

確率微分方程式の解の一意性

条件について. 一多次元の場合.

九大 工 山田 俊雄

京大 理 渡辺 信三

§0. 序

こゝで考察する stochastic differential equation は

$$(1) \quad dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt.$$

$$\sigma(t, x) = (\sigma_j^i(t, x)) \quad , \quad i=1, \dots, n. \quad j=1, \dots, r$$

の $(n \cdot r)$ -matrix. $t \in [0, \infty)$ $x \in R^n$.

$$b(t, x) = (b^i(t, x)) \quad i=1, \dots, n.$$

の形をしてゐるものとする. $b^i(t, x)$ $\sigma_j^i(t, x)$ は bounded, Borel measurable functions としておく.

(1) を Componentwise に書くと.

$$(1') \quad dX_t^i = \sum_{j=1}^r \sigma_j^i(t, X_t) dB_t^j + b^i(t, X_t) dt.$$

$i=1, \dots, n.$ である.

(1) または (1') の "解" の詳しい formulation を次に与えよう.

Increasing family of Borel fields を伴, 確率空間
 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ i.e. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$
 且 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$: $t < s$. を用意しておく.

Def. $X = (X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n), B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n))$
 が (1) の solution であるとは X は $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ で定
 義され以下の (i) ~ (iv) を満たすことを意味する.

- (i) X_t, B_t は t に関して 確率 1 で連続, $B_0 \equiv 0$.
- (ii) X_t, B_t は $\mathcal{F}_t$ -adapted, i.e. 各 t に対して, X_t, B_t
 は $\mathcal{F}_t$ -measurable.
- (iii) B_t は $\mathcal{F}_t$ -Brownian motion. i.e. B_t は $\mathcal{F}_t$ -marting-
 ale の system で $\langle B_t^i, B_t^j \rangle = \delta_{ij} t$ を満たす.
 更に $\langle B_t^i, B_t^j \rangle$ は bounded variation process で
 $B_t^i B_t^j - \langle B_t^i, B_t^j \rangle$ が $\mathcal{F}_t$ -martingale とする process
 として定義されているものとする.

$$(iv) \quad X_t^i - X_0^i = \int_0^t \sum_{j=1}^n \sigma_j^i(s, X_s) dB_s^j + \int_0^t b^i(s, X_s) ds$$

$i = 1, \dots, n$. が 確率 1 でなりたつ. 更に $\int dB_s^j$ による積分
 は確率積分の意味である.

Def. (Path-wise uniqueness). (1) の solution に
 関して Pathwise uniqueness がなりたつとは, $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$

上の二つの(1)の solutions $X = (X_t, B_t)$; $X' = (X'_t, B'_t)$ に対して, もし $X_0 = X'_0$, $B_t \equiv B'_t$ が確率1でなりたつなら, $X_t \equiv X'_t$ が確率1でなりたつことをいう.

この他に分布の意味の Uniqueness という概念も定義出来る ([5] 参照)

- Pathwise uniqueness がなりたつ $\Rightarrow$ 分布の意味の Uniqueness がなりたつ.
- (1) の solution が任意の初期分布に対して存在して, 分布の意味の Uniqueness がなりたつとき (1) の solution は diffusion process である.

等のことがかわかっている. これらについては ([5]) 参照

以下に於て問題とすることは, σ 及び b の modulus of continuity に条件を与えて (1) の solution の Pathwise Uniqueness を導くことである.

σ , 及び b が Lipschitz の条件をみたすとき (1) の solution に関して Pathwise Uniqueness がなりたつことは伊藤清氏によって知られている. (一般の次元で)

$$\text{又, } n=1 \text{ のとき } dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K \cdot |x - y|^\alpha \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

であれば Pathwise uniqueness がなりたつことを Skorohod が示し ([1]), 田中洋氏が後に鮮やかな別証明を与えた ([2])

昨年の数理解析研でのマルコフ過程シンポジウムで話したことは, Skorohod - Tanaka の結果の改良で以下のことを証明した. " $dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt, \quad n=1$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq f(|x - y|), \quad |b(t, x) - b(t, y)| \leq G(|x - y|)$$

$$\int_{0+} \frac{du}{f^2(u)} = \infty, \quad (f \text{ concave. 且 } \int_{0+} \frac{du}{G(u)} = \infty$$

であれば Pathwise uniqueness がなりたつ."

$$\text{これは Hölder continuity } |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|^\alpha$$

$\alpha \geq \frac{1}{2}$ を含むことにより Skorohod - Tanaka の結果の改良になっている^(*) 又, Girsanov ([3]) は $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ のとき Pathwise Uniqueness がなりたつ例を与えているので, modulus of continuity に関する条件としては ($n=1$) は best possible なものである.

