

A remark on analytic hypoellipticity for operators
with symplectic characteristics

T. Sakurai (Saitama Univ.)

木井 力 (埼玉大・理工)

It is well known (Grusin [2]) that the operator

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{N-1} (D_j^2 + x_j^2 D_N^2) - \lambda D_N \quad (D_j = -i\partial_{x_j})$$

is analytic hypoelliptic at $(0, dx_N)$ if and only if

$$(*) \quad \lambda \notin \{2j+N-1; j=0, 1, 2, \dots\} = \text{spec}(-\Delta' + |x'|^2).$$

Under a suitable subellipticity condition, similar to above, analytic hypoellipticity has been proved in a satisfactorily generalized form for operators with symplectic characteristics. (see e.g. Metivier [6], Ōkaji [7].)

However, in respect to necessity of $(*)$, Stein [8] showed that $P(N-1) + d$ ($d \neq 0$) is also analytic hypoelliptic. This result has been generalized by Grigis-Rothschild [1] to operators of the form:

$$P = \sum_{|\alpha+\beta| \leq m} C_{\alpha\beta}(D_y) t^{\alpha} D_t^{\beta}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n, \quad C_{\alpha\beta} \in S^{\mu+(|\alpha|-|\beta|)/2},$$

with $\text{Char}(P) = \{t=\tau=0\}$ and not being subelliptic at $(0, ndy)$. More precisely, they proved that

$$\exists H: (g'_y)^{k_1} \longrightarrow g'_{t,y}$$

with $\text{WF}'_d(H)$ inducing the isomorphism: $\dot{T}^*(\mathbb{R}_y^n) \longrightarrow \text{Char}(A) \subset \dot{T}^*(\mathbb{R}_{t,y}^{d+n})$,

$$\exists M = M(D_y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} |D|^{-j/2} M_j\left(\frac{D}{|D|}\right): (g'_y)^{k_1} \longrightarrow (g'_y)^{k_2},$$

where $k_1 = \dim \left(\text{Ker} \left(\sum_{(\alpha+\beta) \leq m} \sigma_0(C_{\alpha\beta})(\dot{n}) t^{\alpha} D_t^{\beta} \right) \cap \mathcal{G}_t \right)$ such that
 (k_2) (Coker)

$$Pu \in \mathcal{A}(0, \dot{n}dy) \implies u - HH^*u \in \mathcal{A}(0, \dot{n}dy), \quad MH^*u \in \mathcal{A}_y(0, \dot{n}dy).$$

In this note we shall extend their results to the case when $C_{\alpha\beta}$ depends on y . Moreover, we can get a more explicite formula for M_j 's.

In application, we can show the following:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{N-1} (D_j^2 + x_j^2 D_N^2) - (N-1)D_N + \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{N-1} c_{ij} x_i x_j D_N, & \text{tr}(c_{ij}) \neq 0 \\ \sum_{j=1}^{N-1} c_j D_j \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j D_N, & \sum c_j^2 \neq 0 \end{cases}$$

is analytic hypoelliptic.

$$(2) \quad D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + [ct^2 D_{y_2} \quad \text{or} \quad c]$$

is not analytic hypoelliptic. Moreover, it is Gevrey^s hypoelliptic for $s \geq 2$ if $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^-}$ but not so for $c \in \overline{\mathbb{R}^-}$.

$$(3) \quad D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + \frac{1}{2} y_1^2 D_{y_2} - c$$

is analytic hypoelliptic at 0 if $c \notin \{j+\frac{1}{2}; j=0,1,2,\dots\}$.

§ 1. 準備

Notation

$M; \mathbb{R}^m$ の開集合, $\pi: T^*(M) \rightarrow M$; 余接束と標準射影.

$\dot{T}^*(M) = T^*(M) - M$, $\dot{x}^* = (x, \xi)$; point in $\dot{T}^*(M)$.

$WF_A(u)$ (resp. $WF(u)$); $u \in \mathcal{D}'(M)$ の analytic (resp. C^∞) wave front set ($\subset \dot{T}^*(M)$)

$A_{\mu, \dot{x}^*} = \{u \in \mathcal{D}'(M); \dot{x}^* \notin WF_A(u)\}$

$\mathcal{C}_M^f$; pre-sheaf of micro-distribution on $\dot{T}^*(M)$:

$$\mathcal{C}_M^f(\omega) = \mathcal{D}'(M) / \{u \in \mathcal{D}'(M); WF_A(u) \cap \omega = \emptyset\} \quad (\omega \subset \dot{T}^*(M) \text{ open})$$

$$\mathcal{C}_{M, \dot{x}^*}^f = \varinjlim_{\omega \ni \dot{x}^*} \mathcal{C}_M^f(\omega) = \mathcal{D}'(M) / \mathcal{A}_{\mu, \dot{x}^*}; \text{ germ of micro-distribution.}$$

$$(\mathcal{D}' \text{ が soft sheaf なることより } \mathcal{C}_{M, \dot{x}^*}^f \cong \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n, \dot{x}^*}^f)$$

$\mathcal{L}(A, B)$; A から B への連続線型作用素の空間.

1.1. $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n$ を 2 つの開集合とする. Schwartz の

核定理により $K \in \mathcal{L}(C_0^\infty(N), \mathcal{D}'(M))$ は γ の distribution 核.

$K(x, y) \in \mathcal{D}'(M \times N)$ と同一視され $Ku(x) = \int K(x, y) u(y) dy$ と

書かれる. K の formal adjoint $K^* \in \mathcal{L}(C_0^\infty(M), \mathcal{D}'(N))$ は $K^*v(y)$

$$= \int \overline{K(x, y)} v(x) dx \text{ と与えられる.}$$

核 $K(x, y)$ と対偶作用素 K^* に対し.

$$WF'(k)_N = \{ (y, z); (x, y; 0, -z) \in WF(k) \text{ for some } x \in M \},$$

$$WF(k)_M = \{ (x, z); (x, y; z, 0) \in WF(k) \text{ for some } y \in M \},$$

$$WF'_X(k) = \{ (x, z; y, z); (x, y; z, -z) \in WF_X(k) \}$$

と置く. $\phi: WF'(k)_N = \phi$ なら K は $E'(N) \rightarrow D'(M)$ に拡張され ϕ が成立する:

$$WF_X(ku) \subset WF'_X(k) \circ (WF_X(u) \cup \text{supp}(u)).$$

以下では $m \geq n$ とし, $\tau: \dot{T}^+(N) \rightarrow \dot{T}^+(M)$ なる 冪次の injection map を与えようとする. $\omega \subset \dot{T}^+(N)$ を開集合とする. (2.3)

定義 (1.1) $K \in \mathcal{L}(C_0^\infty(N), D'(M))$ が " τ に関する ω を micro-local である" とは $\tau(\omega)$ の近傍 $\tilde{\omega} \subset \dot{T}^+(M)$ があつて次が成立する:

$$(i) \quad WF'(k)_N = WF(k)_M = \phi,$$

$$(ii) \quad WF'_X(k) \cap (\tilde{\omega} \times \pi_N^{-1} \pi_N(\omega)) \subset \{ (u, y^+); y^+ \in \omega \},$$

$$(iii)^* \quad WF'_X(k) \cap (\pi_M^{-1} \pi_M(\tilde{\omega}) \times \omega) \subset \{ (y^+, y^+); y^+ \in \omega \}.$$

$$= a \text{ とする } \dot{y}^+ \in \omega \text{ に対し } \chi \in C_0^\infty(\pi_N(\omega)), \tilde{\chi} \in C_0^\infty(\pi_M(\tilde{\omega}))$$

を $\dot{y}^+$, $i(\dot{y}^+)$ の近傍で $\equiv 1$ とする. $(k)_{\dot{y}^+} \in$

$\mathcal{L}(D'(N), E'(M))$ を $(k)_{\dot{y}^+} u(x) = \tilde{\chi}(x) k(\chi u)(x)$ と定める.

$(k)_{\dot{y}^+} (\text{resp. } (k)_{\dot{y}^+}^*)$ は $\mathcal{C}_{N, \dot{y}^+}^+$ から $\mathcal{C}_{M, i(\dot{y}^+)}^+$ への homomorphism

(resp. $\mathcal{C}_{M, i(\dot{y}^+)}^+$ から $\mathcal{C}_{N, \dot{y}^+}^+$ への homo.) を induce する. 我々は 2 の

factorized op. を $\leq$ (resp. $\leq^*$) と書く.

