その他の $a_{ij} = 0$) で記述すると $J = \{T = (a_{ij}) \in M_n; F_n T F_n = T F_n\}$ である。これを無限次元ユークリッド空間で考えてみよう。

例1. $\mathcal{H} = \ell^2 = \{x = (x_n); \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ ($e_n = (0, \dots, 0, \overset{n\text{番目}}{1}, 0, \dots)$) E_n を $\mathcal{H}$ から $[e_n]$ ($= e_n$ で張る一次元空間) への射影作用素、 $F_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ とする。 $B(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体とすれば、 $B(\mathcal{H})$ の無限次元上方三角行列は

$$J = \{T \in B(\mathcal{H}); F_n T F_n = T F_n \text{ } \forall n\}$$

となり、この時 J の *diagonal* は $J \cap J^* = \{T F_n = F_n T\} = \{T E_n = E_n T\} = \{\sum a_n E_n; \sup |a_n| < +\infty\} \cong \ell^\infty(\mathbb{N})$ である。

例2. $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$, $(F_\lambda f)(t) = \chi_{[0, \lambda]}(t) f(t)$ ($f \in \mathcal{H}$),

$\chi_{[0, \lambda]}$ は $[0, \lambda]$ の定義関数。

$$J = \{T \in B(\mathcal{H}); F_\lambda T F_\lambda = T F_\lambda, \forall \lambda: 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

とすればこれも一つの $B(\mathcal{H})$ の中の上方三角行列環と考えられよう。 Kadison は一般化された三角行列環を次の様に定義した。

定義 1. $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間、 M を $B(\mathcal{H})$ の因子 von-Neumann 部分環とする。 M の部分環 J が *triangular* であるとは $M = J \cap J^*$ が M の中の極大可換 von-Neumann 環である。

極大可換 von-Neumann 環 M は *atomic type* (極小射影作用素より生成される) と *continuous type* (極小射影作用素が存在しない) の直和になるが、*triangular algebra* J が、例 1 の様な極小射影作用素で決定される時、 J は *atomic* と言い、例 2 の様な極小でない射影作用素で決定されると、 J は *continuous* と言う。一般に J は *continuous* か *atomic* のどちらかになるとは限らないが (次の例 3 参照) 次の条件の下では分類は決定される。

定理 1 ([6] Theorem 3.2.1 and 3.3.1) $\text{hull } J = \{E \in J; E \text{ は } ETE = TE \text{ } (\forall T \in J) \text{ なる射影作用素}\}$ とし、 $\text{hull } J$ が充分沢山ある時 ($\text{core of } J = \text{alg}(\text{hull } J) = J^* \cap J$) J を *hyperreducible* と言い、 J が極大な *triangular algebra* であれば、 J は *atomic type* か *continuous type* である。

注. J_1, J_2 を *triangular algebra* とする時、 $J_1 \subset J_2$ ならば $J_1 \cap J_2^* \subset J_2 \cap J_2^*$ で *diagonal* の極大性より $J_1 \cap J_2^* = J_2 \cap J_2^*$ である。従って包含関係によってその

diagonal は変化しない。

例3. $\mathcal{L} = L^2(\Pi)$, Π はトラス. $\gamma \in \mathbb{Q} =$ 有理数全体.

$Uf(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+\gamma)})$ ($f \in \mathcal{L}$). U は $\mathcal{L}$ 上のユニタリ作用素で $\mathcal{M}$ を $L^2(\Pi)$ と $\{U^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ で生成する von-Neumann 環、
 $\mathcal{J}$ を $L^2(\Pi)$ と $\{U^n\}_{n=0}^{\infty}$ で生成する弱*閉環とすれば、 $\mathcal{J}$ は $\mathcal{M}$ の中で $\text{triangular alg}(\mathcal{J} \cap \mathcal{J}^* = L^\infty(\Pi))$ であるが、hyper-reducible ではない。

§2. subdiagonal 環の定義. Arveson は関数環との比較研究も考慮し non-self adjoint 環の内次の様な特徴を持つ環を subdiagonal 環とした。

定義2. $\mathcal{M}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環とする。 $\mathcal{M}$ の部分環 $\mathcal{A}$ が次の条件を満たす時、 $\mathcal{A}$ を sub-diagonal 環と言う。

(1) M を $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ の * 弱閉包とする時、 M は von Neumann algebra.