今回の報告では一般の次元の場合, Pathwise uniqueness を保障する条件が次元によってどのように異なってくるかを中心として述べる.

(*) H. P. McKean Jr. は ([4]) で $\sigma(t, x) = |x|^\alpha$ のとき,

$\alpha \geq \frac{1}{2}$ で $dX_t = |X_t|^\alpha dB_t$ は Pathwise uniqueness であることを示している

§1. 簡単のため drift の項のない場合を論じる.

以下で f はある interval $[0, a)$ ($a > 0$) で定義され $f(0) = 0$ continuous increasing function としておく.

$$(2) \quad dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t. \quad \sigma(t, x) = (\sigma_j^i(t, x))$$

$$i = 1, \dots, n. \quad j = 1, \dots, r.$$

Theorem 1. f が次の条件を満たすとき.

$$(3) \quad \int_{0+} f^{-2}(\xi) \cdot \xi d\xi = \infty$$

$$(4) \quad f^2(\xi) \cdot \xi^{-1} \text{ は } \xi = 0 \text{ の近傍で Concave. 且つ}$$

$$f^2(\xi) \cdot \xi^{-1} \downarrow 0 \quad (\xi \downarrow 0)$$

~~(5) $\|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq f(|x - y|)$ (*)~~
~~このとき (2) の solution に関して pathwise uniqueness~~
~~がなりたつ.~~

このとき $\sigma(t, x)$ が

$$(5) \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq f(|x - y|) \quad (*) \quad x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a.$$

であれば (2) の solution に関して pathwise uniqueness がなりたつ.

$$(*) \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} |\sigma_j^i(t, x) - \sigma_j^i(t, y)|$$

Remark 1.

$f(\xi) = \xi$, $f(\xi) = \xi \cdot (\log \frac{1}{\xi})^{\frac{1}{2}}$, $f(\xi) = \xi \cdot (\log \frac{1}{\xi})^{\frac{1}{2}} \cdot (\log^{(2)} \frac{1}{\xi})^{\frac{1}{2}}$,
 ... 等は Theorem 1. の (3), (4) をみたす.

(Theorem 1. の証明)

f を適宜に延長し, $[0, \infty)$ で定義され, $f^2(\xi) \cdot \xi^{-1}$ concave
 且つ (5) がすべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対してなりたつように
 しておく.

条件 (3) に注意して

$$1 = a_0 > a_1 > \dots > a_{m-1} > a_m > \dots \downarrow 0 \text{ を}$$

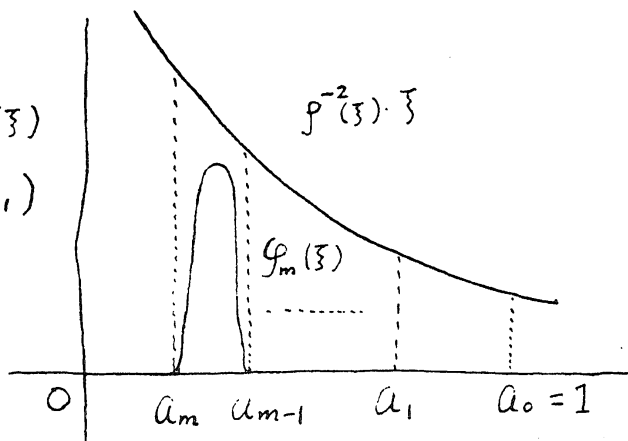
$$\int_{a_m}^{a_{m-1}} f^{-2}(\xi) \cdot \xi \, d\xi = 2 \text{ をみたすように選ぶ.}$$

Continuous function $\varphi_m(\xi)$

を $\text{Supp}(\varphi_m) \subset (a_m, a_{m-1})$

$$0 \leq \varphi_m(\xi) \leq f^{-2}(\xi) \cdot \xi$$

$$\int_{a_m}^{a_{m-1}} \varphi_m(\xi) \, d\xi = 1$$

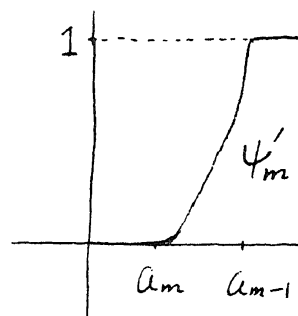


をみたすように選ぶ.

