

ブロッキングを伴う待ち行列網の 安定条件について

京都大学工学部

庄境 誠 (Makoto Shozakai)

大野勝久 (Katsuhisa Ohno)

三根 久 (Hisashi Mine)

1. はじめに

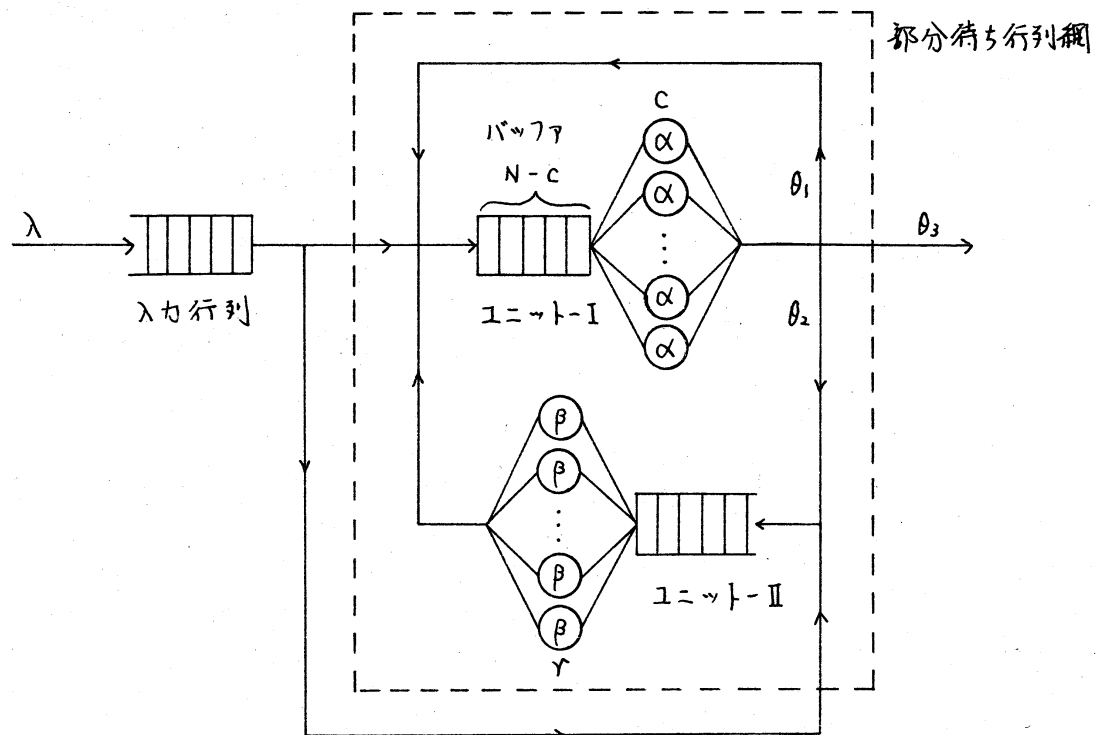
最近, 計算機システムの性能評価を行うために, そのモデルとしていろいろな形態の待ち行列網が構成され, 解析されている. その中の代表的なものの一つとして, 多重プログラミングモデルを挙げる事ができる. 例えば, Kobayashi [1], [2] や Buzen [3] は仮想記憶システムに対するモデルを考え, 諸統計量の数値計算を試みている. 一方, Latouche [4] や Neuts [5] は多重プログラミングモデルにマルコフ性を仮定し, その挙動を擬出生死滅過程で記述することにより定常確率ベクトルが幾何形式を持つことを示すと共に, 安定条件の陽表現を与えた.

本稿では, 仮想記憶システムに対する多重プログラミング

モデルを取り上げ、その安定条件の陽表現を与える。また、臨界到着率と呼ばれる量に関するいくつかの興味深い性質を導く。

2. モデル

下図に示される多重プログラミングモデルを考える。システムは2つのサービス施設、ユニット-Iとユニット-IIを含む部分待ち行列網及び入力行列により構成される。客はパラメータ λ のポアソン過程に従って、一旦入力行列に到着する。ユニット-Iの c 個のサーバーのサービス時間は平均 α^{-1} の指数分布に従い、バッファは有限容量 $N-c$ を持つ。ユニット-I下のサービスを受け終った客は、 θ_1 の確率で再びユ



ユニット - I のサービスを要求し, θ_2 の確率でユニット - II へ進み, θ_3 の確率でシステムを退去する. 一方, ユニット - II には平均 β^{-1} の指数分布に従ってサービスするサーバーが r 個あり, 行列長に制限はない.