(2) $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ の * 弱閉包は $\mathcal{M}$ である。

(3) $\mathcal{M}$ から M への conditional expectation (faithful normal positive linear idempotent map) Φ が存在し、
 Φ は $\mathcal{A}$ 上で乗法的である。

Triangular algebra は sub-diagonal であるかという事は $\mathcal{M}$ から M への conditional expectation が存在するかという事と同じである。一般に極大可換環への conditional expectation は存在するとは限らないが、triangular algebra $\mathcal{T}$ が atomic type の時や $\mathcal{M}$ に faithful normal trace が存在する時は conditional expectation が存在する。

例 4. $G = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a_{11}, a_{12} \in \mathbb{Q} \ a_{11} > 0 \}$. G を離散乗法群と見なす。 $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は G の単位元である。 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を $a_{11} < b_{11}$ 又は $a_{11} = b_{11}, a_{12} < b_{12}$ で定義すると、 G は線型順序群となる。 $x \in G$ に対し U_x を左正則表現 $(U_x f)(y) = f(x^{-1}y) \ (f \in \ell^2(G))$ とする。 $\mathcal{M}$ を $\{U_x\}_{x \in G}$ で生成する von Neumann 環とする。 $\mathcal{M}$ は $\phi(\cdot) = (\cdot, f_0, f_0)$ (f_0 は e の定義関数、 $(\cdot, \cdot)$ は $\ell^2(G)$ の内積) を trace とする hyperfinite II-factor である。 $\mathcal{O}_0 = \{ \lambda_1 U_{x_1} + \dots + \lambda_n U_{x_n} \}_{x_i \in G}$ とし $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_0' = \{ \lambda I \}$ で $\sum \lambda_i U_{x_i} = \lambda_e I$ は $\mathcal{M}$ から $\{ \lambda I \}$ への conditional expectation である。

例 5 M_0 をヒルベルト空間 (可分) $\mathcal{H}$ 上の II-factor とする。 G を可換な離散型可算群で順序が入っているとす。 $x \in G$ と $T_0 \in M_0$ に対し、 $(W_x F)(y) = F(x^{-1}y)$
 $(TF)(x) = T_0 F(x) \ (F \in \ell^2(G, \mathcal{H}))$ と、 W_x, T を定義すると W_x, T は $B(\ell^2(G, \mathcal{H}))$ の元で $\mathcal{M}$ を $\{W_x, T; x \in G, T_0 \in M_0\}$

で生成された von Neumann 環とする。 $\mathcal{A}_0 = \{T_x, W_{x_1}, \dots, T_{x_n} W_{x_n}\}_{x_i \in G}$ とする。 $X \in \mathcal{M}$ に対し $\Phi(X) = \sum_{x \in G} P_x T P_x$ (P_x は $\ell^2(G, \mathcal{E})$ から $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}$ への自然な射影作用素) とすれば、 Φ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}_0 = \overline{\mathcal{A}_0} = \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_0^*$ への conditional expectation で、 $\mathcal{A}_0$ は Φ に関して subdiagonal である。

§3. Flow と subdiagonal algebra. Muhly [12] はコンパクト空間上の flow に対し、一般化された解析環を考えそれが weak * Dirichlet 環になる事を示した。subdiagonal 環は非可換 weak * Dirichlet 環と考える立場から von Neumann 環 $\mathcal{M}$ 上の一径数同型群によって決まる解析環が subdiagonal である事が示されている ([7] [10])。詳しい事は [8] [9] に述べてあるのでここでは省略し定義と定理のみを述べる。 $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ 上の一径数同型群で任意の $\varphi \in \mathcal{M}_*$ に対し $t \mapsto \varphi(\alpha_t(T))$ ($T \in \mathcal{M}$) は連続であるとする。

定義 3. $H^\infty(\alpha) = \{T \in \mathcal{M} \mid \text{任意の } \varphi \in \mathcal{M}_* \text{ に対し実軸上の関数 } t \mapsto \varphi(\alpha_t(T)) \text{ が複素上半平面に有界かつ解析的に拡大できる}\}$

定理 2. ([7, Theorem 2.4] [10, Theorem III.15]) $\mathcal{M}$ 上に $\mathcal{M}_+ = \{T \in \mathcal{M}; T \geq 0\}$ の元を 0 から分離する程充分沢山の normal

state が存在すれば $\mathcal{M}$ から $H^\infty(\alpha) \cap H^\infty(\alpha)^* = \{T \in \mathcal{M}; \alpha_t(T) = T \forall t \in \mathbb{R}\}$ 上への conditional expectation $\overline{\mathbb{E}}$ が存在し ~~U//M~~.

