

3次元多様体のグラフ表現

筑波大学 数学 高橋元男

G を, 4 次の球面連結グラフとする。

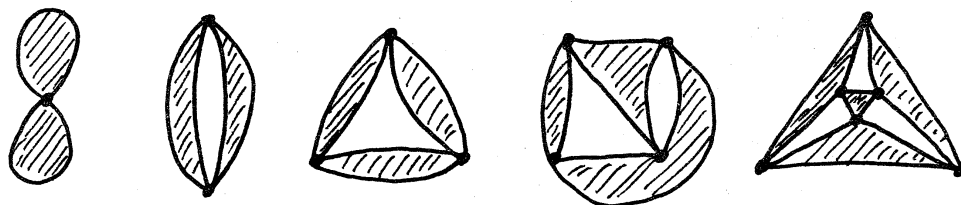


図 1. G の例.

Euler の標数の関係から, G の頂点の数を n とすれば, 辺の数は $2n$, 面の数は $n+2$ である。

$3\text{-disk } D^3$ の表面に G を書き, 面を 2 色 (例えば, 赤と青) で色分けする。この様なもののコピーを 4 つ (I, II, III, IV とする) 用意する。次に, 赤でぬった面は I と II, III と IV の対応点をそれぞれ, はり合わせる。青でぬった面は II と III, IV と I の対応点をそれぞれ, はり合わせる。この様にして得られた空間を $M'(G)$ とする。更に,

$$M(G) = M'(G) - \{\text{頂点}\}$$

$$\tilde{M}(G) = M'(G) - \{\text{頂点の十分小さい正則近傍}\}$$

とする. $\tilde{M}(G)$ は境界が有限個のトーラスからなるコンパクト (可付号連結) 3-多様体であり, $M(G)$ はその内部と同相である. G の頂点と $\tilde{M}(G)$ の境界成分は 1-1 に対応する. G の頂点全体の集合を $\mathcal{V}$ とし, $v \in \mathcal{V}$ に対応する $\tilde{M}(G)$ の境界成分を T_v とする.

もちろん, $\pi_1(M(G)) \cong \pi_1(\tilde{M}(G))$ であるが, この群の表示をグラフ G から読み取ることを考える. 各頂点 $v \in \mathcal{V}$ に対し, 2つの生成元 a_v, b_v を対応させ, グラフの頂点 v のそばに, 次の様を書く:

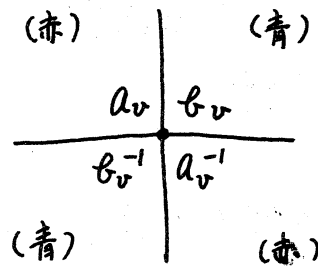
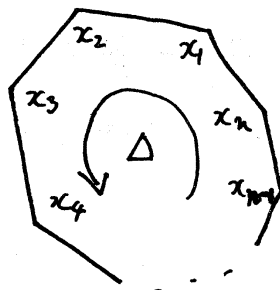


図 2.

球面グラフ G の面全体の集合を $\mathcal{F}$ とし, 各 $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し, 次の様な関係式 $r_\Delta = 1$ を対応させる:



$$r_\Delta \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n-1} x_n$$

図 3.

Δ の頂点のそばに書かれた生成元を1つの頂点から反時計まわりに次々と読んで行き、一周した時得られる語を r_Δ とする。

赤の面全体を $\mathcal{F}_1$ 、青の面全体を $\mathcal{F}_2$ とする。 ($\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$)

定理1.

$$\pi_1(M(G)) \cong \langle \{a_v, b_v\}_{v \in V} \mid \{[a_v, b_v] = 1\}_{v \in V}, \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}} \rangle.$$

但し $[a, b] = a b a^{-1} b^{-1}$. この関係式にはまだがあり各関係式 $r_\Delta = 1$ ($\Delta \in \mathcal{F}_i$) は他の $r_{\Delta'} = 1$ ($\Delta' \in \mathcal{F}_i$) の全体から導びかれる ($i=1, 2$). (従って関係式のうち2つは不要である.)