1.2. Tempered micro diff. ops.

$$N = \mathbb{R}_y^n \subset \mathbb{C}^n \text{ とし, } \mu \in \mathbb{Z}/2 \text{ とする.}$$

定義 (1.2)

$$\mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2, \mu} = \begin{cases} \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu)}|_{i\dot{T}_N^*(\mathbb{C}^n)} \otimes \{1, |D_y|^{-\frac{1}{2}}\} & \text{if } \mu \in \mathbb{Z} \\ \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu-\frac{1}{2})}|_{i\dot{T}_N^*(\mathbb{C}^n)} \otimes \{1, |D_y|^{\frac{1}{2}}\} & \text{if } \mu - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(D_{y_j} = -i\frac{\partial}{\partial y_j}, j=1, \dots, n, \quad \delta(|D_y|) = \sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2})$$

と置く, 互いに, $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu)}$ は $T^*(\mathbb{C}^n)$ 上の μ 階の micro-diff. op の層とする. ここでは $\dot{T}^*(N)$ と $i\dot{T}_N^*(\mathbb{C}^n)$ を同一視し $\mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2, \mu}$ を $\dot{T}^*(N)$ 上の層と考える

$A = A(y, D_y) \in \mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2}(\omega)$ は 次で与えられる symbol 列 $\{a_j\}_{j=0}^\infty$ で定義するこゝでできる:

(i) ω の 複素近傍 $\omega^\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ が あり $a_j(y, \eta)$ は $\omega^\mathbb{C}$ で 正則で η について $(\mu - \frac{1}{2})$ 次 斉次.

(ii) $\forall \omega_0^\mathbb{C} \subset\subset \omega^\mathbb{C} \quad \exists C > 0$ s.t. $\sup_{y^* \in \omega_0^\mathbb{C}} |a_j(y^*)| \leq C^{j+1} \sqrt{j!}$.

このとき a_0 を $\mathcal{S}^0(A)$ と書き A の 主 symbol と呼ぶ.

$A \in \mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2, j^*}$ は $\mathcal{C}_{N, j^*}^f$ (germ of micro f.t. at $\dot{x}^*$) に 準同型として作用するが, この作用は distribution 核を持つ作用素により実現される. これにより, A の $\mathcal{C}_{N, j^*}^f$ への作用が well defined となる. (Mellier [6] p21~p35 を見よ)

§ 2. 結 果

$$\mathbb{R}^n \times N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_y^n \hookrightarrow M = \mathbb{R}_t^1 \times N, \quad \iota: \dot{T}^*(N) \ni (y, \eta) \mapsto (0, y; 0, \eta) \in \dot{T}^*(M),$$

$$\Sigma = \iota(\dot{T}^*(N)) = \dot{T}^*(M) \cap \{t = z = 0\} \quad \text{とす.}$$

$$\dot{y}^+ = (y, \eta) \in \dot{T}^*(N) \quad (|\eta| = 1), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+ \text{ に対し, } \iota(\dot{y}^+) \text{ の近傍に}$$

定義した次の形の micro diff. op. を考える.

$$(2.1) \quad P = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} C_{\alpha\beta}(y, D_y) t^\alpha D_t^\beta, \quad C_{\alpha\beta} \in \mathcal{E}_{N, \dot{y}^+}^{\mathbb{Z}_2, (\mu + \frac{|\alpha|}{2} - \frac{|\beta|}{2})}$$

この P に 対し

$$\sigma^0(P)_{\dot{y}^+}(t, z) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \sigma^0(C_{\alpha\beta})(\dot{y}^+) t^\alpha z^\beta$$

$$\hat{\sigma}_\pm(P)_{\dot{y}^+} = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \sigma^0(C_{\alpha\beta})(\dot{y}^+) t^\alpha D_t^\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_t', \mathcal{H}_t')$$

とある, 次を仮定する.

$$(A-1) \quad \exists c > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\sigma^0(P)_{\dot{y}^+}(t, z)| \geq c(1+|z|)^m,$$

$$(A-2) \quad \dim(\text{Ker}(\hat{\sigma}_\pm(P)_{\dot{y}^+}) \cap \mathcal{H}_t') \neq 0.$$

(注意) (A-1) の仮定の下 $\hat{\sigma}_\pm(P)_{\dot{y}^+}$ は $\mathcal{H}_t' \rightarrow \mathcal{H}_t'$ の Fredholm op となり

$\text{Ker}(\hat{\sigma}_\pm(P)_{\dot{y}^+})$ は $\mathcal{H}_t'$ に含まれる. 加えて $\text{Ker}(\hat{\sigma}_\pm(P)_{\dot{y}^+}) = \mathbb{R}^n$ となる

は P が $\dot{y}^+$ で A-m.h.e. (analytic micro hypo elliptic) となること

は $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(t, y; D_t, D_y)$ の場合 $t = 0$ で Metivier [6] にあ

り証明されている.

また $k_+ = \dim(\text{Ker}(\hat{S}_2(P)_{y^+}))$, $k_- = \dim(\text{Coker}(\hat{S}(P)_{y^+}))$
 とおいて 我々の主定理を述べる.

定理 (2.2) P は (A-1), (A-2) を満たすとき. 次の事.

$$M \in \mathcal{L}_{N, y^+}^{\mathbb{Z}_2(M)} \otimes \mathbb{C}^{k_- \times k_+} : (\mathcal{C}_{N, y^+}^f)^{k_+} \rightarrow (\mathcal{C}_{N, y^+}^f)^{k_-}$$

と Σ の内側 micro local Σ の作用素

$$H_+ : (\mathcal{E}'(N))^{k_+} \rightarrow \mathcal{D}'(M)$$

$$H_- : (\mathcal{E}'(N))^{k_-} \rightarrow \mathcal{D}'(M)$$

が存在し. 次の同型を与える.

$$\underline{H}_+ : \text{Ker}(M; (\mathcal{C}_{N, y^+}^f)^{k_+} \rightarrow (\mathcal{C}_{N, y^+}^f)^{k_-}) \cong \text{Ker}(P; \mathcal{C}_{M, \text{reg}}^f \rightarrow \mathcal{C}_{M, \text{reg}}^f)$$

$$[\underline{H}^*] : \text{Coker}(P; \mathcal{C}_{M, \text{reg}}^f \rightarrow \mathcal{C}_{M, \text{reg}}^f) \cong \text{Coker}(M; (\mathcal{C}_{N, y^+}^f)^{k_+} \rightarrow (\mathcal{C}_{N, y^+}^f)^{k_-})$$

(注意) (1) $H_{\pm}$ は $y^* \sim \tilde{y}^*$ の symbol $(h_{\pm}^{(\omega)}(t; y^*), \dots, h_{\pm}^{(\omega)}(t; \tilde{y}^*))$
 を持ち $\{h_{+q}^{(\omega)}(t; y^*)\}_{q=1}^{k_+}$ (resp. $\{h_{-q}^{(\omega)}(t; y^*)\}_{q=1}^{k_-}$) は $\text{Ker } \hat{S}_2(P)_{y^*}$ (resp.
 $\text{Ker}(\hat{S}_2(P)_{\tilde{y}^*}^*)$) の base をなす.

(2) Grigis - Rothschild [1] は $\text{exp} = \text{Cexp}(D_y)$ の場合にこの結果を
 証明している. また $d=1$ の時は Kashiwara - Kawai - Okishima [3] に
 同様の結果がある.

(3) 我々は M の定数 micro-diff. system を "Interior boundary system
 on Σ (induced by P)" と呼ぶ. Σ である.

例 (2.3) (1) P は $\mathcal{L}(\mathcal{Y}^+)$ 上 A -micro hypoelliptic (resp. C^∞ -m.h.e.)

$\Leftrightarrow M$ は $\mathcal{Y}^+$ 上 A -micro hypoelliptic (resp. C^∞ -m.h.e.)

(2) $f \in \mathcal{E}'(M)$ とする. $\exists u \in \mathcal{E}'(M)$ s.t. $Pu - f \in \mathcal{A}_{M, \mathcal{L}(\mathcal{Y}^+)}$

$\Leftrightarrow \exists v_+ \in (\mathcal{E}'(N))^k_{A, t}$ s.t. $H_-^* f + M v_+ \in (\mathcal{A}_{N, \mathcal{Y}^+})^{k-}$

(注: P, M は distribution 核による適当な realization を表す)

具体例の計算は §6 の行方より $M, H_\pm$ のイメージと核より

を得る. $\Rightarrow$ である. $\Rightarrow$ 証明は §7

例 (2.4) $P = D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + c$ in $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^2$

$\in (0, dy_2)$ を考える.

$$H_+ = H_- = \left(\frac{|D_{y_1}|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}|D_{y_1}|} : \mathcal{E}'(\mathbb{R}_t^2) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{t,y}^3)$$

$$M = |D_{y_1}| - D_{y_2} + c = D_{y_2}^{-1} \left(\frac{1}{2} D_{y_1}^2 + c D_{y_2} \right) + O\left(\frac{|D_{y_1}|^4}{|D_{y_2}|}\right) D_{y_2}$$

とすると, $\forall c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^-}$ に対し P は $(0, dy_2)$ 上 C^∞ -m.h.e. であるが $\forall c \in \mathbb{R}^-$ に対して P は A -m.h.e. ではない.

§3. Symbol & Banach scale.