このシステムに対する政策を次のように定める.

(i) 最大多重度 M : 部分待ち行列網の系内人数 (多重度) は M 人以下に保たれる. 多重度が M に達していない場合, ユニット - I に空きがあれば入力行列の客はユニット - I へ進む. なければ, ユニット - II へ進む. 解析の都合上, $M \geq C + r$ としておく.

(ii) スケジューリング規則 g : 部分待ち行列網が飽和状態に達した後, ユニット - I の客がサービス終了後 θ_3 の確率でシステムを退去する場合, 入力行列内の先頭の客は次の 2 通りのスケジューリング規則 g に従って部分待ち行列網に入る.

・規則 a ユニット - I へ進む. ユニット - II にサービス後留っている客がいても, その客はそのまま待機する.

・規則 b ユニット - II へ進む. ユニット - II にサービス後留っている客がいれば, その客はユニット - I に進むことができる.

$M > N$ の場合に対し, 更に次の 2 つのパラメータを設定す

る。

(iii) 完全ドロッキング点 r^* : ユニット-Iの客数が N 人に達すると、その後でユニット-IIでのサービスを終えた客はユニット-Iへ進むことができずサーバーを占有する。この現象をドロッキングと呼び、サーバーがドロックされるとも言う。ドロックされたサーバー数が r^* に達すると、その瞬間にドロックされていないサーバーも全てサービスを中断する。これを完全ドロッキングが起ると言う。 $1 \leq r^* \leq \min(M-N, r)$ となる。

(iv) サービス再開点 d^* : 完全ドロッキング起った後、ドロックされたサーバー数が d^* まで減るとドロックされていないサーバーはサービスを再開する。 $0 \leq d^* \leq r^*-1$ となる。

ドロッキングの様子によりシステムの状態を次のように分類する。

(i) 完全ドロッキング状態: ユニット-IIにおいてサービスが全く行われていない。

(ii) 部分ドロッキング状態: ユニット-IIにおいてドロックされたサーバー以外はサービスを行っている。

(iii) 非ドロッキング状態: どのサーバーもドロックされていない。

また、客のクラスを次のように定める。

- (i) クラス 0 : 入力行列内で待機している客
- (ii) クラス 1 : ユニット - I にいる客及びユニット - II にサービス終了後も留まっている客
- (iii) クラス 2 : ユニット - II でサービスを受けている客及び待っている客

このモデルと仮想記憶システムとの対応関係は以下のようになる。

- (i) 客 $\longleftrightarrow$ ジョブ
- (ii) 入力行列 $\longleftrightarrow$ ジョブ・スケジューリング行列
- (iii) ユニット - I
 - サーバー $\longleftrightarrow$ 中央処理装置 (CPU)
 - バッファ $\longleftrightarrow$ CPU・スケジューリング行列
- (iv) ユニット - II $\longleftrightarrow$ 補助入出力装置 (I/O)

3. 定常確率ベクトル

このモデルは次のような状態空間 E と無限小生成作用素 P を持つ擬出生死滅過程により記述できる。

$$\text{状態空間 } E = \{(i, j, k), i \geq 0, j = 0, 1, \dots, N+d^*, \overline{N+d^*+1}, N+d^*+1, \dots, \overline{N+r^*-1}, N+r^*-1, \overline{N+r^*}, 0 \leq k \leq M\}$$

i, j, k : クラス 0, 1, 2 の客数

(i, j, k) : $M > N$ の場合

非ブロッキング状態 $j = 0, 1, \dots, N$

部分ブロッキング状態 $j = N+1, N+2, \dots, N+r^*-1$

完全ブロッキング状態 $j = \overline{N+d^*+1}, \overline{N+d^*+2}, \dots, \overline{N+r^*}$

$M \leq N$ の場合

非ブロッキング状態 $j = 0, 1, \dots, M$

- ・ $j+k < M$ の時, $i=0$ より状態は (j, k) で表わされる. 状態集合 $\underline{m} = \{(j, k), j+k=m\}$ の要素は次のように並べられる.

