

落下する液体平面シートの振る舞い

阪大・基礎工 菅 健太郎 (Kentarou Kan)

阪大・基礎工 吉永 隆夫 (Takao Yoshinaga)

Faculty of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

液体シートの振る舞いはシート面上の表面張力波の安定性に大きく依存することはよく知られている. このような安定性の問題は流体力学での代表的な問題の一つであるばかりでなく, ポリマーシートの製造工程や化学反応等における遮蔽膜への応用においても重要である.

大変形する液体シートの解析では, シート表面が自由境界であるので境界条件が本質的に非線形となり, 解析的取り扱い是一般に困難である. しかし, シートが薄い場合, ‘薄膜近似’を用いて近似的にシートの運動を記述できることが知られている.[1][2] この近似ではシート内部での諸量の変化を中心面上での変化に置き換えることにより比較的簡単であるが強い非線形の発展方程式を導くことができる.

一方, これまで行われてきた弱非線形解析による研究では, 特に重力場で定常的に落下する液体シートの場合, ウェーバー数 $We \gg 1$ に対してシート半厚み $a(x)$ が近似的には次式で与えられることが示されている:[3]

$$a(x) = a_0(x) + a_1(x), \quad (1.1)$$

$$a_0(x) = \left(\frac{x}{Fr^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

$$a_1(x) = C_1(x + Fr^2)^{-\frac{3}{8}} \sin\{C_2(x + Fr^2)^{\frac{7}{4}} + C_3\}. \quad (1.3)$$

ここで, x 軸は重力加速度 g の方向にとられ, Fr はフルード数, C_1, C_2 は適当な定数である. この式は図 1.1 のように a がなめらかな曲線 a_0 を中心に空間的に振動する様子を示す.

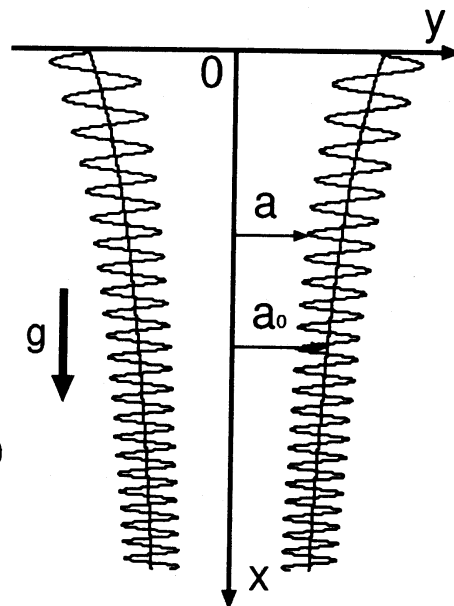


図 1.1: 定常解

非定常な攪乱の伝播に関しては, 線形解析により一様な液体シートには二つの攪乱モードが存在することが知られている. 一つは図 1.2 のようにシートの中心線に関して対称に厚みが増減することによって起こる‘対称モード’, もう一つは図 1.3 のようにシートの厚みは一定で中心線の変位により起こる‘反対称モード’である. このような攪乱モードの伝播は重力場で落下す

るシートにおいても、重力の影響がそれほど大きくなく、弱非線形性を考えることが示されている。さらに、このような条件下ではシートに印加された減衰するのに対し、反対称モード攪乱は増幅することが示されている。[4]

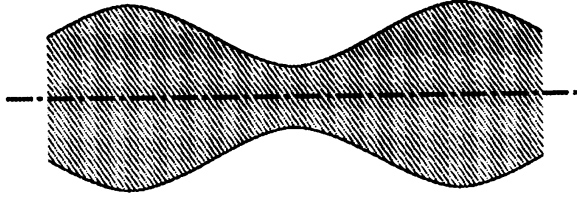


図 1.2: 対称モード

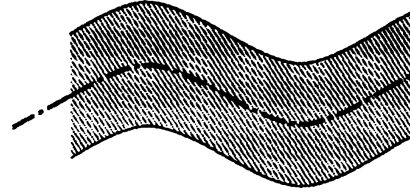


図 1.3: 反対称モード

本研究では、薄膜近似により得られた非線形方程式を重力場で落下する平面シートを伝播する大振幅の攪乱がどのように発展するかを調べている。特に、平面シートの厚みは下流に行くに従い薄くなり、その速度は増加する。この状態での攪乱の伝播の問題は一般に解析的にも数値的にも取り扱いが難しく、破断するような大振幅の変形に対する解析は行われていないようである。

2 問題の定式化

図 2.1 に示すような液体シートを考える。中心線は $y = \eta(x, t)$ で与えられている。流体の x, y 方向の速度成分をそれぞれ u, v とし、シート厚みの半分を a とする。ただし、以下では x, a, η は a_0 で、速度 u と v は u_0 で、時間 t は a_0/u_0 で、圧力は σ/a_0 でそれぞれ無次元化されている。また、 σ は流体の表面張力係数、 ρ は流体の密度、 g は重力加速度をであり、流体は非粘性非圧縮と仮定する。