3.1. Symbol Spaces.

$y^* = (y, \eta) \in \dot{T}^*(N) \setminus \{0\}$ 固定し, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の y^* の近傍を考へる.

$$\omega_p = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : |y - \tilde{y}| < p, |\eta - \tilde{\eta}| < p\}$$

$$\omega_p^{\mathbb{C}} = \{(y, \eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) : |y - \tilde{y}| < p, |\eta - \tilde{\eta}| < p\}$$

は $\mathbb{R}^n$ 上, $0 < p < 1$, $\tilde{y}, \tilde{\eta}$ 固定.

$$\Gamma \omega_p = \{(y, \lambda \eta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : (y, \eta) \in \omega_p, \lambda > 0\}$$

$$\Gamma \omega_p^{\mathbb{C}} = \{(y, \lambda \eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) : (y, \eta) \in \omega_p^{\mathbb{C}}, \lambda > 0\}$$

と定める.

$B = B(\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上の Banach space であり, λ の norm は λ に依存し, $\lambda \rightarrow 0$ としていく.

定義 (3.1.1) $\mu \in \mathbb{Z}/2$, $y^* = (y, \eta) \in \dot{T}^*(N)$ とする.

$$(1) \quad p(y^*) \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\omega_p^{\mathbb{C}}; B)$$

($\Rightarrow$) (i) $p(y^*) \in \Gamma \omega_p^{\mathbb{C}}$ 上定義された B 値をとる正則関数.

def

$$(ii) \quad \|p(y, \lambda \eta)\|_{B(\lambda)} = \lambda^{\mu} \|p(y, \eta)\|_{B(1)} \quad \text{for } (y, \eta) \in \omega_p, \lambda > 0$$

$$(iii) \quad \sup_{y^* \in \omega_p^{\mathbb{C}}} \|p(y^*)\|_{B(1)} < +\infty.$$

$$(2) \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j(y^*) \in F\mathcal{D}^{(\mu)}(\omega_p^{\mathbb{C}}; B)$$

$$\Leftrightarrow \text{det} \quad (i) \quad p_j(y^*) \in \mathcal{O}^{(\mu-j/2)}(\omega_p^{\mathbb{C}}; B)$$

$$(ii) \quad \exists c \geq 0 \text{ s.t. } \sup_{y^* \in \omega^+} \|p_j(y^*)\|_{B(1)} \leq C^{j+1} \sqrt{j!}$$

$$(3) \quad p(y^*) \in \mathcal{S}^{(u)}(\Gamma_{\omega_p}; B)$$

$$\Leftrightarrow (i) \quad p(y^*) \in C^\infty(\Gamma_{\omega_p}; B)$$

$$(ii) \quad \exists c \geq 0 \text{ s.t. } \forall \alpha = (\alpha_+, \alpha_-) \in \mathbb{N}^d$$

$$\|\partial_y^{\alpha_+} \partial_\eta^{\alpha_-} p(y, \eta)\|_{B(|\eta|)} \leq C^{|\alpha|+1} (1+|\eta|)^M |\alpha_+|^{\alpha_+} \left(\frac{|\alpha_-|}{|\eta|}\right)^{\alpha_-}$$

$$\text{for } (y, \eta) \in \Gamma_{\omega_p}, |\eta| \geq c(|\alpha_-|+1)$$

(注意) Cauchy の不等式により $p_0 < p$ ならば $\mathcal{S}^{(u)}(\omega_p^{\mathbb{C}}; B)|_{\Gamma_{\omega_{p_0}}} \hookrightarrow \mathcal{S}^{(u)}(\Gamma_{\omega_{p_0}}; B)$

定義 (3.1.2) $0 < p_0 < p$ とする. $p \in \mathcal{S}^{(u)}(\Gamma_{\omega_{p_0}}; B)$, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j \in FS^{(u)}(\omega_p^{\mathbb{C}}; B)$

に対し, $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$ in $\Gamma_{\omega_{p_0}}$ とす. 適当な $c > 0$ により

次の成り立ちが成り立つ:

$$\|\partial_y^{\alpha_+} \partial_\eta^{\alpha_-} (p(y, \eta) - \sum_{i=1}^{N-1} p_i(y, \eta))\|_{B(|\eta|)} \leq C^{N+1+N+1} (1+|\eta|)^{M-\frac{N}{2}} N^{\frac{N}{2}} |\alpha_+|^{\alpha_+} \left(\frac{|\alpha_-|}{|\eta|}\right)^{\alpha_-}$$

$$\text{for } (y, \eta) \in \Gamma_{\omega_{p_0}}, |\eta| \geq c(|\alpha_-|+N+1)$$

補題 (3.1.3) $\sum_{j=0}^{\infty} p_j \in FS^{(u)}(\omega_p^{\mathbb{C}}; B)$ とする. $\forall p_0 \in (0, p)$ により

$p \in \mathcal{S}^{(u)}(\Gamma_{\omega_{p_0}}; B)$ かつ $p \sim \sum p_j$ in $\Gamma_{\omega_{p_0}}$ とするものが構成できる.

また 他の $p' \in \mathcal{S}^{(u)}(\Gamma_{\omega_{p_0}}; B)$ により $p' \sim \sum p_j$ in $\Gamma_{\omega_{p_0}}$ とすれば $p - p' \sim 0$ in $\Gamma_{\omega_{p_0}}$.

(*) Motivic [6] Lemma 3.2 を用いる.

3.2. $\equiv \equiv \equiv$ $a \in S^m(\Gamma_{wp}) \equiv S^m(\Gamma_{wp} \setminus \mathbb{C})$ の $\mathcal{C}_{N, \mathfrak{g}^*}^+$ への作用は, "2" まで同様.

補題 (3.2.1) $0 < p_0 < p_1 < p_2$ に対し $g = g(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}_\eta^n)$ として

$$(i) \quad \begin{cases} g(\eta) \equiv 0 & \text{for } |\frac{\eta}{|\eta|} - \hat{\eta}| > p_1 \text{ or } |\eta| < 1 \\ g(\eta) \equiv 1 & \text{if } |\frac{\eta}{|\eta|} - \hat{\eta}| < p_1 \text{ and } |\eta| > 2 \end{cases}$$

且つ, 適当な $\tau \in \mathbb{R}$ として,

$$(ii) \quad |\partial_\eta^\alpha g(\eta)| \leq C^\alpha \left(\frac{|\alpha|}{|\eta|} \right)^{|\alpha|/2} \quad \text{for } |\eta| \geq |\alpha|$$

を満たす g の存在する. (Motivier [6] Lemma 3.1)

$\tilde{z} = z$

$$A(y, y') = \int e^{i(y-y') \cdot \eta} a(y, \eta) g(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^n} \in \mathcal{D}'(\pi(\omega_p) \times N)$$

と表わす. $WF_A'(A) \subset \text{diag}(\Gamma_{wp})$ とする. (loc. cit Lemma 3.3)

これより定義した作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(N), \mathcal{D}'(\pi(\omega_p)))$ は factorize して

$$\underline{A} : \mathcal{C}_{N, \mathfrak{g}^*}^+ \rightarrow \mathcal{C}_{\pi(\omega_p), \mathfrak{g}^*}^+ \simeq \mathcal{C}_{N, \mathfrak{g}^*}^+ \quad \text{が得られる. また } a \sim 0 \text{ in } \Gamma_{wp'}$$

($p' < p_0$) ならば $WF_A'(A) \cap (\omega_{p'} \times \omega_{p'}) = \emptyset$ となる. $\underline{A}$ が g によって

与えられることは Bv. $FIS^{(k)}(\omega_p)$ の $\mathcal{C}_{N, \mathfrak{g}^*}^+$ への作用の和の性質

によらずに well defined となることよりわかる. この $\underline{A}$ に対して $\underline{A} \in$

$a(y, D_y) g^*$ と書く. また σ による $\mathcal{E}_{N, \mathfrak{g}^*}^{\mathbb{Z}/2, (k)} \simeq \bigcup_{p>0} FIS^{(k)}(\omega_p)$ へかかる

$\mathcal{E}_{N, \mathfrak{g}^*}^{\mathbb{Z}/2}$ の $\mathcal{C}_{N, \mathfrak{g}^*}^+$ への作用は 定義されたことにより.

補題 (3.3.4) $\exists C = C(d, m)$ s.t.

$$\|PL\|_{\mathcal{L}_R^0(\Lambda)} \leq C \|P\|_{A_R^{(m)}(\Lambda)} \|L\|_{\mathcal{L}_R^{(m)}(\Lambda)} \quad \text{for } P \in A_R^{(m)}(\Lambda), L \in \mathcal{L}_R^{(m)}(\Lambda)$$

$k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_t, \mathcal{H}_{t'})$ の核 $k(u, t') \in \mathcal{H}_t, t'$ と書く. π .

$$\tilde{k}(z, z') = \iint e^{-it'z + it'z'} k(u, t') dt dt' \quad \text{と書く. } (\widehat{k}u = \tilde{k}\hat{u})$$

定義 (3.3.5) $\varepsilon > 0$ に対し. $B_\varepsilon = B_\varepsilon(\lambda)$ を次をみたす Hilbert-

Schmidt 作用素 k の空間 とす:

$$(i) \quad \|e^{\lambda \varepsilon |t_j^2 - t_j'^2|} k(t, t')\|_{L^2(\mathbb{R}_{t, t'}^{2d})} < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, d,$$

$$(ii) \quad \|e^{\varepsilon |z_j^2 - z_j'^2|/\lambda} \tilde{k}(z, z')\|_{L^2(\mathbb{R}_{z, z'}^{2d})} < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

また (i), (ii) の norm の中最大となるものを $\|k\|_{B_\varepsilon(\lambda)}$ と書く.