$0 \leq m \leq \min(M, N+r^*)-1$ なら $(0, m), (1, m-1), \dots, (m, 0)$

$\min(M, N+r^*) \leq m \leq M-1$ なら $(0, m), (1, m-1), \dots,$

$(N+d^*, m-N-d^*), (\overline{N+d^*+1}, m-N-d^*-1), (N+d^*+1, m-N-d^*-1), \dots,$

$(\overline{N+r^*-1}, m-N-r^*+1), (N+r^*-1, m-N-r^*+1), (\overline{N+r^*}, m-N-r^*)$

- ・ $j+k = M$ の時, $k=M-j$ より状態は (i, j) で表わされる. 状態集合 $\underline{i} = \{(i, j)\}$ の要素は次のように並べられる.

$M > N$ の場合 $(i, 0), (i, 1), \dots, (i, N+d^*), (i, \overline{N+d^*+1}),$

$(i, N+d^*+1), \dots, (i, \overline{N+r^*-1}), (i, N+r^*-1), (i, \overline{N+r^*})$

$M \leq N$ の場合 $(i, 0), (i, 1), \dots, (i, M)$

- ・ 状態集合 $\underline{i}$ は次のように並べられる.

$\underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{m-1}, \underline{m}, \underline{m+1}, \dots, \underline{M-2}, \underline{M-1},$

$\underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{i-1}, \underline{i}, \underline{i+1}, \dots$

無限小生成作用素 P は次のようなブロック三重対角形式を

持つ.

$$(3.1) \quad P = \begin{vmatrix} A_0^1 & A_0^0 & & & & \\ A_1^2 & A_1^1 & A_1^0 & & & \\ & A_2^2 & A_2^1 & A_2^0 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & A_{M-1}^2 & A_{M-1}^1 & A_{M-1}^0 \\ & & & & A_M^2 & A_M^1 & A_M^0 \\ & & & & & A_2 & A_1 & A_0 \\ & & & & & & A_2 & A_1 & A_0 \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

A_0, A_1, A_2 : $M > N$ の場合, $N+2r^*-d^*$ 次, $M \leq N$ の場合,
 $M+1$ 次の正方行列

(i) A_0 $\underline{i}$, $i \geq 0$ から $\underline{i+1}$ への遷移行列

$$(3.2) \quad A_0 = \lambda I$$

(ii) A_1 $\underline{i}$, $i \geq 0$ から $\underline{i}$ への遷移行列

$M > N$ の場合

$$(A_1)_{jj'} = \min(C, j) \alpha \theta_2,$$

$$1 \leq j \leq N+r^*-1, j' = j-1;$$

$$j = \overline{N+d^*+1}, j' = N+d^*;$$

$$\overline{N+d^*+2} \leq j \leq \overline{N+r^*}, j' = j-1,$$

$$= -\lambda - \min(C, j) \alpha \theta_2 - r\beta, \quad 0 \leq j \leq \min(M-r, N), j' = j,$$

$$= -\lambda - C \alpha \theta_2 - (\min(M, N+r) - j) \beta,$$

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad & \min(M-r, N)+1 \leq j \leq N+r^*-1, \quad j' = j, \\
& = -\lambda - Ca\theta_2, \quad \overline{N+d^*+1} \leq j \leq \overline{N+r^*}, \quad j' = j, \\
& = r\beta, \quad 0 \leq j \leq \min(M-r, N), \quad j' = j+1, \\
& = (\min(M, N+r) - j)\beta, \quad \min(M-r, N)+1 \leq j \leq N+r^*-2, \quad j' = j+1, \\
& \quad j = N+r^*-1, \quad j' = \overline{N+r^*}, \\
& = 0, \quad \text{その他.}
\end{aligned}$$