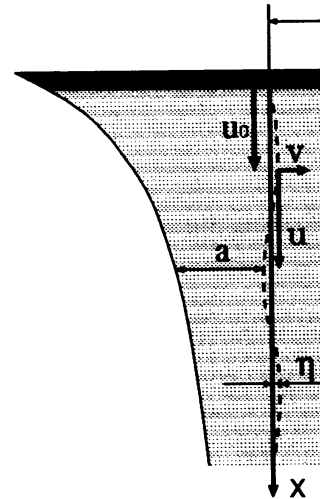


図 2.1: 液体シート

シート表面 $y = \pm a$ での圧力と表面張力による力の釣り合いより、

$$p_{\pm} = \mp \frac{(\partial^2(\eta \pm a)/\partial x^2)}{[1 + (\partial(\eta \pm a)/\partial x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

ここで p_+ と p_- はそれぞれシート右側面と左側面にかかる圧力である。重力場の基礎方程式は以下のように示される;

連続の式:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) = 0,$$

運動学的条件:

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

運動方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{We} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{a} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2Fr^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2We} \frac{\Delta P}{a}. \quad (2.5)$$

ただし, We は Weber 数, Fr は Froude 数であり以下のように定義される:

$$We = \frac{u_0^2}{(\sigma/\rho a_0)}, \quad Fr = \frac{u_0}{\sqrt{2a_0g}}. \quad (2.6)$$

また, $P = \frac{1}{2}(p_+ + p_-)$, $\Delta P = p_+ - p_-$.

3 定常解

定常状態では液体シートの主流部分是对称モードとみなせるので $\eta = 0$ であり, 定常状態では $\partial/\partial t = 0$ となるので式 (2.3) より $v = 0$ となる. さらに式 (2.1) より

$$p_{\pm} = -\frac{(\partial^2 a/\partial x^2)}{[1 + (\partial a/\partial x)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1)$$

となるので,

$$\Delta P = 0, \quad (3.2)$$

$$P = -\frac{(\partial^2 a/\partial x^2)}{[1 + (\partial a/\partial x)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.3)$$

となる. また, 式 (2.2) より $\partial(au)/\partial x = 0$ となり, $a(0) = u(0) = 1$ であるので以下のようにおくことができる:

$$au = 1. \quad (3.4)$$

さらに式 (2.4) は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{We} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2Fr^2}, \quad (3.5)$$

となり, 式 (3.3), (3.4) より

$$-\frac{1}{a^3} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{We} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(\partial^2 a/\partial x^2)}{[1 + (\partial a/\partial x)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} + \frac{1}{2Fr^2}, \quad (3.6)$$

のような定常状態での液体シートの半厚み $a(x)$ を記述する方程式が得られる.

特に, 式 (3.6) で $We \rightarrow \infty$ での定常解を考えると

$$-\frac{1}{a^3} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{2Fr^2}, \quad (3.7)$$

となり, $a(0) = 1$ より

$$a = \frac{1}{\sqrt{x/Fr^2 + 1}}. \quad (3.8)$$

有限の We に対しては式 (3.6) を数値的に解く必要がある. 計算はルンゲ-クッタ法により, 初期値 $a'(0), a''(0)$ に対してシートがどのように振舞うかを調べる. なお, 定常状態でのシートの形状は対称なので, 以下の図ではシートの半厚み a のみを描く. また, 重力加速度の方向は右向きを正とする.

3.1 初期値の効果

$We = 10, F = \sqrt{10}$ とし, $a'(0)$ と $a''(0)$ の値によるシートの振る舞いに対する影響を調べるために, $a'(0), a''(0)$ を変化させたときの様子を図 3.1～図 3.3 に示す.