$$\psi_m(z) = \int_0^z d\theta \int_0^\theta \varphi_m(\xi) \, d\xi, \quad z \in [0, \infty)$$

とおく

$$\psi_m''(\xi) = \varphi_m(\xi), \quad \psi_m(z) \uparrow z \quad (m \uparrow \infty)$$



$f_m(x) = \psi_m(|x|)$ とおく。 $f_m(x)$ は $\mathbb{R}^n$ で定義され且つ
 $f_m(x) \uparrow |x|$ ($m \uparrow \infty$), $f_m(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ である。

さて, 今ある $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上に (2) の二つの
 solutions $X = (x_t, B_t)$, $X' = (x'_t, B'_t)$ があり,
 $x_0 \equiv x'_0$, $B_t \equiv B'_t$ (a.s. P) とする。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_m(x) = \psi'_m(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x) = \psi''_m(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \psi'_m(|x|) \frac{|x|^2 \delta_{ij} - x_i x_j}{|x|^3}$$

$|\psi'_m(|x|)| \leq 1$ に注意すると

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x) \right| \leq K_1 \frac{1}{|x|} I_{\{x \neq 0\}} + K_2 \psi''_m(|x|) \text{ を得る.}$$

ここに K_1, K_2 はある正の定数である。

$I_{x_0'}$ の公式を用いて

$f_m(x_t - x'_t) = a \text{ martingale}$

$$\begin{aligned} & \left[+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x(s) - x'(s)) \left(\sum_{k=1}^r (\sigma_k^i(s, x(s)) - \sigma_k^i(s, x'(s))) (\sigma_k^j(s, x(s)) - \sigma_k^j(s, x'(s))) \right) ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x(s) - x'(s)) \left\{ \sum_{k=1}^r (\sigma_k^i(s, x(s)) - \sigma_k^i(s, x'(s))) (\sigma_k^j(s, x(s)) - \sigma_k^j(s, x'(s))) \right\} ds \right] \end{aligned}$$

$$\therefore E[f_m(x_t - x'_t)] \leq K_3 \int_0^t E[I_{\{x_s \neq x'_s\}} |x_s - x'_s|^{-1} \rho^2(|x_s - x'_s|)] ds$$

$$+ K_4 \int_0^t E(\psi''_m(|x_s - x'_s|) \cdot \rho^2(|x_s - x'_s|)) ds \equiv I_1 + I_2$$

ここに K_3, K_4 は正の定数。

I_2 を評価する $\text{Supp}(\psi_m'') \subset (a_m, a_{m-1})$

$\psi_m''(\xi) \leq f^{-2}(\xi) \cdot \xi$ に注意すると.

$$\begin{aligned} I_2 &\leq K_4 \int_0^t E \left[\frac{|\lambda_s - \lambda'_s|}{f^2(|\lambda_s - \lambda'_s|)} f^2(|\lambda_s - \lambda'_s|) \cdot \mathbb{I}_{\{a_m \leq |\lambda_s - \lambda'_s| \leq a_{m-1}\}} \right] ds \\ &\leq K_4 \cdot a_{m-1} \cdot t \rightarrow 0 \quad (m \uparrow \infty) \end{aligned}$$

よ, 2

$$\begin{aligned} E[|\lambda_t - \lambda'_t|] &\leq K_3 \int_0^t E[\mathbb{I}_{\{|\lambda_s - \lambda'_s| \leq \xi\}} |\lambda_s - \lambda'_s|^{-1} f^2(|\lambda_s - \lambda'_s|)] ds \\ f^2(\xi) \cdot \xi^{-1} \downarrow 0 \quad (\xi \downarrow 0) \text{ によ, 2} \\ &= K_3 \int_0^t E[|\lambda_s - \lambda'_s|^{-1} f^2(|\lambda_s - \lambda'_s|)] ds \end{aligned}$$

$$G(\xi) = f^2(\xi) \cdot \xi^{-1} \text{ とおくと } G(\xi) \text{ concave } \int_{0+} \frac{d\xi}{G(\xi)} = \infty$$

$$\begin{aligned} \therefore E[|\lambda_t - \lambda'_t|] &\leq K_3 \int_0^t E[G(|\lambda_s - \lambda'_s|)] ds \\ &\leq K_3 \int_0^t G(E|\lambda_s - \lambda'_s|) ds \end{aligned}$$

$$\therefore E|\lambda_t - \lambda'_t| \equiv 0 \quad \text{Q. E. D.}$$

Remark 2. Theorem 1. の条件 (3) は $n \geq 3$ の場合.