$M \leq N$ の場合

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad (A_1)_{jj'} &= \min(C, j)\alpha\theta_2, \quad 1 \leq j \leq M, \quad j' = j-1, \\
&= -\lambda - \min(C, j)\alpha\theta_2 - \min(r, M-j)\beta, \quad 0 \leq j \leq M, \quad j' = j, \\
&= \min(r, M-j)\beta, \quad 0 \leq j \leq M-1, \quad j' = j+1, \\
&= 0, \quad \text{その他.}
\end{aligned}$$

(iii) A_2 , i , $i \geq 1$ から $i-1$ への遷移行列

$M > N$ の場合

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad (A_2)_{jj'} &= \min(C, j)\alpha\theta_3, \\
&\quad \text{規則 a の下では} \quad 1 \leq j \leq N+r^*-1, \quad j' = j; \\
&\quad \quad \quad \overline{N+d^*+1} \leq j \leq \overline{N+r^*}, \quad j' = j, \\
&\quad \text{規則 b の下では} \quad 1 \leq j \leq N+r^*-1, \quad j' = j-1; \\
&\quad \quad \quad j = \overline{N+d^*+1}, \quad j' = N+d^*; \\
&\quad \quad \quad \overline{N+d^*+2} \leq j \leq \overline{N+r^*}, \quad j' = j-1, \\
&= 0, \quad \text{その他.}
\end{aligned}$$

$M \leq N$ の場合

$$(A_2)_{jj'} = \min(c, j) \alpha \theta_3,$$

$$(3.6) \quad \text{規則 } a \text{ の下では } 1 \leq j \leq M, j' = j.$$

$$\text{規則 } b \text{ の下では } 1 \leq j \leq M, j' = j-1,$$

$$= 0, \quad \text{その他.}$$

$A_m^0 (0 \leq m \leq M-1)$, $A_m^1 (0 \leq m \leq M-1)$ 及び $A_m^2 (1 \leq m \leq M)$ はそれぞれ $\underline{m}$ から $\underline{m+1}$ への, $\underline{m}$ から $\underline{m}$ への, $\underline{m}$ から $\underline{m-1}$ への遷移行列であるが, 安定条件を論じる上では不要である (定理 1 を参照) ので詳しい定義は省略する.

既約擬出生死滅過程 P が正再帰的である時, システムは安定であると言われる. 定常確率ベクトルを $\underline{x}$ で表わすと,

$$(3.7) \quad \underline{x}P = \underline{0}, \underline{x}e = 1, \underline{x} > \underline{0}$$

となり, 定常状態での入力行列内の客数は確率 1 で有限である. 上の定式化により $\underline{x}$ を $(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_{M-1} \ x_0 \ x_1 \ x_2 \ \cdots)$ のように分割する. ここで, $y_m (0 \leq m \leq M-1)$ は $\underline{m}$ に対応し, $x_i (i \geq 0)$ は $\underline{i}$ に対応する.

行列 A を

$$(3.8) \quad A = A_0 + A_1 + A_2$$

により定義すると, A も有限既約連続時間マルコフ連鎖の作用素である. 定常確率ベクトルを $\underline{\pi}$ とおくと, 次式が成り立つ.

$$(3.9) \quad \underline{\pi}A = \underline{0}, \underline{\pi}e = 1.$$

定理 1 $\lambda < \pi A_2 e$ ならかつその時に限り, システムは安定である. $\lambda < \pi A_2 e$ ならば,

(i) 定常確率ベクトル $\underline{x}$ は次のような幾何形式を持つ.

$$(3.10) \quad \underline{x}_i = \underline{x}_0 R^i, \quad i \geq 0$$

ここで, R は行列方程式 $R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0$ の一意の最小解である.