補題 (3.3.6) (Metivier [67 Prop 2.8]) $m \geq d+1$ ならば. 任意の $R > 0$

に対し. 適当な ε_0, C_0 があり. 次の成り立つ:

$$\|L\|_{B_{\varepsilon_0}(\lambda)} \leq C_0 \|L\|_{\mathcal{L}_R^{(m)}(\Lambda)} \quad \text{for } \forall L \in \mathcal{L}_R^{(m)}.$$

補題 (3.3.7) (loc. cit. Prop 2.9) 任意の $R > 0$. に対し. $\varepsilon_0 > 0$

$C_0 > 0$ があり. $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ならば.

$$\|Lk\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \leq C_0 \|L\|_{\mathcal{L}_R^{(m)}(\Lambda)} \|k\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } L \in \mathcal{L}_R^{(m)}(\Lambda), k \in B_\varepsilon(\lambda).$$

定義 (3.3.8) $h(t) \in H_\varepsilon(\lambda) \quad (\varepsilon > 0)$

$\Leftrightarrow$ (i) $h(t) \in \mathcal{S}_t$

(ii) $\|e^{\lambda \varepsilon t_j^2} h(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_t^d)} < +\infty, \quad j=1, 2, \dots, d.$

(iii) $\|e^{\varepsilon t_j^2/\lambda} \hat{h}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}_\omega^d)} < +\infty, \quad j=1, 2, \dots, d.$

また (ii), (iii) の norm のうち最大のものを $\|h\|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ と書く.

補題 (3.3.9) $\forall R > 0$ に対し $\varepsilon_0, C_0 > 0$ があつて $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対し

$$\|Lh\|_{H_\varepsilon(\lambda)} \leq C_0 \|L\|_{\mathcal{L}_R^{(0)}(\lambda)} \|h\|_{H_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } L \in \mathcal{L}_R^{(0)}(\lambda), h \in H_\varepsilon(\lambda).$$

すなわち $(h_1, \dots, h_n) \in (H_\varepsilon(\lambda))^n$ に対し 作用素 $\mathcal{H}, \mathcal{H}^* \in$

$$\mathcal{H}: \mathbb{C}^n \rightarrow (\mathbb{Z}_\varepsilon)^n \xrightarrow{\quad} \sum_{\ell=1}^n h_\ell(t) \mathbb{Z}_\ell \in \mathcal{S}_t$$

$$\mathcal{H}^*: \mathcal{S}'_t \rightarrow u(t) \xrightarrow{\quad} \left(\int \overline{h_\ell(t)} u(t) dt \right)_{\ell=1}^n \in \mathbb{C}^n$$

と定義する. このような作用素の空間を $\mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}}(\lambda), {}^*\mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}}(\lambda)$ と

表す. $\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}}(\lambda)} = \|\mathcal{H}^*\|_{{}^*\mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}}(\lambda)} = \max_{\ell} \|h_\ell\|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ と定める

また $\sigma(\mathcal{H}) = (h_1, \dots, h_n) \in (H_\varepsilon(\lambda))^n$ と書く.

定義 (3.3.10) $\mathcal{H}_\varepsilon^+(\lambda) = \mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}+}(\lambda), \quad \mathcal{H}_\varepsilon^-(\lambda) = \mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}-}(\lambda)$

$$\text{また } {}^*\mathcal{H}_\varepsilon^+(\lambda) = {}^*\mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}+}(\lambda), \quad {}^*\mathcal{H}_\varepsilon^-(\lambda) = {}^*\mathcal{H}_\varepsilon^{\mathbb{R}-}(\lambda)$$

補題 (3.3.11) $K \in B_\varepsilon(\lambda)$, $H_0, H_1 \in \mathcal{H}_\varepsilon^R(\lambda)$, $H_2 \in \mathcal{H}_\varepsilon^{R'}(\lambda)$ ($\varepsilon > 0$)
 であるとき $KH_0 \in \mathcal{H}_\varepsilon^R(\lambda)$, $H_0H_1^* \in B_\varepsilon(\lambda)$, $H_2^*H_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varepsilon^R, \mathcal{H}_\varepsilon^{R'})$. 更に

$$(1) \|KH_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^R(\lambda)} \leq \|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \|H_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^R(\lambda)}$$

$$(2) \|H_0H_1^*\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \leq R \|H_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^R(\lambda)} \|H_1\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^R(\lambda)}$$

$$(3) \|H_2^*H_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varepsilon^R, \mathcal{H}_\varepsilon^{R'})} \leq \|H_2\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{R'}(\lambda)} \|H_1\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^R(\lambda)}$$

補題 (3.3.12) (Metivier [6] prop 2.10, Okaj [7] Lemma 4.2)

$M = M(d)$ が存在し、任意の $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$ に対して、次の成立:

$$(1) \|(\text{ad } T_j)(K)\|_{B_{\varepsilon'}(\lambda)} \leq M \left(\frac{M}{\varepsilon - \varepsilon'} \right)^{\frac{1}{2}} \|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } \begin{cases} K \in B_\varepsilon(\lambda) \\ j \geq 1, -j \neq d \end{cases}$$

$$(2) \|T_j(h)\|_{H_\varepsilon(\lambda)} \leq M \left(\frac{M}{\varepsilon - \varepsilon'} \right)^{\frac{1}{2}} \|h\|_{H_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } \begin{cases} h \in H_\varepsilon(\lambda) \\ j \geq 1, -j \neq d \end{cases}$$

定義 (3.3.13) $\mathcal{R}(t, z) \in G^{\frac{1}{2}(m)}_R(\lambda) \quad (m \geq 0, R > 0)$

$$\Leftrightarrow \text{def} \quad (i) \quad \mathcal{R}(t, z) \in C^\infty(\mathbb{R}_{t,z}^{2d})$$

$$(ii) \quad \exists C \quad \rho - \delta$$

$$\sup_{\mathbb{R}_{t,z}^{2d}} \left(\frac{|\partial_t^{\alpha_+} \partial_z^{\alpha_-} \mathcal{R}(t, z)|}{\lambda^{(|\alpha_+| + |\alpha_-|)/2} (1 + \lambda^{\frac{1}{2}} t + \lambda^{-\frac{1}{2}} z)^m} \right) \leq C R^{|\alpha|} \sqrt{\alpha!}$$

$K(t, +) \in \mathcal{A}'_{+, +}$ は核関数であり、作用素 K に対して、 $\mathcal{R} = \mathcal{O}(K)$

と

$$k(t, \tau) = \int k(t, t-\tau) e^{-it'\tau} dt'$$

と表わす

$$k u(t) = k(t, D_t) u(t) = \int e^{it\tau} k(t, \tau) \hat{u}(\tau) \frac{d\tau}{(2\pi)^d}$$

と表わす.

$$\sigma((\text{ad} T)^\alpha(k)) = \lambda^{(\alpha-1-\alpha+1)/2} \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \sigma(k) \quad \text{と補題 (3.3.12)}$$

より 22 となる.

補題 (3.3.15) $\forall \varepsilon > 0$ に対し. $R > 0, C > 0$ が有り

$$\|\sigma(k)\|_{G_R^{\frac{1}{2}}(Q)} \leq C \|k\|_{B_\varepsilon(Q)} \quad \text{for } k \in B_\varepsilon(Q).$$

§ 4. ハミルトリヤの構成

$$P = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} C_{\alpha\beta}(y, D_y) t^\alpha D_t^\beta \quad \text{は } S^2 \text{ で与えられる. とする.}$$

以下では簡単のため $\mu = 0$ と仮定しておく. $\rho \in (0, \infty)$ とし

$$\sigma(C_{\alpha\beta}) = \sum_{j=1}^n C_{\alpha\beta}^{(j)}(y^+) \in FS^{(\frac{m-|\alpha|}{2})}(\omega_P^{\mathbb{C}}), \quad \text{としよう.}$$

$$\hat{P}_j(y^+) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} C_{\alpha\beta}^{(j)}(y^+) t^\alpha D_t^\beta \in O^{(-\frac{\rho}{2})}(\omega_P^{\mathbb{C}}; A^m)$$

$$\text{とすると} \quad \hat{P}(y^+) \equiv \sum \sigma(C_{\alpha\beta}(y^+)) t^\alpha D_t^\beta = \sum_{j=1}^n \hat{P}_j(y^+) \in FS^{(0)}(\omega_P^{\mathbb{C}}; A^m),$$

$$\text{とすると} \quad \exists \pi \quad \hat{P}_0^+(y^+) = \hat{\sigma}_\pi(P)_{y^+} \quad \text{となる.}$$

$$y^+ \in \omega_P^{\mathbb{C}} \text{ に対し: } \hat{P}_0^+(y^+) = (\hat{P}_0(\bar{y}^+))^* \quad \text{と}$$

$$\hat{P}_0^* \hat{P}_0(y^+) = \hat{P}_0^+(y^+) \hat{P}_0(y^+), \quad \hat{P}_0 \hat{P}_0^+(y^+) = \hat{P}_0(y^+) \hat{P}_0^+(y^+) \quad \text{と} \quad \text{等しく.}$$