次のような意味では *best possible* である.

ちなみに, $\int_{0+} f^{-2}(\xi) \cdot \xi d\xi < \infty$, 且つ f が *subadditive*

i.e. $f(\xi_1 + \xi_2) \leq f(\xi_1) + f(\xi_2), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in [0, \infty)$

よちる (5) をみたす $\sigma(t, x)$ 是 (2) の solution に關し
て Pathwise uniqueness がなりたぬものが存在する。

實際 $\sigma_j^i(t, x) = \delta_{ij} f(|x|) \quad i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n$
 $n \geq 3$. とおく。

$$|\sigma_j^i(t, x) - \sigma_j^i(t, y)| \leq |f(|x|) - f(|y|)| \leq f(|x - y|)$$

がなりたつ。 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$(6) \quad \begin{cases} dX_t = \sigma(X_t) dB_t \\ X_0 \equiv 0 \end{cases}$$

を考へる。

$(\Omega, \mathcal{F}, P : \mathcal{F}_t)$ 上に n -dimensional Brownian motion

$\{\bar{B}_t, \mathcal{F}_t\}$ が与えられてゐる。

$A_t \equiv \int_0^t f^{-2}(|\bar{B}_s|) ds$ ときめると、 A_t は $\bar{B}_t$ の non-

negative continuous additive functional である。

$$E[A_t] = \text{Const.} \int_0^\infty f^{-2}(\xi) \cdot \left[\int_0^t \frac{1}{(2\pi s)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{2s}} ds \right] \xi^{n-1} d\xi$$

$$\leq \text{Const} \int_{0+}^\infty f^{-2}(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi < \infty$$

$$\therefore P(A_t < \infty \quad \forall t > 0) = 1.$$

また A_t^{-1} ($t \mapsto A_t$ の inverse function) と $\mathbb{F}_t$ と
 $(\bar{B}_{A_t^{-1}}, \bar{\mathcal{F}}_{A_t^{-1}})$ は local martingale の system である

$$\begin{aligned} \langle \bar{B}_{A_t^{-1}}^i, \bar{B}_{A_t^{-1}}^j \rangle &= \delta_{ij} A_t^{-1} = \delta_{ij} \int_0^t f^2(\bar{B}_{A_s^{-1}}) ds \\ &= \int_0^t (\sigma^t \sigma)_{ij}(\bar{B}_{A_s^{-1}}) ds. \end{aligned}$$

$$\text{よって } (B_t \equiv \int_0^t \sigma^{-1}(\bar{B}_{A_s^{-1}}) d\bar{B}_{A_s^{-1}}, \mathcal{F}_t \equiv \bar{\mathcal{F}}_{A_t^{-1}})$$

とおく $\Rightarrow$ これは n -dim Brownian motion

また $(X_t \equiv \bar{B}_{A_t^{-1}}, B_t)$ は (6) の solution.

一方 $(X_t' \equiv 0, B_t)$ も (6) の solution であるが
 pathwise uniqueness は 成立しない。

Theorem 1 ~~は~~ $n \neq 1$, $n \neq 2$ の場合 $(\sigma(x, x))$
 の特別のケースに ~~対し~~

Theorem 1 は $n=1$, 及び $n=2$ のとき以下のように改定出来る.

Theorem 2.

f が

$$(7) \quad \int_{0+} f^{-2}(\xi) d\xi = \infty \quad \text{をみたすとき.}$$

$$\sigma(t, x) = (\sigma_j^1(t, x)) \quad j=1, \dots, r \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^1$$

$$\text{が} \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq f(|x-y|)^* \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^1$$

をみたすとき. つねに

$$d\chi_t = \sum_{j=1}^r \sigma_j^1(t, \chi_t) dB_t^j$$

の solution に関して Pathwise uniqueness がなりたつ.