[例1] G を次のグラフとすれば

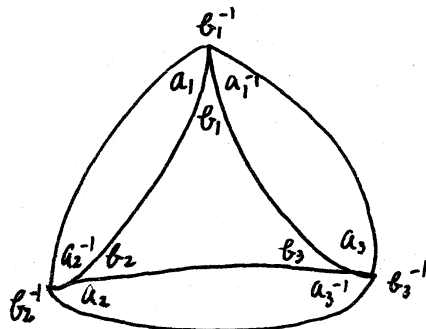


図 4.

$$\pi_1(M(G)) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \mid$$

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_3, b_3] = a_1 a_2^{-1} = a_2 a_3^{-1} = a_3 a_1^{-1} = b_1 b_2 b_3 = b_1^{-1} b_2^{-1} b_3^{-1} = 1 \rangle$$

$$\cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \mid [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_3, b_3] = b_1 b_2 b_3 = 1,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 \rangle$$

$$\cong \langle a, b_1, b_2, b_3 \mid [a, b_1] = [a, b_2] = [a, b_3] = 1, b_1 b_2 b_3 = 1 \rangle$$

$$\cong \langle a, c_1, c_2 \mid [a, c_1] = [a, c_2] = 1 \rangle,$$

となる。 $M(G)$ は次の絡み目の補集合と同相である：

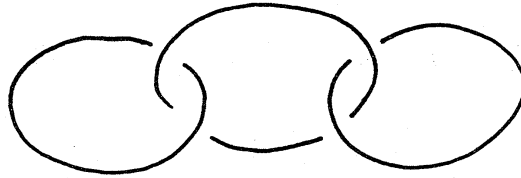
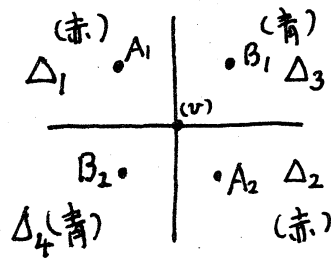


図 5.

定理 1 の証明. 3-disk のコピー I, II, III, IV から頂点を除いたものを I', II', III', IV' とする. $X = I' \cup II'$ とすれば (赤の面だけはり合せてある), $\pi_1(X)$ は自由群である. 今, 原点 O を II' の内部に取り, ループ a_v ($v \in \mathcal{V}$) を次の様に定義する:



$$a_v : 0 \xrightarrow{I'} A_1 \xrightarrow{I'} A_2 \xrightarrow{II'} 0$$

$$c_v : 0 \xrightarrow{II'} B_1 \xrightarrow{III'} B_2 \xrightarrow{IV'} 0$$

図 6.

a_v は O から出発し, II' の中で v を頂点とする赤の面の一つ Δ_1 の点 A_1 に達し, そこから I' に入り v を頂点とするもう一つの赤の面 Δ_2 の点 A_2 に達し, そこから再び II' の中に入り O に戻るループとする.

$$\pi_1(X) \cong \langle \{a_v\}_{v \in V} \mid \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}_2} \rangle$$

であることは容易に分る. 各 $r_\Delta = 1$ は他の $r_{\Delta'} = 1$ ($\Delta' \in \mathcal{F}_2$) の全体から導びかれる.

次に, $Y = II' \cup III'$ (青の面だけを合せてある) とする. ループ c_v は, O から出発し, II' の中で v を頂点とする青の面の一つ Δ_3 の点 B_1 に達し, そこから III' の中に入り, v を頂点とするもう一つの青の面 Δ_4 の点 B_2 に達し, そこから再び II' の中に入り, O に戻るものとする. 前と同様に,

$$\pi_1(Y) \cong \langle \{b_v\}_{v \in V} \mid \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}_1} \rangle$$

となる. 各 $r_\Delta = 1$ は他の $r_{\Delta'} = 1$ ($\Delta' \in \mathcal{F}_1$) の全体から導びかれる. ここで $Z = I' \cup II' \cup III' = X \cup Y$ ($X \cap Y = II'$)

とおき, van Kampen の定理を用いると

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$$

$$\cong \langle \{a_v, b_v\}_{v \in V} \mid \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}} \rangle$$

となる. 最後に $M(G) = Z \cup IV'$ に対し van Kampen の定理を用いると定理が得られる. 証明終

次に, 棒つき 4 次球面グラフ F とは, 4 次連結球面グラフ G であって, 各頂点に対し次の様な "棒" がついているものをいう:

$$\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline -n & -m \end{array} \quad \text{又は} \quad \begin{array}{c|c} \infty & \infty \\ \hline \infty & \infty \end{array}$$

図 7.