$H^\infty(\alpha)$ はこの重に関して sub-diagonal である。更にこの $H^\infty(\alpha)$ より大きな重に関する sub-diagonal は存在しない。

triangular algebra の立場から見るならば、 $H^\infty(\alpha)$ と次の nest algebra の関係は興味深い。 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{M}$ の中の sub-diagonal とする時、 $\text{hull } \mathcal{O} = \{E \in \mathcal{M}; ETE = TE \text{ なる射影作用素 } T \in \mathcal{O}\}$ が、線型順序 ($E_1 E_2 = E_2$ の時 $E_1 \geq E_2$) となっており $\sup$ と $\inf$ に閉じている時 $\text{hull } \mathcal{O}$ は complete nest という。 $0, 1$ は $\text{hull } \mathcal{O}$ に含まれている。 $E \in \text{hull } \mathcal{O}$ に対して実数 t を $t = t(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} (E e_i, e_i)$ ($\{e_i\}$ は $\mathcal{H}$ の基底) で定義すれば、 $0 \leq t \leq 1$ であって $\Omega = \{t \mid t = t(E), E \in \text{hull } \mathcal{O}\}$ は $\mathcal{O}$ が complete nest という事から $[0, 1]$ の閉集合で、対応 $E \longleftrightarrow t = t(E)$ は全単射である。この時 $[0, 1]$ 区間上に単位分解 $\{F_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ が存在し $U_s = \int_0^1 e^{ist} dF_t$ とすれば $\alpha_t = U_t \cdot U_t^*$ は $\mathcal{M}$ 上の内部自己同型群となり、 $\mathcal{O} = H^\infty(\alpha)$ である。この事から * 連続な一径数同型群 β に対し、ノルム連続一径数同型群 α が存在して $H^\infty(\alpha) = H^\infty(\beta)$ となる。

§ 4. Jensen の不等式 本稿の主題である Jensen の不等式について述べる。最初に Jensen の不等式と密接に関係ある分解定理について次の Arveson の定理をあげておく。

定理 3 [2, Theorem 4.2.1] $(\mathcal{M}, \Phi)$ を $\mathcal{M}$ の *sub-diagonal* として $\mathcal{M}$ 上に Φ -不変な *faithful normal trace* Tr が存在するならば次の分解が成り立つ ($\text{Tr}(1) = 1$ とする)。

$\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$ の任意の元 T に対し $\mathcal{M}$ のユニタリ作用素 U と $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$ の元 A が存在して $T = UA$ となる。この分解は $\mathcal{M}$ のユニタリ作用素を無視して一意的である。

この分解定理より $\mathcal{M}$ は *log modular* 環である事が解る。実際 $T = T^* \in \mathcal{M}$ に対し、 $(\exp(2T))^{\frac{1}{2}}$ は $\mathcal{M}$ の正值作用素で定理より $\mathcal{M}$ のユニタリ作用素 U と $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$ の元 A が存在して $\exp(2T) = (\exp(2T))^{\frac{1}{2}} (\exp(2T))^{\frac{1}{2}} = UA \cdot UA = A^*A$ となる。従って $T = (\log(A^*A))^{\frac{1}{2}} = \log |A|$ ($A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$)。

Jensen の不等式を述べる前に Kadison-Fuglede [5] による *determinant* の定義を述べる。 $\mathcal{M}$ を II -factor とし $X \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$ に対し $\Delta(X) = \exp \text{Tr}(\log |X|)$ (Tr は $\mathcal{M}$ 上の trace)、一般の $X \in \mathcal{M}$ に対し $\Delta(X) = \exp \text{Tr}(\log(|X| + \varepsilon I))$ とする。[5] の目的の一つは *generalized nilpotent operator* ($\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$) の Trace value は 0 である事を示す事だっ

た。ここで $\Delta(X)$ について Generalized Hadamard inequality と
言われる次の不等式について述べてみよう。

定理 4 $H > 0 (H \in M)$ ならば $\Delta(H) \leq \Delta(\Phi(H))$

([2, Cor. 4.3.4])

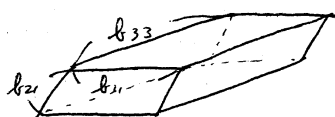
M を $n \times n$ 行列全体とすると $T = (a_{ij}) \in M$ に対し
 $\Delta(T) = (\det T)^{1/n}$ である。 $T^*T = (b_{ij})$ と表わすと

$$b_{ii}^2 = |a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \dots + |a_{in}|^2 \quad \text{で上の不等式は}$$

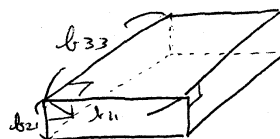
$$(\det T)^2 \leq b_{11}^2 b_{22}^2 \dots b_{nn}^2$$

即ち $|\det T| \leq |b_{11}| |b_{22}| \dots |b_{nn}|$ を示す。

これは一辺の長さ $|b_{ii}|$ のベクトル $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ を
 n 個の辺とする立体と $\{v_i\}_{i=1}^n$ を直交化させたベクトルで作
る直方体の体積の関係を意味している。