証明は昨年の Symposium (数理論 1970. 11月~12月) で与えたものと本質的には同じである. ([5]) を参照

又 条件 (7) はほぼ best possible であることは Girsanov の反例によつてわかる. ([3]) ([4])

$$(*) \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \equiv \max_{1 \leq j \leq r} |\sigma_j^1(t, x) - \sigma_j^1(t, y)|$$

$n=2$ の場合, 一般に $(2, r)$ 型 matrix $\sigma(t, x)$ に関して Theorem 1. が改良出来るかどうかは, 現在のところ我々にはまだわからないうち.

しかし, 次のような特別の $\sigma(t, x)$ の class に対して, Theorem 1 を改良することは出来る.

Theorem 3.

f が次の条件をみたすとする

$$(8) \quad \int_{0+} f^{-2}(\xi) \cdot \xi \cdot \log \frac{1}{\xi} d\xi = \infty$$

$$(9) \quad G(\eta) = \eta^3 e^{\frac{2}{\eta}} f^2(e^{-\frac{1}{\eta}}) \text{ が ある区間 } [0, a'] \text{ で Concave.}$$

$$\text{このとき } \sigma_j^i(t, x) = \delta_{ij} a(t, x) \quad i, j = 1, 2$$

$$(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \text{ の形の } (2, 2)\text{-matrix}$$

σ に対して

$$\|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq f(|x - y|) \quad (*) \text{ をみたす } \sigma$$

については $dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t$ の solution に関して Pathwise uniqueness が成り立つ.

$$(*) \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| = \max_{1 \leq i, j \leq 2} \left| \sigma_j^i(t, x) - \sigma_j^i(t, y) \right|$$

Remark. 3.

$$f(\xi) = \xi \cdot (\log \frac{1}{\xi}). \quad f(\xi) = \xi \cdot (\log \frac{1}{\xi}) \cdot (\log^{(2)} \frac{1}{\xi})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(\xi) = \xi \cdot (\log \frac{1}{\xi}) \cdot (\log^{(2)} \frac{1}{\xi})^{\frac{1}{2}} \cdot (\log^{(3)} \frac{1}{\xi})^{\frac{1}{2}}, \dots$$

は (8), (9) をみたす.

(Theorem. 3 の証明)

$f \in [0, \infty)$, $G \in [0, \infty)$ に延長し, G は $[0, \infty)$ で concave になるようにしておく.

最初に

$$\int_{0+} \frac{dz}{G(z)} = \int_{0+} f^{-2}(e^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{z}{2}} z^{-3} dz = \int_{0+} f^{-2}(\xi) \cdot \xi \cdot \log \frac{1}{\xi} d\xi$$

$= \infty$. に注意し.

$$1 = a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{m-1} > a_m > \dots \downarrow 0$$

$$\int_{a_m}^{a_{m-1}} \frac{dz}{G(z)} = 2 \quad \text{と選んでおく.}$$

continuous functions $f_m \in$

$$\text{Supp}(f_m) \subset (a_m, a_{m-1}), \quad 0 \leq f_m(\xi) \leq G^{-1}(\xi)$$

$$\int_{a_m}^{a_{m-1}} f_m(\xi) d\xi = 1 \quad \text{をみたすように選ぶ}$$

$$\psi_m(z) = \int_0^z du \int_0^u \varphi_m(\xi) d\xi \quad \text{for } z < \infty. \quad (z \geq 0)$$

$$\psi_m'(z) = \begin{cases} 0 & : z \leq a_m \\ 0 \leq 1 \text{ on } [a_m, a_{m-1}] & a_m \leq z \leq a_{m-1} \\ 1 & z \geq a_{m-1} \end{cases}$$

$$\psi_m''(z) = \begin{cases} 0 & z \leq a_m \\ 0 \leq \zeta^{-1}(z) \text{ on } [a_m, a_{m-1}] & a_m \leq z \leq a_{m-1} \\ 0 & z \geq a_{m-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Thus } f_m(x) &= \psi_m\left(\left[\log^+ \frac{1}{|x|}\right]^{-1}\right) \quad (*) \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{for } x < \infty \quad f_m(x) &\in C^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{and } f_m(x) \uparrow \left[\log^+ \frac{1}{|x|}\right]^{-1} \\ &\quad (m \uparrow \infty). \end{aligned}$$

$X = (X_t, B_t), \quad X' = (X'_t, B'_t) \in (\Omega, \mathcal{F}, P : \mathcal{F}_t)$ and $\Rightarrow$
 the solutions X and X' $X_0 = X'_0, \quad B_t \equiv B'_t$ and $\forall t \geq 0$.