必要なら P_0 と P_0^+ は $\forall y^+ \in \omega_P^c$ で

$$|\sum_{|k|+|l|=m} c_{\alpha, \beta}^{(0)}(y^+) t^\alpha \tau^\beta| \geq C(|t|+|\tau|)^m \quad (C > 0)$$

が成り立つとする。このとき $\hat{P}_0^* \hat{P}_0$ 及び $\hat{P}_0 \hat{P}_0^*$ は $\hat{P}_0$ と $\hat{P}_0^+$ に $\mathcal{S}'_t$ から $\mathcal{S}'_t$ への Fredholm op. となる。

また $\gamma < \alpha$ を原点を正の方向にまわす曲線とする。

$\hat{P}_0^* \hat{P}_0(y^+)$ 及び $\hat{P}_0 \hat{P}_0^+(y^+)$ の 0 以外の固有値を内部に含みません。と仮定する。 $P_0 \in (0, \infty)$ を小さくとり、 $\forall y^+ \in \omega_P^c, \forall \gamma \in \gamma$ に対して $\text{resolvent } (\hat{P}_0^* \hat{P}_0 - \gamma)^{-1}, (\hat{P}_0 \hat{P}_0^* - \gamma)^{-1}$ が存在する。 $\gamma =$ τ , $y^+ \in \omega_P^c$ に対して。

$$\hat{Q}_0(y^+) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} \tau^{-1} (\hat{P}_0^* \hat{P}_0(y^+) - \tau)^{-1} d\tau \right) \hat{P}_0^+(y^+)$$

$$\hat{\pi}_+^{(0)}(y^+) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\hat{P}_0^+ \hat{P}_0(y^+) - \tau)^{-1} d\tau$$

$$\hat{\pi}_-^{(0)}(y^+) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\hat{P}_0 \hat{P}_0^+(y^+) - \tau)^{-1} d\tau$$

$$\hat{E}_{\pm}^{(0)}(y^+) = \hat{\pi}_{\pm}^{(0)}(y^+) \mathcal{S}'_t \subset \mathcal{S}_+.$$

と置く。 $\hat{\pi}_+^{(0)}(y^+)$ (resp. $\hat{\pi}_-^{(0)}(y^+)$) は $\text{Ker } \hat{P}_0(y^+)$ (resp. $\text{Ker } \hat{P}_0^+(y^+)$) $\cong \text{Coker } \hat{P}_0(y^+)$ への射影作用素となることを注意する。また P_0 のとり方から $\dim \hat{E}_{\pm}^{(0)}(y^+)$ は ω_P^c 上一定 (すなわち $k_{\pm}$) である。

命題 (4.1) (1) $\exists R_0$ s.t. $\hat{Q}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{P_0}^{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{R_0}^m)$

(2) $\hat{E}_+^{(0)}(y^*)$ (resp. $\hat{E}_-^{(0)}(y^*)$) γ $L^2(\mathbb{R}_t^d)$ に對して直交基底 $\{h_{\pm l}^{(0)}(t; y^*)\}_{l=1}^{l_{\pm}}$ (resp. $\{h_{\pm l}^{(0)}\}_{l=1}^{l_{\pm}}$) を適當に P_0 に對し.

$$h_{\pm l}^{(0)}(t; y^*) \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{P_0}^{\mathbb{C}}; H_{E_0}), \quad l=1, 2, \dots, l_{\pm}$$

とすることができる.

註) (1) については Métivier [6] Prop 2.3. (2) については Kato [4]

VII, Theorem 3.9 と Melin [5] Appendix を参照.

$\{h_{\pm l}^{(0)}\}$ から作用素 $\hat{H}_{\pm 0} \in \mathcal{H}_{E_0}^{\pm}$, $\hat{H}_{\pm 0}^* \in \mathcal{H}_{E_0}^{\pm}$ を

$$\hat{H}_{\pm 0}(y^*): \mathbb{C}^{l_{\pm}} \ni (z_l)_{l=1}^{l_{\pm}} \mapsto \sum_{l=1}^{l_{\pm}} h_{\pm l}^{(0)}(t; y^*) z_l \in \mathcal{H}$$

$$\hat{H}_{\pm 0}^*(y^*): \mathcal{H}' \ni u(t) \mapsto \left(\int \overline{h_{\pm l}^{(0)}(t; \bar{y}^*)} u(t) dt \right)_{l=1}^{l_{\pm}} \in \mathbb{C}^{l_{\pm}}$$

を定義すると, $\hat{\Pi}_{\pm}^{(0)}(y^*) = \hat{H}_{\pm 0}(y^*) \hat{H}_{\pm 0}^*(y^*)$ と表すことができる.

さらに

$$\hat{M}_0(y^*) = -\hat{H}_{-0}^*(y^*) \hat{P}_0(y^*) \hat{H}_{+0}(y^*);$$

と表すことができる.

$$(4.2) \quad \hat{M}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{P_0}^{\mathbb{C}}; m(\pm))$$

となり 2 次可成である。

奇題 (4.3) $\forall y \neq \omega_{p_0}^{\sigma}$ に対し

$$(1) \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{+0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{-0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathcal{H}_+} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{\mathcal{H}_-} \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{-0}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{+0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathcal{H}_+} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{\mathcal{H}_-} \end{pmatrix}$$

(証明は レゾルバント 方程式を用いて 容易にできる Kato [47] 138-139 を見よ.)

よって

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \begin{pmatrix} \hat{P} & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{P}_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \hat{L}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{L}_j \end{aligned}$$

よって $\hat{L}$ の右パラメトリックス $\hat{E}$ を

$$\hat{F}_0 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{-0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{E}_j$$

なる形で構成しよう。

(4.7) の ψ .d.op の symbol 積を $\#$ で表わし. $\hat{L}^{(\omega)} = \partial_{\eta}^{\alpha} \hat{L}$

$\hat{E}_{(\alpha)} = D_{\mathbf{g}}^{\alpha} \hat{E}$ なる関係を用いると.

$$\hat{L} \# \hat{E} - \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j+2l=l} \frac{1}{\alpha!} \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_j^{(\alpha)} \right)$$

と書きかえ、 $\{\hat{E}_j\}$ を

$$(4.4) \quad \sum_{i+j+2l=l} \frac{1}{\alpha!} \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_j^{(\alpha)} = 0, \quad l=1, 2, \dots$$

で表わすように定めればよい.

(4.4) の左から $\hat{E}_0$ を作用させ、(4.3) の (1) を用いると、 $\{\hat{E}_j\}_{j \geq 1}$

は 式 (4.4) より 帰納的に決定される:

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{E}_1 = -\hat{E}_0 \hat{L}_1 \hat{E}_0 = \begin{pmatrix} -\hat{Q}_0 \hat{P}_1 \hat{Q}_0 & -\hat{Q}_0 \hat{P}_1 \hat{H}_{+0} \\ -\hat{H}_{+0}^* \hat{P}_1 \hat{Q}_0 & -\hat{H}_{+0}^* \hat{P}_1 \hat{H}_0 \end{pmatrix} \\ \hat{E}_2 = -\hat{E}_0 \hat{L}_2 \hat{E}_0 - \hat{E}_0 \hat{L}_1 \hat{E}_1 - \sum_{j=1}^{\infty} \hat{E}_0 (\partial_{\eta_j} \hat{L}_0) (D_{\mathbf{g}_j} \hat{E}_0) \\ \quad = -\hat{E}_0 \hat{L}_2 \hat{E}_0 + \hat{E}_0 \hat{L}_1 \hat{Q}_0 \hat{L}_1 \hat{E}_0 + i \hat{E}_0 \langle \nabla_{\eta} \hat{L}_0, \nabla_{\mathbf{g}} \hat{E}_0 \rangle \\ \vdots \\ \hat{E}_l = - \left(\sum_{\substack{i+j+2l=l \\ j \leq l-1}} \frac{1}{\alpha!} \hat{E}_0 \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_j^{(\alpha)} \right) \\ \vdots \end{array} \right.$$

命題 (4.6) r は $(2r+1)m \geq d+1$ とする最小の整数とする.