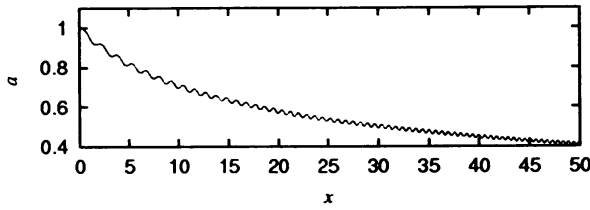


図 3.1: $a'(0) = 0, a''(0) = 0$

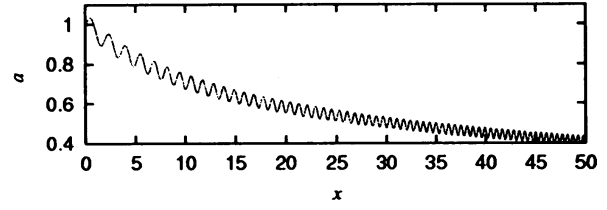


図 3.2: $a'(0) = 0.1, a''(0) = 0.1$

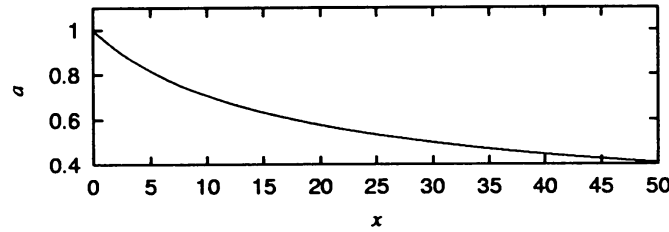


図 3.3: $a'(0) = -0.049821, a''(0) = 0.007387$

図に示されているように $a'(0), a''(0)$ の値によってシート表面に現れる現象が異なる. さらに, 図 3.3 に見られるように, $a'(0), a''(0)$ の特定の値に対してはシート表面に振動が現れない場合があることを注意しておく. このようなシート表面に振動が現れない特定の条件を図 3.4, 図 3.5 に Fr^2 の関数として示す. なお, $We \rightarrow \infty$ の場合は式 (3.8) より $a'(0) = -1/(2Fr^2), a''(0) = 3/(4Fr^4)$ が解析的に得られる.

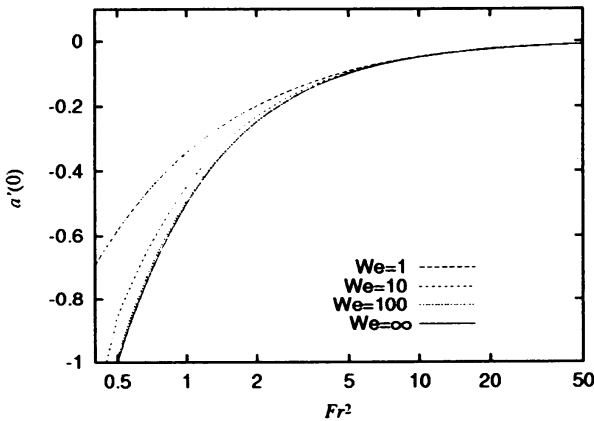


図 3.4: 振動が現れない場合の $a'(0)$ の値

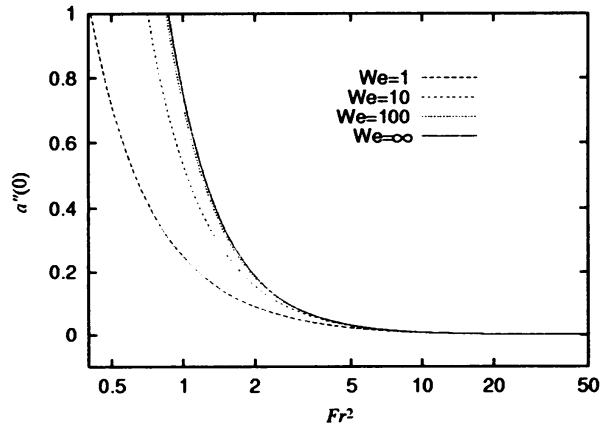


図 3.5: 振動が現れない場合の $a''(0)$ の値

4 定常解の時間安定性

前節において初期値の与え方によって振動が現れない解が存在することを示した. そこで本節では振動する場合と, しない場合の二種類の解を初期条件として, 非定常解を数値的に調べることにより安定性を見る. ただし, パラメーターには $We = 10, Fr = \sqrt{10}$ を用いている.

(1) 振動しない定常解の場合 ($a'(0) = -0.049821, a''(0) = 0.007387$)

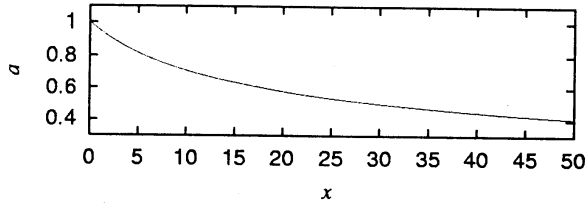
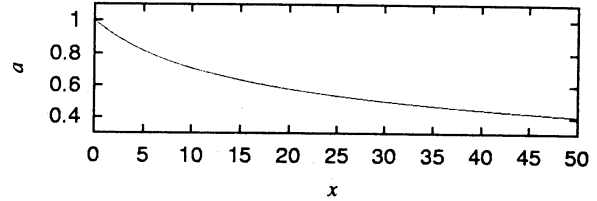
図 4.1: $t = 0$ 図 4.2: $t = 20$

図 4.1, 図 4.2 は $t = 0, 20$ におけるシート表面の様子を示している. この結果より振動しない解は時間的に変化せず安定であることが分かる.