$\leq$



ここで disk 環 H^∞ における Jensen の不等式を考えてみよう。
 $f \in H^\infty$ に対し $|z| < 1$ なる z に対し

$$|f(z)| \leq \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| P_z(\theta) d\theta$$

$$P_z(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+z e^{i\theta}}{1-\bar{z} e^{i\theta}} \right)$$

$$|f(0)| \leq \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta$$

この不等式を sub-diagonal 環に平行移動すれば、

$$(α) \quad T \in \mathcal{O} \quad \text{ならば} \quad \Delta(\Phi(T)) \leq \Delta(T)$$

となる。これを作用素環の Jensen の不等式と言おう。 M

を $n \times n$ 行列全体とした時、 $T^*T \in \mathcal{O}$ ならば $|\det \Phi(T^*T)|$

$$\leq |\det T^*T| \quad \text{となり、前頁の事と合せると、} |\det T| = |b_{11}| \cdots |b_{nn}|$$

となる。 $T^*T \in \mathcal{O}$ はベクトル $\{v_i\}_{i=1}^n$ が直交して ~~なる~~ 事

あり当然 $\{v_i\}$ より作られた立方体の体積 $|\det T|$ は

$$|b_{11}| \cdot |b_{22}| \cdots |b_{nn}| \quad \text{に等しい。}$$

Jensen の不等式の証明には分解定理が大きな役割を果たすのだが、ここで Jensen の不等式と同値な条件をあげておこう。

$$(β) \quad \Delta(\Phi(A)) = \Delta(A) \quad A \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}^{-1} \quad (\text{Jensen の等式})$$

(γ) 任意の state ρ に対し

$$\inf \rho(|D+T|^2) = \Delta(\rho)$$

$$\Delta(\rho) \equiv \inf \{ \rho(T) ; T \text{ は } M \text{ の regular positive operator} \\ \exp \operatorname{Tr}(\log T) \geq 1 \}$$

$\Delta(\rho)$ は $\rho(X) = \operatorname{Tr}(HX)$ $H \geq 0$ の時には $\Delta(\rho) = \Delta(H)$ と

なり、左辺は diagonal と $\mathcal{O} \cap \operatorname{Ker} \Phi$ との state ρ に

於るヒルベルト空間の中での距離を示しており、(γ) は一般

化された Szegő's Theorem と言われる。

Jensen の不等式はどのような subdiagonal 環について成り立つか？ 現在までの段階では次の様な条件の下で成り立

つ。

(1) $\mathcal{M}$ は abelian

(2) $\mathcal{A}$ は nest algebra

(注) hyperreducible maximal triangular subalgebra
は nest algebra

(3) $\mathcal{M} = L^\infty(\Gamma, M)$ M は hyperfinite II_1

(3)で M が II_∞ -type の時は Helson - Lowdenslager - Wiener の定理と言われる。 M が non-hyperfinite の時はまだ解っていない。例5は $L^2(\Gamma, \mathcal{A}) \cong L^2(G, \mathcal{A})$ で(3)より Jensen の不等式が成り立つ。解析環 $H^\infty(\alpha)$ に対し、分解定理、Jensen の不等式が成り立つか？は今後の問題である。

[参考文献]

[1] R. Arens and I. Singer, Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 379-393

[2] W. Arveson, Analyticity in operator algebra, Amer. J. Math. 89 (1967) 578-642

[3] W. Arveson, Interpolation Problems in Nest Algebras, J. Functional Analysis 20 (1975) 208-233

[4] F. Forelli, What makes a positive measure the total variation

measure of an analytic measure? J. London Math. Soc. (2) (1970) 713 - 718.

[5] B. Fuglede and R.V. Kadison, Determinant theory in finite factors, Annales of Mathematical Society 55 (1952) 520 - 530.

[6] R.V. Kadison and I.M. Singer, Triangular Operator Algebras, American Journal of Math. 82 (1960) 227 - 259.

[7] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan 29 (1977) 73 - 90.

[8] 河村新蔵 Analyticity in operator algebras, 数理解析研究所講究録 278 (1975) 11 - 22

[9] 河村新蔵 解析関数環の作用素環への拡張, 実函数論函数解析学 合同シンポジウム記録 (1976) 57 - 65

[10] R.I. Loeb and P.S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann algebras, J. Funct. Anal. 29 (1978) 214 - 252

[11] M. McAsey, P.S. Muhly and K.S. Saito, Non-self-adjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality) to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[12] P.S. Muhly, Function algebras and flows I, Acta Sci. Math., 35 (1973), 111 - 121

[13] J. Ringrose, On some algebras of operators, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965) 61 - 83.

[14] M. Takesaki, The structure of a von Neumann algebra with a homogeneous periodic state, Acta Math. 131 (1973) 79 - 121.

[15] J. Tanaka, A certain class of total variation measures of analytic measures, to appear.