ここで, m と n は互いに素な整数 ($(m, n) = (0, 1), (1, 0)$ も可) とする.

この F に対し, $\tilde{M}(F)$ は $\tilde{M}(G)$ から次の様にして得られる空間とする. 先ず, 枠 $\frac{\infty}{\infty} | \frac{\infty}{\infty}$ の頂点はそのままとし枠 $\frac{m}{-n} | \frac{n}{-m}$ の頂点 v に対しては, $\tilde{M}(G)$ の境界成分 T_v に関し $a_v^n = b_v^m$ となるように Dehn surgery (即ち solid torus をはりつける) を行う. (a_v, b_v は $\pi_1(T_v)$ の生成元と考えてよりこに注意) このようにして得られた $\tilde{M}(F)$ も境界が有限個 (0 かもしれない) のトーラスからなるコンパクト多様体である. $M(F)$ も $\tilde{M}(F)$ の内部とする. 定理 1 より

$$\pi_1(M(F)) \cong \langle \{a_v, b_v\}_{v \in V} \mid \{[a_v, b_v] = 1\}_{v \in V}, \{r_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}}, \{a_v^{n_v} = b_v^{m_v}\} \rangle.$$

ここで $\frac{m_v}{-n_v} | \frac{n_v}{-m_v}$ は v の枠.

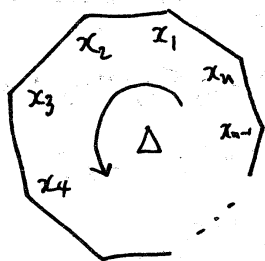
枠がすべて有限の時 ($\frac{m}{-n} | \frac{n}{-m}$ の形の時), $\tilde{M}(F) = M(F)$ は 1 多様体となる. この時は, $\pi_1(M(F))$ の表示でもっと簡単なものが得られる.

各 $v \in V$ に対し, 1つの生成元 c_v を対応させ, v のそばに次の様に書く.

$$\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline -n & -m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} c_v^m & c_v^n \\ \hline c_v^{-n} & c_v^{-m} \end{array}$$

図 8.

各面 $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し, 関係式 $r'_\Delta = 1$ を次の様に対応させる.
対応のさせ方は前と同様(次の図参照).



$$r'_\Delta \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n-1} x_n$$

図 9.

定理 2. $\pi_1(M(F)) \cong \langle \{c_v\}_{v \in V} \mid \{r'_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{F}} \rangle$.

ここで各 $r'_\Delta = 1$ ($\Delta \in \mathcal{F}_i$) は他の $r'_\Delta = 1$ ($\Delta \in \mathcal{F}_i$) の全体から導びかれる ($i=1, 2$). 従って関係式のうち 2 つは不要である.

[注意] 頂点の数を n とすれば, 生成元の数も n , 関係式から 2 つ除いたものも n 個となり, "n generators, n relators" の表示が得られる. この表示は $M(F)$ の genus n の Heegaard 分解から得られる表示である.

[13]

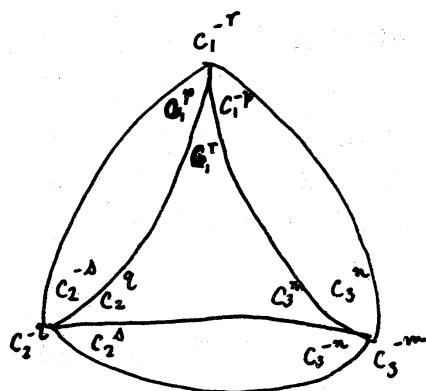
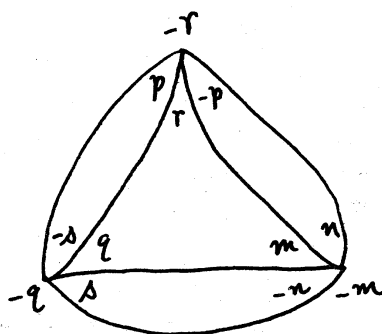


図 10.