(2) 振動する定常解の場合 ($a'(0) = 0, a''(0) = 0$)

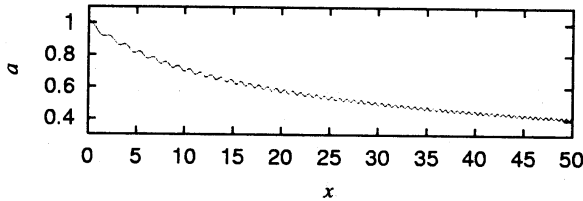
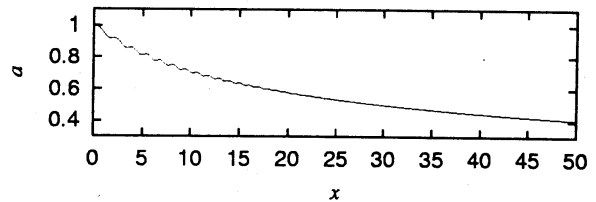
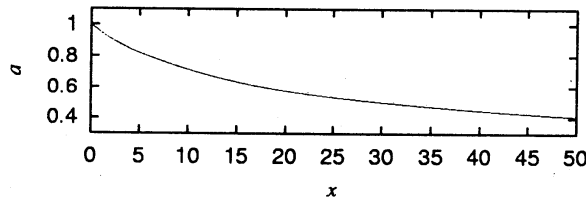
図 4.3: $t = 0$ 図 4.4: $t = 3$ 図 4.5: $t = 20$

図 4.3～図 4.5 は $t = 0, 3, 20$ におけるシート表面の様子を示している. 振動する定常解は時間がたつと下流部から振動部分がなくなる. この意味で振動する定常解は不安定である.

また, 図 4.2 と図 4.5 のシート形状がほぼ一致することから, 振動する定常解は不安定であり, 時間が経つと振動しない定常解へと移行する. このことから, 実際の定常状態でのシート形状には振動部は現れないと考えられる.

5 攪乱を与えた場合のシートの振る舞い

時間的に安定な定常解に攪乱を加えた場合のシートの振る舞いを調べる. 数値解析では対称モードの攪乱に対して中心線 η は 0 のままにし, 半厚み $a(x, t)$ に $x = 0$ で以下のように攪乱を加えるとする:

$$a(0, t) = 1 + \tilde{a}_0(t). \quad (5.1)$$

ここで $\tilde{a}_0$ は $x = 0$ で加えられた攪乱部であり, 適当な $\omega, \omega_1 (\omega > \omega_1)$ に対して

$$\tilde{a}_0 = \frac{\bar{a}_0}{\cosh \{\omega_1(t - t_0)\}} \cos \{\omega(t - t_0)\}, \quad (5.2)$$

とする. 一方, 反対称モードの場合は $x = 0$ で半厚み a は 1 のままにし, 中心線 $\eta(x, t)$ に以下のような攪乱を加える:

$$\eta(0, t) = \tilde{\eta}_0(t), \quad (5.3)$$

ただし, 対称モードの場合と同様, 適当な ω, ω_1 に対して

$$\tilde{\eta}_0 = \frac{\tilde{\eta}_0}{\cosh \{\omega_1(t - t_0)\}} \cos \{\omega(t - t_0)\}. \quad (5.4)$$

とする.

図 5.1(a),(b) にそれぞれ対称攪乱と反対称攪乱が加えられた様子を模式的に示す. (a) 図では定常状態での半厚みを $\bar{a}$ とし, そこからのずれを $\tilde{a}$ とする. 一方 (b) 図では中心線は定常状態では $\eta = 0$ なので $\eta = \tilde{\eta}$ となる.