$\hat{E}_j = \begin{pmatrix} \hat{Q}_j & \hat{H}_{+j} \\ \hat{H}_{-j} & \hat{H}_j \end{pmatrix} \quad (j \geq 1)$ は (4.5) により定めると、適当な $\rho > 0$

$\varepsilon_1 > 0$, $R_1 > 0$ に對して. 次が成立する.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma(\hat{Q}_j) \in FS^{(0)}(\omega_{P_1}^{\varepsilon}; G_{R_1}^{\frac{1}{2}, (2rm)}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma(\hat{H}_{\pm, j}) \in FS^{(0)}(\omega_{P_1}^{\varepsilon}; (H_{\varepsilon_0})^{k_{\pm}}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma(\hat{A}_j) \in FS^{(0)}(\omega_{P_1}^{\varepsilon}) \otimes \mathbb{C}^{k_- \times k_+}.$$

(証明の概略は §5 で与える.)

まったく同様に $\hat{L}$ の左パラメトリックスも構成されるから, $\hat{E} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{E}_j$ は井積に因りて $\hat{L}$ の両側パラメトリックスとなることを示すことができる.

さて, $P_2 \in (0, P_1)$ に對して, 補題 (3.1.3) により

$$q(t, \tau; y, \eta) \in S^{(0)}(\Gamma_{\omega_{P_2}}; G_{R_1}^{\frac{1}{2}, (2rm)}),$$

$$(h_{\pm, \ell}(t; y, \eta))_{\ell=1}^{k_{\pm}} \in S^{(0)}(\Gamma_{\omega_{P_2}}; (H_{\varepsilon_1})^{k_{\pm}})$$

$$(m_{\ell, \ell'}(y, \eta))_{\substack{\ell=1 \dots k_- \\ \ell'=1 \dots k_+}} \in S^0(\Gamma_{\omega_{P_2}}) \otimes \mathbb{C}^{k_- \times k_+}$$

で $q \sim \sum \sigma(\hat{Q}_j)$, $(h_{\pm, \ell})_{\ell=1}^{k_{\pm}} \sim \sum \sigma(\hat{H}_{\pm, j})$, $(m_{\ell, \ell'}) \sim \sum_{\substack{\ell=1 \dots k_- \\ \ell'=1 \dots k_+}} \sigma(\hat{A}_j)$ 在 $\Gamma_{\omega_{P_2}}$ とするところからわかる.

また,

$$\phi_N(y) \in C_0^\infty(|y - y_0| < P_2), \quad \phi_N(t, y) \in C_0^\infty(|t| < P_2, |y - y_0| < P_2)$$

$\varepsilon \eta, (0, \eta)$ の近傍 $\tau \equiv 1$ とする；

$$g_N(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}_\eta^n), \text{ supp } g_N \subset \{\eta \in \mathbb{R}^n; |\frac{\eta}{m_1} - \eta| < \rho_2\}$$

$$g_M(\tau, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}_{\tau, \eta}^{d+n}), \text{ supp } g_M \subset \{(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^{d+n}; |\tau| < \rho_2, |\frac{\eta}{m_1} - \eta| < \rho_2\}$$

$\varepsilon \eta, (0, \eta)$ の近傍 $\tau \equiv 1$ とする，補題 (3.2.1) τ と $\bar{\tau}$

は $\mathbb{R}^d$ 上の f.t. とする。

τ は τ 同値。

$$Q = S(\hat{Q})(t, D_t; y, D_y)_{y^+} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(N), \mathcal{E}'(M))$$

$$H_{\pm} = \hat{H}_{\pm}(t; y, D_y)_{y^+} \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{\mathbb{R}_{\pm}}, \mathcal{E}'(M))$$

$$K = \hat{M}(y, D_y)_{y^+} \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{\mathbb{R}_+}, (\mathcal{E}'(N))^{\mathbb{R}_-})$$

$\mathbb{E}$.

$$Q u(t, y) = \iint e^{i t z + i y \eta} q(t, z; y, \eta) \phi_M(t, y) g_M(z, \eta) \hat{u}(\tau, \eta) \frac{d\tau d\eta}{(2\pi)^{d+n}}$$

$$H_{\pm} v(t, y) = \sum_{\ell=1}^{k_{\pm}} \int e^{i y \eta} h_{\pm \ell}(t; y, \eta) \phi_M(t, y) g_N(\eta) \hat{v}_{\ell}(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^n}$$

$$(M v(t, y))_{\ell} = \sum_{\ell'=1}^{k_+} \int e^{i y \eta} m_{\ell \ell'}(y, \eta) \phi_N(y) g_N(\eta) \hat{v}_{\ell'}(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^n}$$

により 定まる。

また,

$$P = \mathcal{O}(\hat{P})(t, D_t; y, D_y)_{\mathcal{L}(\mathcal{E}'(M), \mathcal{E}'(M))} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(M), \mathcal{E}'(M))$$

$$H_{\pm 0} = \hat{H}_{\pm 0}(t; y, D_y)_{\mathcal{L}(\mathcal{E}'(N))^{\pm}, \mathcal{E}'(M)} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(N))^{\pm}, \mathcal{E}'(M))$$

と同様に定義して置く. すると, $\mathcal{E}'$ は $\mathcal{E}'$ の μ による micro local で

$$\begin{pmatrix} Q & H_+ \\ H_-^* & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & H_- \\ H_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{on} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_M^f(\mathcal{E}'_+) \\ (\mathcal{E}_N^f(\mathcal{E}'_+))^{\pm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & H_- \\ H_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & H_+ \\ H_-^* & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{on} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_M^f(\mathcal{E}'_+) \\ (\mathcal{E}_N^f(\mathcal{E}'_+))^{\pm} \end{pmatrix}$$

となる. 同様に.

定理 (4.7) Q は $\mathcal{L}(\mathcal{E}'_+)$ の micro local , $H_{\pm 0} H_{\pm}$ は $\mathcal{E}'_+$ の micro local に $\mathcal{L}(\mathcal{E}'_+)$ micro local である. 以下に示す:

$$\forall u \in \mathcal{E}'(M) \text{ に対して}$$

- (1) $Q P u + H_+ H_{+0}^* u \equiv u \quad \text{mod } \mathcal{A}_M(\mathcal{E}'_+)$
- (2) $P Q u + H_- H_-^* u \equiv u \quad \text{mod } \mathcal{A}_M(\mathcal{E}'_+)$
- (3) $H_-^* P u + M H_{+0}^* u \equiv 0 \quad \text{mod } (\mathcal{A}_N(\mathcal{E}'_+))^{\pm}$

$$\forall v_{\pm} \in (\mathcal{E}'(N))^{\pm} \text{ に対して}$$

- (4) $P H_+ v_+ + H_- M v_+ \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{A}_M(\mathcal{E}'_+)$

$$(5) \quad H_{+0}^* H_{+} v_{+} \equiv v_{+} \quad \text{mod } (A_N g_{+})^{k_{+}}$$

$$\forall v_{-} \in (E'(N))^{k_{-}} \quad \text{is true.}$$

$$(6) \quad H_{-0}^* H_{-} v_{-} \equiv v_{-} \quad \text{mod } (A_N g_{+})^{k_{-}}$$

[定理 (4.7) $\Rightarrow$ 定理 (2.2)]

(4) is H_{+} is $\ker(H_{+}) \subset \ker(P)$ の中にうつすことを示す.

(5) により $\subset$ の写像. (1) により $\subset$ の写像となる.

— $\hat{H}_{-}$ (3) is $H_{-}^*(\text{Rang}(P)) \subset \text{Rang}(M)$ を示す. $\mathbb{N}$ により $[H_{-}^*]:$

$\text{Coker}(P) \rightarrow \text{Coker}(M)$ を induce する. (2) により $\subset$ の写像.

(6) により $\subset$ の写像となる.

公式 (4.8)

$$\hat{M}_0(y^*) = -\hat{H}_{-0}^* \hat{P}_0 \hat{H}_{+0}$$

$$\sigma(M)_{x,x'} = - \int \overline{h_{-e}^{(0)}(t; \bar{y}^*)} (\hat{P}_0(y^*) h_{+e}^{(0)}(\cdot; y^*)) (t) dt$$

$$\hat{M}_1(y^*) = -\hat{H}_{-0}^* \hat{P}_1 \hat{H}_{+0}$$

$$\sigma(M)_{x,x'} = - \int \overline{h_{-e}^{(0)}(t; \bar{y}^*)} (\hat{P}_0(y^*) h_{+e}^{(0)}(\cdot; y^*)) (t) dt.$$

$$\hat{M}_2(y^*) = -\hat{H}_{-0}^* \hat{P}_2 \hat{H}_{+0} + \hat{H}_{-0}^* \hat{P}_1 \hat{Q}_0 \hat{P}_1 \hat{H}_{+0}$$

$$+ \lambda [\hat{H}_{-0}^* \langle \nabla_{\bar{r}} \hat{P}_0, \nabla_{\bar{y}} \hat{H}_{-0} \rangle + H_{-0}^* \langle \nabla_{\bar{r}} H_{+0}, \nabla_{\bar{y}} M_0 \rangle$$

$$+ M_0 \langle \nabla_{\bar{r}} H_{+0}^*, \nabla_{\bar{r}} \hat{H}_{+0} \rangle]$$

$\vdots$

$$\hat{M}_j(y^*) = -\hat{H}_{-0}^* \hat{P}_j \hat{H}_{+0} + F(\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_{j-1}, \hat{Q}_0, \hat{H}_{+0}, \hat{M}_0)$$

$\vdots$

§5 奇題 (4.6) の証明の概略.