$$\pi_1(M(F)) \cong \langle \frac{c_1, c_2}{a_1, a_2}, c_3 \mid c_1^p c_2^{-\Delta} = c_2^{\Delta} c_3^{-n} = c_3^n c_1^{-p} = 1, \\ c_1^r c_2^q c_3^m = c_1^{-r} c_3^{-m} c_2^{-q} = 1 \rangle$$

$$\cong \langle c_1, c_2, c_3 \mid c_1^p = c_2^{\Delta} = c_3^n, c_1^r c_2^q c_3^m = 1 \rangle \dots (1)$$

$$\cong \langle c_1, c_2 \mid c_1^p c_2^{-\Delta} = 1, c_1^{pm} (c_1^r c_2^q)^n = 1 \rangle \dots (2)$$

(1) は $M(F)$ の genus 3 の Heegaard 分解から得られる表示であり, (2) は genus 2 の Heegaard 分解から得られる表示である.

定理 2 の証明. $\pi_1(M(F)) \cong \langle \{a_v, b_v\} \mid v \in V \mid$

$$\{[a_v, b_v] = 1\} \mid v \in V, \{r_\Delta = 1\} \mid \Delta \in T, \{a_v^{n_v} = b_v^{m_v}\} \mid v \in V \rangle$$

において, m_v と n_v は互いに素だから適当な整数 p_v, q_v に対し, $p_v m_v + q_v n_v = 1$ となる. 今, $c_v = a_v^{p_v} b_v^{q_v}$ とおけば, a_v, b_v の可換性と, $a_v^{n_v} = b_v^{m_v}$ を用いて, $a_v = c_v^{m_v}, b_v = c_v^{n_v}$ が得られる. 従って生成元 a_v, b_v を c_v で置きかえることが出来, その際 $[a_v, b_v] = 1$ と $a_v^{n_v} = b_v^{m_v}$ は trivial な関係

となり, $r_\Delta = 1$ は $r'_\Delta = 1$ に変る. 故に

$$\pi_1(M(F)) \cong \langle \{c_v\}_{v \in V} \mid \{r'_\Delta = 1\}_{\Delta \in \mathcal{T}} \rangle. \quad \text{証明終.}$$

定理3. 3次元連結可付号閉多様体がグラフ表現 $M(F)$ を持つための必要十分条件は, それが, S^3 上の絡み目を分岐線とする2重分岐被覆空間と同相になることである.

証明. F を棒つきグラフとし, 棒はすべて有限とする. 各頂点 v の近傍でグラフを次の様に変形する. v の棒が下図の様であるとする.

$$\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline -n & -m \end{array}$$

図 11

ここで $m \geq 0, n \geq 0$ と仮定してよい.

[変形の仕方]

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

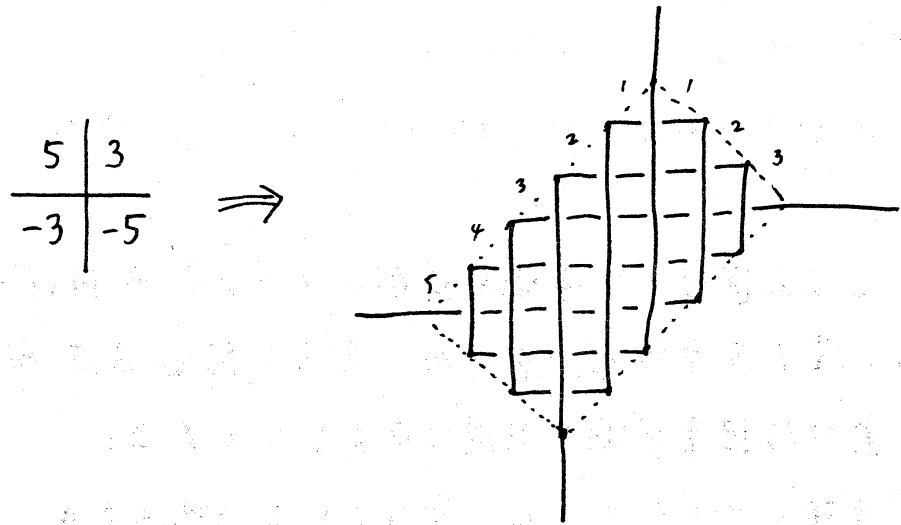


図 12.