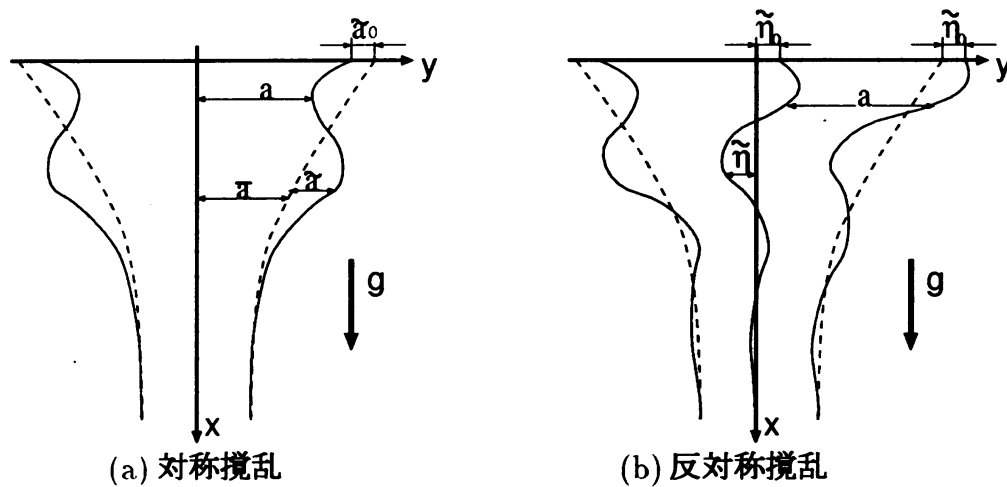


図 5.1: 対称攪乱と反対称攪乱

以下では $We = 10, Fr^2 = 10$ の定常解に, 図 5.2 に示すような形状の攪乱 ($\bar{a}_0 = \bar{\eta}_0 = 0.1, \omega_1 = 0.8, \omega = 5$) を $\tilde{a}_0$ 又は $\tilde{\eta}_0$ として印加した場合のシートの様子を調べる.

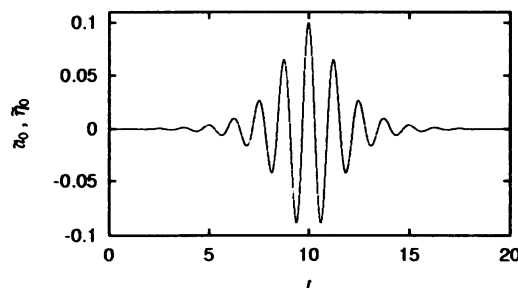
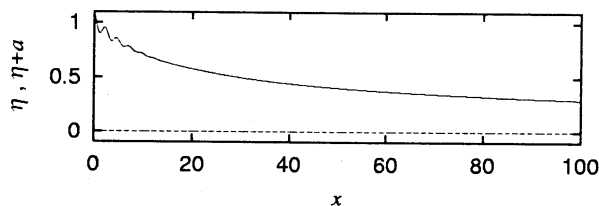
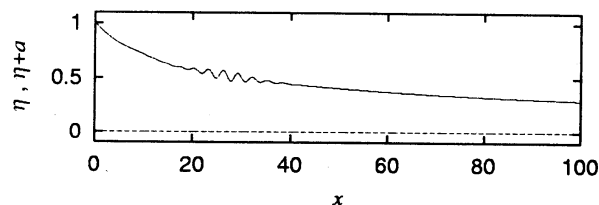
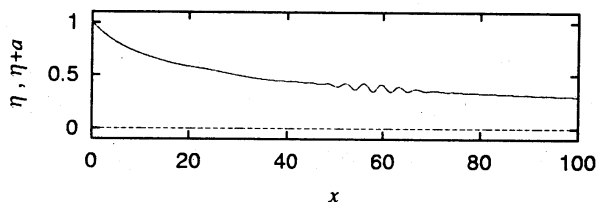


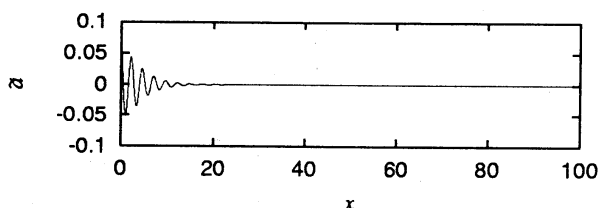
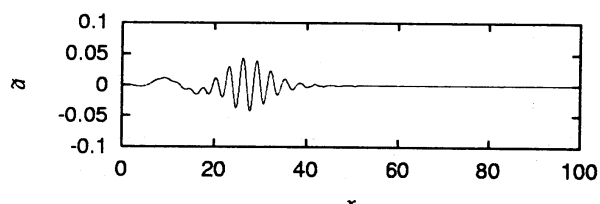
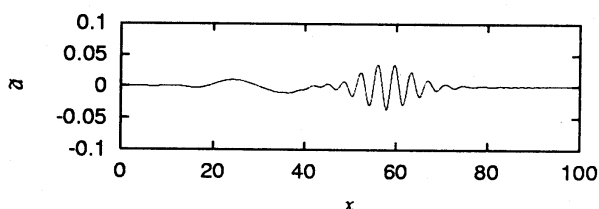
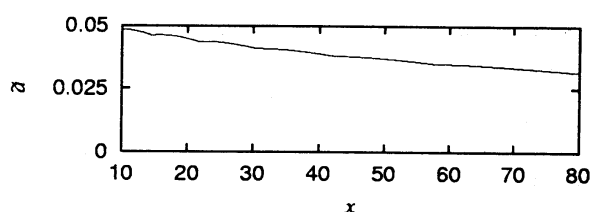
図 5.2: 攪乱 ($\bar{a}_0 = \bar{\eta}_0 = 0.1, \omega_1 = 0.8, \omega = 5$)

(1) 対称モード

図 5.3, 5.4 に対称モード攪乱として $\tilde{a}_0$ を加えた場合の $t = 10, 20, 30$ でのシートの表面 $\eta + a$ (実線) と中心線 η (破線) を示す. 時間がたつにしたがいシート表面を攪乱が下流に伝播する様子がわかる. また, 中心線 η は時間が経過しても $\eta = 0$ のままであることから, 反対称モード攪乱は発生していないことがわかる.