(ii) ベクトル $\underline{x}^* = (\gamma_0 \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_{M-1} \ \underline{x}_0)$ は次式で与えられる.

$$(3.11) \quad \gamma_0 + \sum_{m=1}^{M-1} \gamma_m e + \underline{x}_0 (I - R)^{-1} e = 1$$

$$\underline{x}^* P^* = \underline{0}$$

ただし, P^* は次式で与えられる.

$$(3.12) \quad P^* = \begin{vmatrix} A_0^1 & A_0^0 & & & & \\ A_1^2 & A_1^1 & A_1^0 & & & \\ & A_2^2 & A_2^1 & A_2^0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & A_{M-1}^2 & A_{M-1}^1 & A_{M-1}^0 \\ & & & & & A_M^2 & A_1 + R A_2 \end{vmatrix}$$

4. 安定条件

定式化に従って, ベクトル Π を $M > N$ の場合, $(\pi_0 \ \pi_1 \ \cdots \ \pi_{N+d^*} \ \pi_{N+d^*+1} \ \pi_{N+d^*+1} \ \cdots \ \pi_{N+r^*-1} \ \pi_{N+r^*-1} \ \pi_{N+r^*})$ と, $M \leq N$ の場合, $(\pi_0 \ \pi_1 \ \cdots \ \pi_M)$ とおく.

補題 1 $\gamma_a = r\beta / C\alpha\theta_2$, $\gamma_b = r\beta / C\alpha(\theta_2 + \theta_3)$,

$$(4.1) \quad \eta_g(n) = \sum_{\ell=0}^n (\gamma_g/r)^\ell (\min(M-N, r) - r^* + \ell)!$$

とおく. システムがスケジューリング規則 g に従う時, π は以下のように与えられる. $M > N$ の場合,

$$\begin{aligned}
 \pi_j &= \frac{C^j \gamma_g^j}{j!} \pi_0, & 0 \leq j \leq C, \\
 &= \frac{C^C \gamma_g^j}{C!} \pi_0, & C \leq j \leq \min(M-r, N), \\
 (4.2) \quad &= \frac{C^C r! \gamma_g^j}{C! r^{j-\min(M-r, N)} (\min(M, N+r) - j)!} \pi_0, & \min(M-r, N) \leq j \leq N+d^*, \\
 &= \frac{C^C r! \gamma_g^j \eta_g(N+r^*-j-1)}{C! r^{j-\min(M-r, N)} (\min(M, N+r) - j)! \eta_g(r^*-d^*-1)} \pi_0, & N+d^* \leq j \leq N+r^*-1, \\
 &= \frac{C^C r! \gamma_g^{N+r^*}}{C! r^{N+r^*-\min(M-r, N)} \eta_g(r^*-d^*-1)} \pi_0, & N+d^*+1 \leq j \leq N+r^*, \\
 \pi_0 &= \left\{ \sum_{j=0}^{C-1} \frac{C^j \gamma_g^j}{j!} + \frac{C^C}{C!} \sum_{j=C}^{\min(M-r, N)-1} \gamma_g^j \right. \\
 (4.3) \quad &+ \frac{C^C r!}{C!} \sum_{j=\min(M-r, N)}^{N+d^*-1} \frac{\gamma_g^j}{r^{j-\min(M-r, N)} (\min(M, N+r) - j)!} \\
 &\left. + \frac{C^C r!}{C! \eta_g(r^*-d^*-1)} \sum_{j=N+d^*}^{N+r^*-1} \frac{\gamma_g^j \eta_g(N+r^*-j)}{r^{j-\min(M-r, N)} (\min(M, N+r) - j)!} \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

$M \leq N$ の場合,

$$\begin{aligned}
 \pi_j &= \frac{C^j \gamma_g^j}{j!} \pi_0, & 0 \leq j \leq C, \\
 (4.4) \quad &= \frac{C^C \gamma_g^j}{C!} \pi_0, & C \leq j \leq M-r, \\
 &= \frac{C^C r! \gamma_g^j}{C! r^{j-M+r} (M-j)!} \pi_0, & M-r \leq j \leq M,
 \end{aligned}$$

$$(4.5) \quad \pi_0 = \left\{ \sum_{j=0}^{C-1} \frac{C^j \gamma_g^j}{j!} + \frac{C^C}{C!} \sum_{j=C}^{M-r-1} \gamma_g^j + \frac{C^C r!}{C!} \sum_{j=M-r}^M \frac{\gamma_g^j}{r^{j-M+r} (M-j)!} \right\}^{-1}$$