一般の $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & -m \end{pmatrix}$ の場合も上図よりわかるであろう.

各頂点を, その棒に従い, このように変形すると1つの絡み目の図が得られる. それを L_F とする. $M(F)$ が L_F の2重分岐空間であることが示される. 逆に任意の絡み目の図 (但し連結とする) が与えられたとすると, 交差点を重ねてしまえば4次球面グラフ G が出る. これに, 次の様に棒をつけ左ものを F とする.

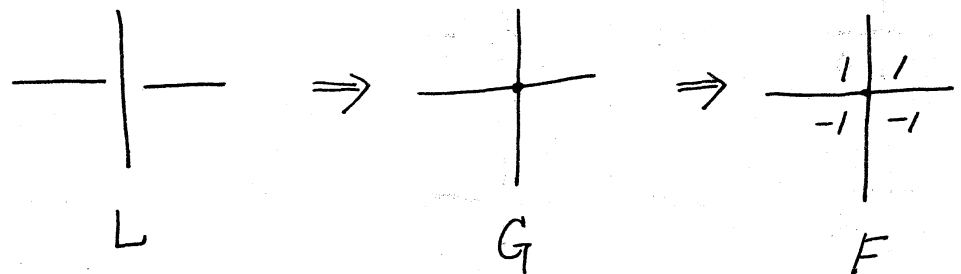


図 13.

そうすると $L = L_F$ となる. 故に L の 2 重分岐被覆空間は $M(F)$ となる. 証明終.

4 次球面グラフ G において, 頂点を通らず G の辺と n 回交わるような球面上の loop を n -loop と呼ぶことにする. 次の様な loop は trivial な 2-loop, 4-loop と呼ぶ.

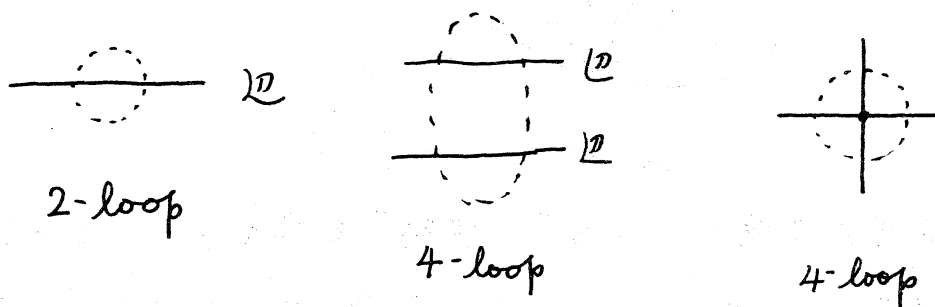


図 14.

Andreev の定理又は Thurston の定理を用いて次が証明出来る.

定理 4. $M(G)$ が有限体積完備な双曲的構造を持つための必要十分条件は, G が 6 個以上の頂点を持ち, non-trivial な 2-loop, 4-loop を持ちなリことである.

例えば, 最初のページにあげた最後のグラフ G はこの条件をみえすから $M(G)$ は双曲的構造を持つ. 具体的にはそれは非ユークリッド幾何学の射影モデルに内接した正八面体を 4

つはり合せて得られる。この八面体の非ユークリッド的二面角はすべて 90° である。

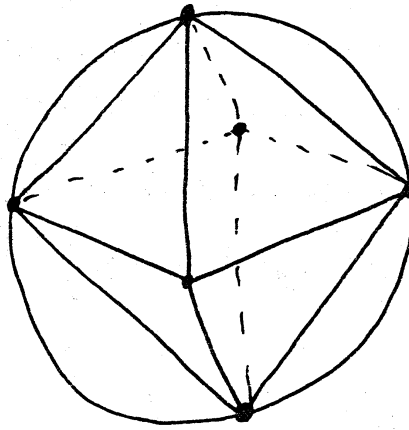


図 15.

グラフ G が下図のようち "2 角形" を持てば、頂点は 3 個以下かあるいは non-trivial な 4-loop を持つので $M(G)$ は双曲的構造を持つ。

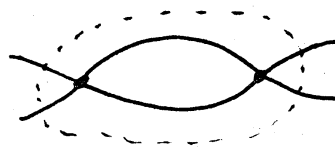


図 16.