Itô's formula is used.

$f_m(X_t - X'_t) =$ a martingale

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f_m(X_s - X'_s) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f_m(X_s - X'_s) \right] [a(s, X_s) - a(s, X'_s)]^2 ds$$

$$(*) \quad \log^+ x = (\log x)^+ \vee 0 \quad x > 0.$$

- 才

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f_m(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f_m(x)$$

$$= \psi'_m \left(\left[\log^+ \frac{1}{|x|} \right]^{-1} \right) \frac{1}{\left(\log^+ \frac{1}{|x|} \right)^3} \frac{1}{|x|^2}$$

$$+ \psi''_m \left(\left[\log^+ \frac{1}{|x|} \right]^{-1} \right) \cdot \frac{1}{\left(\log^+ \frac{1}{|x|} \right)^4} \cdot \frac{1}{|x|^2}$$

$$|\psi'_m| \leq 1 \quad \text{に注意して}$$

$$E[f_m(x_t - x'_t)] \leq K \int_0^t E \left[\frac{1}{|x_s - x'_s|} \right] ds$$

$$K \int_0^t E \left[\frac{1}{|x_s - x'_s|} \left(\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|} \right)^{-3} |x_s - x'_s|^{-2} \rho^2(|x_s - x'_s|) \right] ds$$

$$+ \int_0^t E \left[\psi''_m \left(\left[\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|} \right]^{-1} \right) \cdot \left(\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|} \right)^{-4} |x_s - x'_s|^{-2} \rho^2(|x_s - x'_s|) \right] ds$$

$$\equiv I_1 + I_2 \quad \text{とおく.} \quad I_2 \text{ を評価(西村) } \psi''_m(\cdot) \leq \bar{G}(\cdot)$$

に注意して.

$$0 \leq I_2 \leq$$

$$\int_0^t E \left[\left(\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|} \right)^3 |x_s - x'_s|^2 \rho^2(|x_s - x'_s|) \left(\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|} \right)^{-4} |x_s - x'_s|^{-2} \rho^2(|x_s - x'_s|) \right] ds$$

$$\cdot I_{\{a_m \leq \left[\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|} \right]^{-1} \leq a_{m-1}\}} ds$$

$$\leq \int_0^t E \left[I_{\{a_m \leq [\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}]^{-1} \leq a_{m-1}\}} \cdot [\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}]^{-1} ds \right]$$

$$\leq t \cdot a_{m-1} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

$$\therefore E \left[[\log^+ \frac{1}{|x_t - x'_t|}]^{-1} \right] \leq K \cdot \int_0^t E \left\{ G \left([\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}]^{-1} \right) \right\} ds.$$

$G(\xi)$ が concave に注意して Jensen の不等式を用いると.

$$\leq K \int_0^t G \left(E \left([\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}]^{-1} \right) \right) ds.$$

$$\int_{0+} \frac{d\xi}{G(\xi)} = \infty \quad \text{であるので} \quad E \left([\log^+ \frac{1}{|x_t - x'_t|}]^{-1} \right) = 0$$

$$\therefore x_t \equiv x'_t$$

Q. E. D.

Remark 4.

条件 (8) がほぼ best possible であることが Remark 2 と類似の方法で示される.

一般に drift term のついた場合の結果については ([6]) を参照していただきたい.

References

- [1] Skorohod, A. V., *Studies in the theory of random processes*, Addison-Wisley 1965 (Originally published in Kiev. 1961).
- [2] 田中洋. 長谷川実. 確率微分方程式. Seminar on Probability vol. 19. 1964.
- [3] Girsanov, I. V., An example of non-uniqueness of the solution of the stochastic equation of K. Ito. *Theory of Prob. and its Appl.* 7. 1962 325-331 (Eng. trans.)
- [4] McKean, H. P. Jr., *Stochastic Integrals*. Acad. Press 1969.
- [5] Yamada, T and S. Watanabe, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *Jour. of Math. of Kyoto Univ.* vol 11. No. 1. 1971. 155-167.
- [6] Watanabe, S and T. Yamada, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II. (to appear. *Jour. of Math. of Kyoto Univ.*)