$r \in (2r+1)m \geq d+1$ とし. $\hat{A}_0 = (p_0 p_0^* + 1)^r \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{p_0}^r; A^{(2rm)})$
 とおくと $\ker \hat{A}_0(y) = \{0\}$ より $\hat{A}_0^{-1}$ が存在し.

$$(5.1) \quad \hat{A}_0^{-1} \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{p_0}^r; \mathcal{A}_{R_0}^{(2rm)}) \quad \text{for some } p_0, R_0 > 0$$

とあり. また $\tilde{Q}_0 = \hat{Q}_0 \hat{A}_0^{-1}$ とおくと. $\tilde{Q}(\hat{A}_0 \hat{p}_0) = (1 - \pi_+^{(0)})$,

$(\hat{A}_0 \hat{p}_0) \tilde{Q}_0 = (1 - \pi_-^{(0)})$ とあり. $\therefore$ 2.2.2.1 Metivier [7] prop 2.3 を用いて

$$(5.2) \quad \tilde{Q}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{p_0}^r; \mathcal{A}_{R_0}^{(2r+1)m}) \hookrightarrow \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{p_0}^r; B_{\varepsilon_0})$$

for some $p_0, R_0, \varepsilon_0 > 0$.

を得る.

定義 (5.3) $\varepsilon > 0$ に対し. $\mathcal{E}_\varepsilon$ を次の形の作用素の空間とす:

$$E = \begin{pmatrix} Q & H_+ \\ H_- & M \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}_+^1 \\ \mathbb{C}^{2r} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{S}_+^1 \\ \mathbb{C}^{2r} \end{pmatrix}$$

すなわち. $Q \in B_\varepsilon$, $H_\pm \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm$, $M \in m(\pm)$, かつ.

$$\|E\|_{\mathcal{E}_\varepsilon} \equiv \max \{ \|Q\|_{B_\varepsilon}, \|H_\pm\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\pm}, \|M\|_{m(\pm)} \}$$

とす.

$$\text{すなわち. } \tilde{E}_j = \hat{E}_j \begin{pmatrix} \hat{A}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_j \hat{A}_0^{-1} & \hat{H}_{+,j} \\ \hat{H}_{-,j}^* \hat{A}_0^{-1} & \hat{M}_j \end{pmatrix} \quad \text{と置く.}$$

補題 (3.3.4), (3.3.7), (3.3.9), (3.3.11). と Cauchy の不等式を用い

て示す. 次が示す通り.

命題 (5.4) $p_0 > 0$ $\varepsilon_0 > 0$ $C > 0$ が存在し, $\forall p \in (0, p_0)$ に対し
次の成立:

$$\sup_{y \in \omega_p^c} \|\tilde{E}_j\|_{\Sigma_{\varepsilon_0}} \leq C \left(\frac{C_j}{p_0 - p} \right)^{j/2} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tilde{E}_j = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_j & \tilde{H}_{+j} \\ \tilde{H}_{-j} & \tilde{M}_j \end{pmatrix} \quad \text{と書ける} \quad \text{命題 (5.4) は } \forall p \in (0, p_0) \text{ に対し}$$

- $\sum \tilde{Q}_j \in FS^{(0)}(\omega_p^c; B_{\varepsilon_0}) \xrightarrow{C} FS^{(0)}(\omega_p^c; G_R^{\frac{1}{2}}(0)) \quad (R = R(\varepsilon_0))$
- $\sum \tilde{H}_{\pm} \in FS^{(0)}(\omega_p^c; \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{\pm}) \xrightarrow{C} FS^{(0)}(\omega_p^c; (H_{\varepsilon_0}^{\pm})^{\pm})$
- $\sum \tilde{M} \in FS^{(0)}(\omega_p^c; m(\pm)) \xrightarrow{C} FS^{(0)}(\omega_p^c) \otimes \mathbb{C}^{2 \times 2}$

と書ける。

$$\sigma(\hat{A}_0) = a_0(t, z; y, \eta), \quad \sigma(\hat{A}_0^*) = a_0^*(t, z; y, \eta) \quad \text{と表される。}$$

$$q_j^{(j)}(t, z; y, \eta) = \sum_{|\alpha| \leq 2rm} \frac{1}{\alpha!} (\partial_z^\alpha \tilde{Q}_j)(t, z; y, \eta) (D_t^\alpha a_0)(t, z; y, \eta)$$

$$h_{-}^{(j)}(t; y, \eta) = \sum_{|\alpha| \leq 2rm} \frac{1}{\alpha!} (\partial_z^\alpha a_0^*)(t, 0; y, \eta) (D_t^\alpha \tilde{H}_{-})(t; y, \eta)$$

$$h_{+}^{(j)}(t; y, \eta) = \sigma(\tilde{H}_{+})(t; y, \eta), \quad m_{\pm}^{(j)} = \sigma(\tilde{M}_{\pm})$$

と表ける。これより $\hat{Q}_j, \hat{H}_{\pm j}, \hat{M}_j$ の symbol を与え、補題

(3.3.12) と (3.3.15) より 命題 (4.6) が証明される。

§ 6. 例

まず、 $k = 0, 1, 2, \dots$ に對し

$$\psi_k(x) = (2^k k! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \left(x - \frac{d}{dt}\right)^k e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

と置く、

$$\left(-\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + t^2\right) \psi_k(x) = (2k+1) \psi_k(x)$$

$$(\psi_k(x), \psi_l(x))_{L^2} = \delta_{l,k}$$

である。また

$$(\psi_k(x), t \psi_l(x))_{L^2} = \sqrt{\frac{k+1}{2}} \delta_{l,k+1} + \sqrt{\frac{k}{2}} \delta_{l,k-1}$$

$$(\psi_k(x), t^2 \psi_l(x))_{L^2} = (k+\frac{1}{2}) \delta_{l,k} + \frac{\sqrt{(k+1)(k+2)}}{2} \delta_{l,k+2} + \frac{\sqrt{k(k-1)}}{2} \delta_{l,k-2}$$

に注意して置く。

例 (6.1)

$$P(k) = D_y^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^d (D_{x_j}^2 + t_j^2) - (d+2k) D_y \right\} \quad \text{at } (0,0;dy) \in T^*(\mathbb{R}_{x,y}^{d+1})$$

を考える。 $\hat{x}_j = x_j |y|^{-\frac{1}{2}}$, $\hat{D}_j = |y|^{-\frac{1}{2}} D_{x_j}$ と書く。

$$\hat{P}(k) = \hat{P}_0 = |\hat{D}|^2 + |\hat{x}|^2 - (d+2k)$$

である。 また上の $\psi_k(x)$ を用いて、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ に對し

$$\hat{h}_\alpha(x; y) = |y|^{\frac{d}{4}} \prod_{j=1}^d \psi_{\alpha_j}(\hat{x}_j)$$

とおき、

$$|\hat{h}_\alpha\rangle : \mathbb{C} \ni z \mapsto z \hat{h}_\alpha(t; \eta) \in \mathcal{S}_t$$

$$\langle \hat{h}_\alpha | : \mathcal{S}'_t \ni u(t) \mapsto (\hat{h}_\alpha(t; \eta), u(t))_{L^2(\mathbb{R}^d)} \in \mathbb{C}$$

と書く (Dirac 記法)

$$\hat{Q}(k) = \sum_{|\alpha| \neq k} \frac{1}{2(|\alpha| - k)} |\hat{h}_\alpha\rangle \langle \hat{h}_\alpha|$$

$$\hat{H}_+(k) = \hat{H}_-(k) = \bigoplus_{|\alpha|=k} |\hat{h}_\alpha\rangle : \mathbb{C}^{\#\{|\alpha|=k\}} \rightarrow \mathcal{S}_t$$

$$\hat{M} = - \langle \hat{h}_{\alpha_2} | \hat{P}_0 | \hat{h}_{\alpha_1} \rangle_{|\alpha_1|=|\alpha_2|=k} = (0)$$

とある。

よって、

$$H(k) = \bigoplus_{|\alpha|=k} \hat{h}_\alpha(t; D_y) : (\mathcal{E}'(\mathbb{R}_y))^{\#\{|\alpha|=k\}} \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{t,y}^{d+1})$$