定理2 システムがスケジューリング規則 g に従う時, 安定条件は次式で与えられる.

$$(4.6) \quad \lambda < \alpha \theta_3 \left\{ C - \sum_{j=0}^{C-1} \frac{(C-j) C^j \gamma_g^j}{j!} \pi_0 \right\}$$

5. 臨界到着率の性質

安定条件 (4.6) 式の右辺を λ^* とおき, 臨界到着率と呼ぶ.

$$(5.1) \quad \lambda^* = \alpha \theta_3 \left\{ C - \sum_{j=0}^{C-1} \frac{(C-j) C^j \gamma_g^j}{j!} \pi_0 \right\}$$

この臨界到着率は, システムが安定となるような到着率の上界を与え, 計算機システム等においてはスループットと呼ばれることもある.

λ^* をパラメータ P の関数と考えた時, $P=P_0$ に対する λ^* の値を $\lambda^*(P=P_0)$ で表わす. 同様に $\pi_0(P=P_0)$ も定義する.

補題 2 $M > N$, $\min(M-N, r) \geq r^* > 1$ の時, $r^* > d_0 > 0$ なる任意の d_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \pi_0(d^* = d_0)^{-1} - \pi_0(d^* = d_0 - 1)^{-1} \\ &= \frac{C^c r! (\min(M-N, r) - d_0)!}{C! \eta_g(r^* - d_0) \eta_g(r^* - d_0 - 1)} \left(\frac{\gamma_g}{r} \right)^{r^* - d_0} \sum_{j=N+d_0+1}^{N+r^*} \frac{\gamma_g^j \eta_g(N+r^*-j)}{\gamma^{j-\min(M-r, N)} (\min(M, N+r) - j)!} \\ &> 0 \end{aligned}$$

定理 3 $M > N$ の時, 臨界到着率 λ^* はサービス再開点 d^* に関して狭義に単調増加する.

そこで, d^* を最大値 $r^* - 1$ とおいて以下の議論を進める.

補題 3 $M_0 \geq N+r$ なる任意の M_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.3) \quad \pi_0(M=M_0) = \pi_0(M=N+r)$$

$N+r \geq M_0 > N+1$ なる任意の M_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.4) \quad \pi_0(M=M_0)^{-1} - \pi_0(M=M_0-1)^{-1} = \frac{C^c r!}{C!} \sum_{j=M_0-r}^{N+r^*} \frac{(j-M_0+r) \gamma_g^j}{\gamma^{j-M_0+r+1} (M_0-j)!} > 0$$

$M_0 \leq N+1$ なる任意の M_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.5) \quad \pi_0(M=M_0)^{-1} - \pi_0(M=M_0-1)^{-1} = \frac{C^c r!}{C!} \sum_{j=M_0-r}^{M_0} \frac{(j-M_0+r) \gamma_g^j}{\gamma^{j-M_0+r+1} (M_0-j)!} > 0$$

補題 4 $M > N$ の時, $\min(M-N, r) \geq r_0 > 1$ なる任意の r_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.6) \quad \pi_0(r^* = r_0)^{-1} - \pi_0(r^* = r_0 - 1)^{-1} = \frac{C^c r! \gamma_g^{N+r_0}}{C! \gamma^{\max(N+r-M, 0) + r_0} (\min(M-N, r) - r_0)!} > 0$$

定理4 (i) 臨界到着率 λ^* は, $M \leq N+r$ なる任意の最大多重度 M に関して狭義に単調増加する. また, $M \geq N+r$ の時, λ^* は一定値を取る.

(ii) $M > N$ の時, λ^* は完全ドロッキング点 r^* に関して狭義に単調増加する.

次に, システムの設計に関するパラメータに対する λ^* の依存性を調べる.