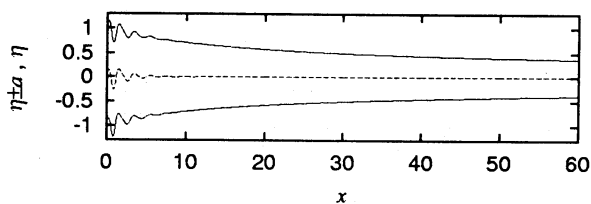
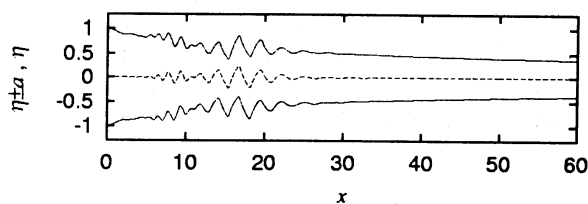
図 5.3: シートの様子 ($t = 10$)図 5.4: シートの様子 ($t = 20$)図 5.5: シートの様子 ($t = 30$)

次に図 5.6～5.8 に $t = 10, 20, 30$ での攪乱の発展する様子を示す. 図 5.6～5.8 より下流に攪乱が伝播すると, 攪乱が減衰していくことがわかる. 図 5.9 は各場所での攪乱振幅の最大値の変化を示したものである. これからも伝播とともに攪乱が減衰していくことがはっきりとわかる. この結果は弱非線形解析の結果と定性的に一致している.

図 5.6: 攪乱の様子 ($t = 10$)図 5.7: 攪乱の様子 ($t = 20$)図 5.8: 攪乱の様子 ($t = 30$)図 5.9: x に対する攪乱振幅の最大値の変化

(2) 反対称モード

図 5.10～5.12 に反対称モード攪乱として $\hat{\eta}_0$ を加えた場合の $t = 10, 20, 30$ でのシートの様子を示す (実線: $\eta \pm a$, 破線: η). この場合も時間がたつにしたがいシート表面を攪乱が下流に伝播していく様子がわかる.

図 5.10: シートの様子 ($t = 10$)図 5.11: シートの様子 ($t = 20$)

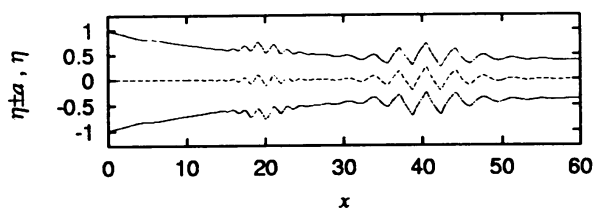
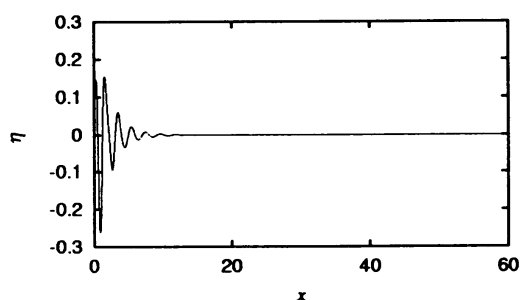
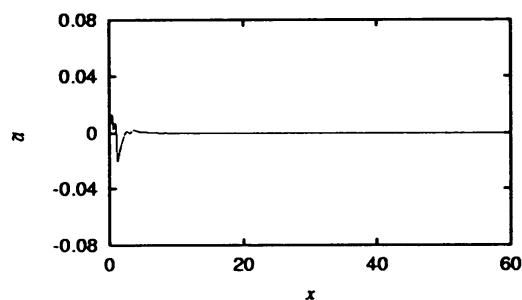
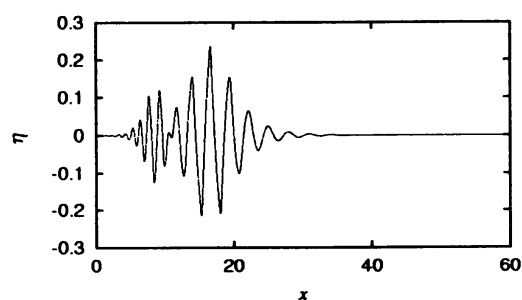
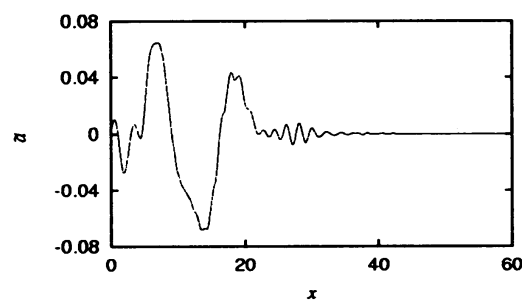
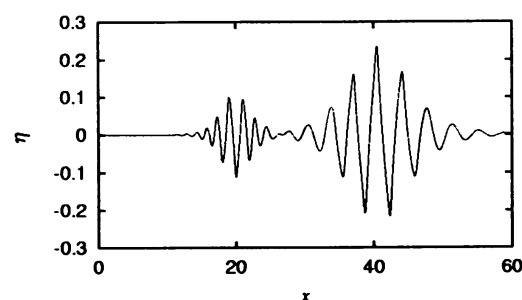
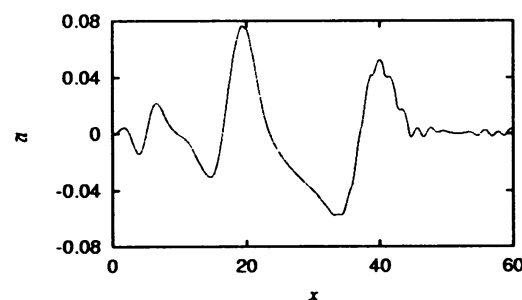
図 5.12: シートの様子 ($t = 30$)