0. 同型

$$(\mathcal{C}_{\mathbb{R}, (0, dy)}^f)^{\#\{|\alpha|=k\}} \simeq \ker(P(k) : \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{d+1}, (0,0; dy)}^f \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{d+1}, (0,0; dy)}^f)$$

$$(\mathcal{C}_{\mathbb{R}, (0, dy)}^f)^{\#\{|\alpha|=k\}} \simeq \operatorname{coker}(P(k) : \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{d+1}, (0,0; dy)}^f \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^{d+1}, (0,0; dy)}^f)$$

$$\exists \text{ と } \exists. \quad (\#\{|\alpha|=k\} = \binom{d+k-1}{k})$$

例 (6.2) ($P(\omega)$ の振動計算)

$$P = P(0) + D_y^{-1} \left\{ \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j D_y + \sum_{j=1}^d (b_j D_{x_j} + b'_j x_j D_y) + c \right\}$$

at. $(0,0; dy)$. とある。

$$\hat{P}(\eta) = \hat{P}_0 + \hat{P}_1 + \hat{P}_2$$

$$= (|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b}'|^2 - d) + m^{-\frac{1}{2}} \sum (b_j \hat{D}_j + b'_j \hat{t}_j) + m^{-1} \left(\sum_{i \leq j} a_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j + c \right)$$

$$\hat{Q}_0(\eta) = \sum_{|\alpha| \neq 0} \frac{1}{2|\alpha|} |\hat{h}_\alpha\rangle \langle \hat{h}_\alpha|$$

$$\hat{H}_0(\eta) = \hat{H}_{-0}(\eta) = |\hat{h}_{(0)}\rangle \quad ((0) = (0, \dots, 0))$$

次に 3. $d \geq 2$

$$\hat{M}_0(\eta) = -\langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_0 | \hat{h}_{(0)} \rangle = 0$$

$$\hat{M}_1(\eta) = -\langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle = 0$$

$$|\eta| \hat{M}_2(\eta) = -\langle \hat{h}_{(0)} | |\eta| \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle + \langle \hat{h}_{(0)} | |\eta| \hat{P}_1 \hat{Q}_0 \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= - \sum_{i \leq j} \langle \hat{h}_{(0)} | a_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j + c | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$+ \sum_{i,j} \left(\sum_{|\alpha| \neq 0} \frac{1}{2|\alpha|} \langle \hat{h}_{(0)} | b_i \hat{D}_i + b'_i \hat{t}_i | \hat{h}_\alpha \rangle \langle \hat{h}_\alpha | b_j \hat{D}_j + b'_j \hat{t}_j | \hat{h}_{(0)} \rangle \right)$$

$= = \tau$

$$\langle \hat{h}_{(0)} | \hat{t}_i \hat{t}_j | \hat{h}_{(0)} \rangle = \frac{1}{2} \delta_{i,j}$$

$$(b_j \hat{D}_j + b'_j \hat{t}_j) | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2} (b'_j + i b_j) (\hat{t}_j - i \hat{D}_j) + \frac{1}{2} (b'_j - i b_j) (\hat{t}_j + i \hat{D}_j) \right) | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (b'_j + i b_j) | \hat{h}_{(j)} \rangle \quad ((j) = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0))$$

次に 4. $d \geq 4$

$$|\eta| \hat{M}_2 = -\left(c + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d a_{jj} \right) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d (b_j^2 + b'_j{}^2)$$

$$A \hat{z} = \sum_{j=1}^d (b_j^2 + b_j'^2 - 2a_{jj}) - 4c \neq 0$$

$$\Rightarrow P = (0, 0; dy) \text{ is A-n.h.e.}$$

※ 要するところには高次の項も計算可能

例 3.5: $b_j = b_j' = 0 \quad (V_j), \quad c = 0$ の場合.

$$\hat{M}_0 = \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3 = 0$$

$$|\eta|^2 \hat{M}_4 = |\eta|^2 \langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_2 \hat{Q}_0 \hat{P}_2 | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \sum_{i < j} a_{ij}^2 \frac{|\langle \hat{h}_{(i,j)} | \hat{f}_i \hat{f}_j | \hat{h}_{(0)} \rangle|^2}{4}$$

$$+ \sum_{j=1}^d a_{jj}^2 \frac{|\langle \hat{h}_{(2j)} | \hat{f}_j^2 | \hat{h}_{(0)} \rangle|^2}{4}$$

$$\begin{pmatrix} (i,j) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ (2j) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \sum_{i < j} a_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d a_{jj}^2 \right).$$

例 (6.3) ($P(2)$ ($d=2$) からの擾動計算).

$$\underline{P} = D_y^{-1} \{ D_{t_1}^2 + D_{t_2}^2 - (t_1^2 + t_2^2) D_y^2 - 6D_y + (a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2 + 2b t_1 t_2) D_y \}$$

at $(0; dy) \in T^*(\mathbb{R}_{t,y}^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\hat{P} = \hat{P}_0 + \hat{P}_2 = (|\hat{D}|^2 + \hat{t}^2 - 6) + |\eta|^{-1} (a_1 \hat{f}_1^2 + a_2 \hat{f}_2^2 + 2b \hat{f}_1 \hat{f}_2)$$

$$\hat{H}_{+0} = \hat{H}_{-0} = \bigoplus_{|\alpha|=2} \hat{H}_\alpha = (\hat{h}_{(0,0)}, \hat{h}_{(1,1)}, \hat{h}_{(0,2)}). \therefore \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathcal{S}_\lambda.$$

$$\therefore \hat{M}_0 = \hat{M}_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 |1\rangle \hat{M}_2 |n\rangle &= - \sum_{j=1}^2 a_j \langle \hat{h}_{\alpha_1} | \hat{t}_j^z | \hat{h}_{\alpha_2} \rangle - \kappa b \langle \hat{h}_{\alpha_1} | \hat{t}_1 \hat{t}_2 | \hat{h}_{\alpha_2} \rangle \\
 &\quad (\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa) \\
 &= -a_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - a_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} - \kappa b \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と 53.

$$\det(\eta_1 \hat{M}_2) = -\frac{3}{8} (a_1 + a_2)(5a_1 + a_2)(a_1 + 5a_2) + 6(a_1 + a_2)b^2$$

なるが、次の条件を得る:

$$a_1 + a_2 \neq 0, \text{ かつ } 5(a_1 + a_2)^2 + 16(a_1 a_2 - b^2) \neq 0$$

$$\Rightarrow P \text{ は } (0, dy) \text{ 上 } A\text{-m.h.e.}$$

以下は結果のみを書く。

$$\text{例 (6.4)} \quad P = D_{y_2}^{-1} \{ D_t^2 + t^2 D_{y_2}^2 - (1 + iy_1) D_{y_2} - D_{y_1} \} \text{ at } (0, dy_2)$$

$$\hat{H}_{+0} - \hat{H}_{-0} = \left(\frac{\eta_2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}\eta_2} \quad (\eta_2 > 0)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_2 + \dots, \quad \hat{M}_0 = \eta_2^{-1} (\eta_1 + iy_1 \eta_2)$$

よって

$$(1) \quad P \text{ は } (0, dy_2) \text{ 上 } A\text{-m.h.e.}$$

$$(2) \quad \text{Coker}(P) \cong \text{Coker}(H) \cong \mathcal{C}_{\mathbb{R}_{y_2}, (0, dy_2)}^f$$

$$\text{例 (6.5)} \quad P = D_{y_2}^{-1} \{ D_x^2 + t^2 |D_{y_2}|^2 - (1 - \frac{1}{2} y_1^2) D_{y_2} - c \} \text{ at } (0, dy_2)$$

$$\hat{H}_{+0} - \hat{H}_{-0} = \left(\frac{|n|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}|n|}$$

$$\hat{M}_0 = -\eta_2^{-1} (|n| - \eta_2) - \frac{1}{2} y_1^2 = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - y_1^2 \right) + O\left(\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^4\right)$$

$$\hat{M}_1 = 0$$

$$\hat{M}_2 = -\eta_2^{-1} (c + O(y_1^2 + (\frac{\eta_1}{\eta_2})^2))$$

$$\vdots$$

すなわち, $\hat{M}(y) \doteq -\frac{1}{2} \eta_2^{-2} (\eta_1^2 + y^2 \eta_2^2 - 2cy_2)$

ゆえに

$$c \notin \{j + \frac{1}{2}; j=0, 1, 2, \dots\} \Rightarrow P \text{ vs } (0, dy_2) \text{ is } A\text{-m. h. e.}$$

文献

- [1] Grigis, A. - Rothschild, L. : Ann. Math 118(1983) 443-460
- [2] Grušin, V. V. : MatL. USSR Sb. 13(1971) 155-185
- [3] Kashiwara, M. - Kawai, T. - Oshima, T. : Proc. Japan Acad. 50(1974) 549-550
- [4] Kato, T. : Perturbation Theory for Linear Operators (Springer)
- [5] Melin, A. : Comm. P.D.E. 6(1981) 1363-1405
- [6] Métivier, G. : Comm. P.D.E. 6(1981) 1-90
- [7] Ōkaji, T. : J. Math. Kyoto Univ. 25(1985) 489-514
- [8] Stein, E. M. : Inv. Math 69(1982) 209-216