しかし、2 角形を持つ場合でも、次の様なグラフは点線のような 4-loop を持つので $M(G)$ は双曲的構造を持つ。しかしこのような場合は例外的であり大部分の G に対し $M(G)$ は双曲的構造を持つ。

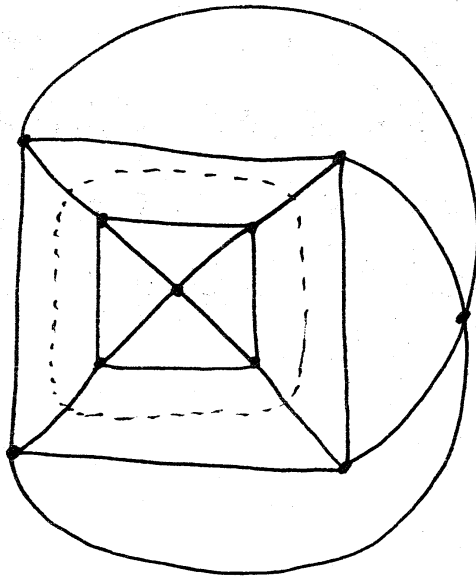


図 17.

G が non-trivial を 2-loop を持つとする:

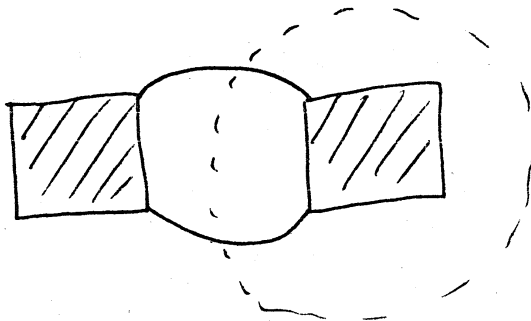
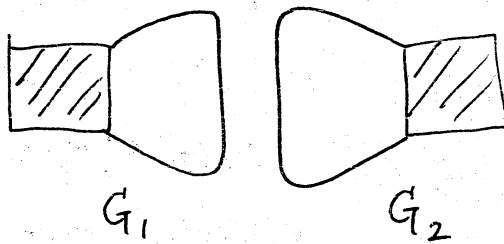


図 18.

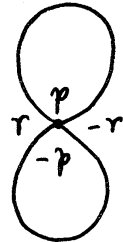
この時 G を 2つのグラフ G_1, G_2 に分ける.



すると $M(G) = M(G_1) \# M(G_2)$ ($\#$ は連結和)
 となる. 折つきグラフ F の場合も同様に F_1 と F_2 に分ける
 と $M(F) = M(F_1) \# M(F_2)$ となる.

同様に, non-trivial な 4-loop からは "トラス分解"
 が出る.

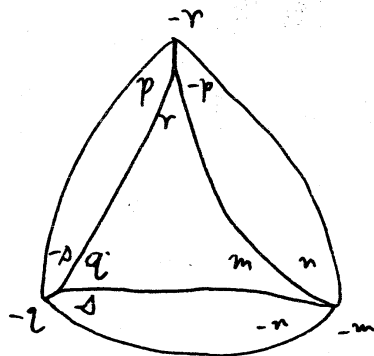
[$M(F)$ の作り]



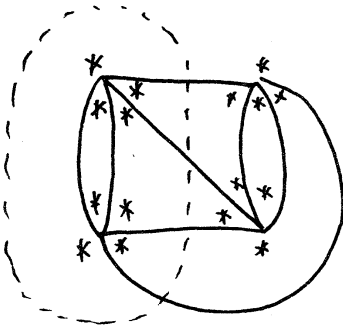
は型 (p, r) の ~~レンス~~ レンス空間を表す.



も レンス空間を表す.



は { $|p|=1$ 或 $|q|=1$ 或 $|n|=1$ の時 レンス空間,
 $|p|=0$ 或 $|q|=0$ 或 $|n|=0$ の時
 2つのレンス空間の連結和,
 $|p| \geq 2$ かつ $|q| \geq 2$ かつ $|n| \geq 2$ の時,
 S^2 上の例外ファイバ-3個の
 Seifert fiber space とする.



は点係のような non-trivial 4-loop
を持ち トラス分解出来る.

(incompressible torus と 互に)