図 5.13, 5.15, 5.17 に $t = 10, 20, 30$ でのシート中心線 η の変化を, 図 5.14, 5.16, 5.18 に $t = 10, 20, 30$ でのシートの半厚み a に現れる攪乱 $\tilde{a}$ の変化を示す. 図 5.14, 5.16, 5.18 より厚みが増えることから対称攪乱が時間を経つとともに現れてくることがわかる. つまり反対称モード攪乱のみを印加しても相互作用により対称モード攪乱が発生する事が示されている. また図 5.19 は各場所での反対称モード攪乱の振幅の最大値を示したものであり, $x = 25$ より下流で攪乱が増幅していくことがはっきりとわかる. 弱非線形解析の結果では対称モードの発生は予測できないが, 反対称モードの増幅に関しては本解析と定性的に一致する.

図 5.13: 反対称攪乱の様子 ($t = 10$)図 5.14: 対称攪乱の様子 ($t = 10$)図 5.15: 反対称攪乱の様子 ($t = 20$)図 5.16: 対称攪乱の様子 ($t = 20$)図 5.17: 反対称攪乱の様子 ($t = 30$)図 5.18: 対称攪乱の様子 ($t = 30$)

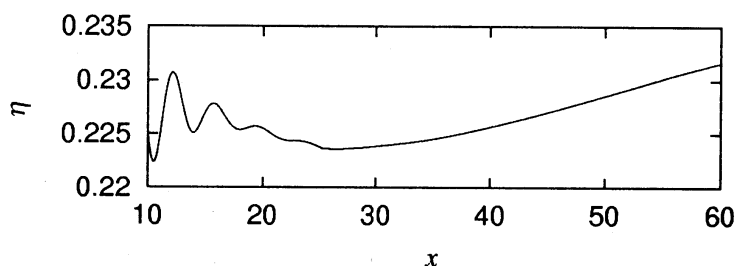


図 5.19: 各場所での攪乱振幅の最大値

5.1 シートの破断について

ここでは、 $We = 100, Fr^2 = 10$ の場合に対して定常解に図 5.2 で示すような攪乱を η_0 として印加した場合のシートの様子を調べる。図 5.20～図 5.22 はそれぞれ $t = 10, 20, 30$ での反対称攪乱成分 η を示している。図 5.17 と図 5.22 より We が大きいほど攪乱振幅がより増幅されていることがわかる。これは弱非線形解析による結果とは逆であり、対称モード攪乱が発生する事によって起こるのではないかと考えられる。図 5.23 は $t = 10, 20, 30$ で発生した対称攪乱 $\bar{a}$ を描いている。このように時間がたつにつれて対称攪乱がかなり大きく発生していることがわかる。特に、対称攪乱のみ印加した場合には攪乱は減衰するが、この反対称攪乱により生成された対称攪乱の場合はほとんど減衰しないことに注意しておく。

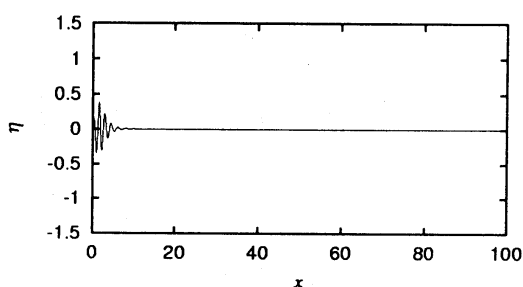
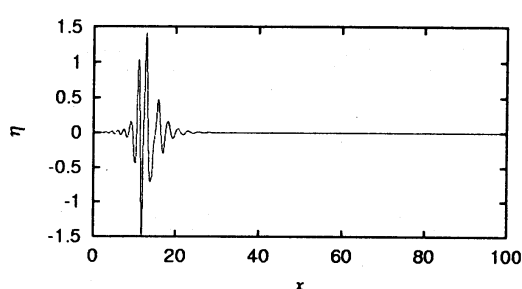
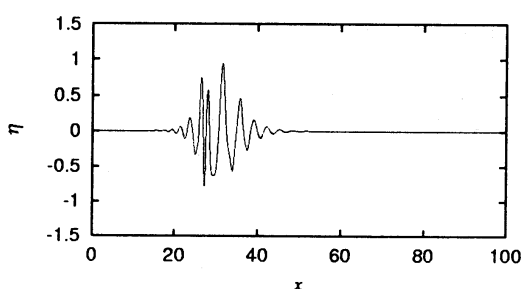
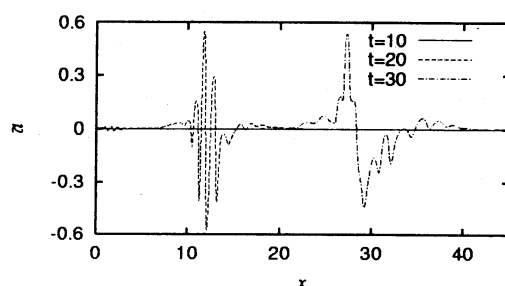
図 5.20: $t = 10$ 図 5.21: $t = 20$ 図 5.22: $t = 30$ 図 5.23: 反対称攪乱により発生した対称攪乱 $\bar{a}$ の変化

図 5.24 は $t = 30$ でのシート形状を描いたものである。 $x = 30$ 付近でシートがかなり薄くなっていることがわかる。この後 $t = 39 \sim 40$ でシートは破断してしまう。はじめに述べたように、これまで行われてきた弱非線形解析によると対称モードと反対称モードはカップリングしないため、反対称モード攪乱のみを加えた場合には対称モード攪乱は発生しない。そのため反対称モー

ド攪乱の場合、局所的なシート厚みは定常でのそれと同じであり、シートが攪乱により破断することはない。しかし、実際には図 5.24 のように反対称モード攪乱を加えた場合には対称モード攪乱が発生することによりシート形状に薄くなる部分が現れ破断に至る可能性があると考えられる。

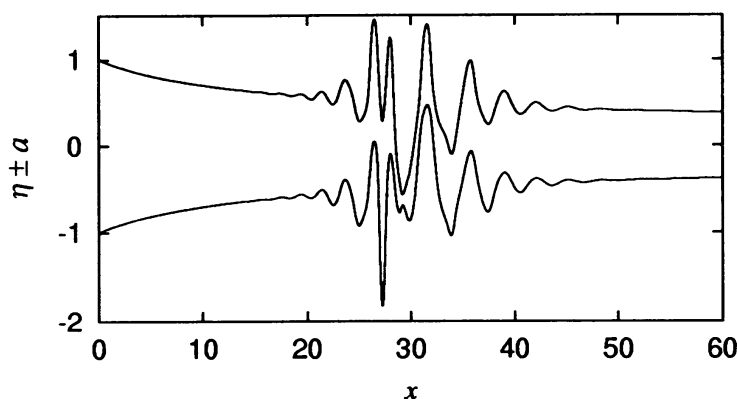


図 5.24: シートの様子 ($t=30$)

6 結言

これまで得られた結果をまとめると以下ようになる:

- 落下する平面液体シートの定常解を調べた結果、初期値により空間的に振動する解としない解が得られることがわかった。特に「振動しない」解は特定の初期値に対してのみ得られることがわかった。
- 振動する定常解と、しない定常解の時間安定性を調べた結果、振動しない解が安定であり、振動する解は時間とともに振動がなくなっていくことがわかった。
- 振動しない定常解に、上流端で攪乱を加えた場合、以下の結果が得られた;
 1. 対称攪乱のみを加えた場合には反対称モード攪乱は発生しない。
 2. 反対称攪乱のみを加えた場合には対称モード攪乱が引き起こされる。
 3. 対称モード攪乱は下流にいくにしたがい攪乱振幅は小さくなる。
 4. 反対称モード攪乱では攪乱振幅が増幅する場合もある。また、誘起された対称攪乱によってシートが破断する可能性がある。

参考文献

- [1] C.P.Lee & T.G.Wang: Phys. Fluids 29, 2076 (1986).
- [2] T.Yoshinaga & K.Kotani: J.Phys. Soc. Jpn 70 (2001), 70.
- [3] Y.Inoue: J.Phys. Soc. Jpn 38 (1975), 598.
- [4] 中村康輔: 重力場で鉛直に落下する流体シート上の表面張力波 (大阪大学基礎工学部修士論文, 1993).