補題5 $N_0 \geq M-1$ なる任意の N_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.7) \quad \pi_0(N=N_0) = \pi_0(N=M-1)$$

$M > N_0 > M-r$ なる任意の N_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.8) \quad \pi_0(N=N_0)^{-1} - \pi_0(N=N_0-1)^{-1} = \frac{C^C r! \gamma_g^{N+r^*}}{C! r^{N_0+r^*-M+r} (M-N_0-r^*)!} > 0$$

$M-r \geq N_0$ なる任意の N_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.9) \quad \begin{aligned} & \pi_0(N=N_0)^{-1} - \pi_0(N=N_0-1)^{-1} \\ &= \frac{C^C r!}{C!} \left\{ \sum_{j=1}^{r^*} \frac{(j-1) \gamma_g^j}{r^j (r+1-j)!} + \frac{\gamma_g^{r^*+1}}{r^{r^*} (r-r^*)!} \right\} \gamma_g^{N_0-1} > 0 \end{aligned}$$

サービス率がサーバー数に依存する場合を考える. ユニット-I のサーバー数が C 個の時の個々のサーバーのサービス率 α_c を

$$(5.10) \quad \alpha_c = \alpha / C$$

で与えると, サーバー数が C_0 個の時の臨界到着率は,

$$(5.11) \quad \lambda^*(C=C_0) = \theta_3 \left\{ \alpha - \alpha_{C_0} \sum_{j=0}^{C_0-1} \frac{(C_0-j)C_0^j \gamma_g^j}{j!} \pi_0(C=C_0) \right\}$$

となる.

補題6 任意の $C_0 \geq 1$ に対して次式が成り立つ.

$$(5.12) \quad \left\{ \lambda^*(C=C_0) - \lambda^*(C=C_0+1) \right\} \left\{ (C_0+1)^{C_0} \sum_{j=0}^{C_0-1} \frac{C_0^j \gamma_g^j}{j!} - C_0^{C_0} \sum_{j=0}^{C_0-1} \frac{(C_0+1)^j \gamma_g^j}{j!} \right\}^{-1}$$

$$= \begin{cases} \varepsilon(1-\psi_1)\gamma_g^{\min(M-r, N)} > 0, & M > N \text{ の時,} \\ \varepsilon(1-\psi_2)\gamma_g^{M-r} > 0, & M \leq N \text{ の時.} \end{cases}$$

ただし,

$$\psi_1 = (1-\gamma_g)r! \sum_{j=0}^{N+r^*-\min(M-r, N)} \frac{\gamma_g^j}{r^j(r-j)!}$$

$$(5.13) \quad \psi_2 = (1-\gamma_g)r! \sum_{j=0}^r \frac{\gamma_g^j}{r^j(r-j)!}$$

$$\varepsilon = \alpha \pi_0(C=C_0) \pi_0(C=C_0+1) / C_0!$$

である.

ユニット-IIのサーバー数が r 個の時のサービス率 β_r が

$$(5.14) \quad \beta_r = \beta / r$$

で与えられる場合を考える.

補題7 $M > N$ の時, 以下のことが成り立つ. $M-N \geq r_0 > r_1$

> 1 なる任意の r_0, r_1 に対して次式が成り立つ.

$$\pi_0(r=r_0, r^*=r_1)^{-1} - \pi_0(r=r_0-1, r^*=r_1)^{-1}$$

$$(5.15) \quad = \frac{C^c (r_0 - 1)!}{C!} \sum_{j=2}^{r_1} \frac{\gamma_g^{j+N}}{(r_0 - j)!} \left\{ \frac{1}{r_0^{j-1}} - \frac{r_0 - j}{(r_0 - 1)^j} \right\} > 0$$

$M - N \geq r_0 > 1$ なる任意の r_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.16) \quad \pi_0(r = r_0, r^* = 1) = \pi_0(r = r_0 - 1, r^* = 1),$$

$$(5.17) \quad \pi_0(r = r_0, r^* = r_0)^{-1} > \pi_0(r = r_0 - 1, r^* = r_0 - 1)^{-1}$$

$r_0 \geq M - N \geq r_1 \geq 1$ なる任意の r_0, r_1 に対して次式が成り立つ.

$$(5.18) \quad \pi_0(r = r_0, r^* = r_1)^{-1} - \pi_0(r = r_0 + 1, r^* = r_1)^{-1} \\ = \frac{C^c r_0!}{C!} \sum_{j=M-r_0}^{N+r_1} \frac{\gamma_g^j}{(M-j)!} \left\{ \frac{1}{r_0^{j-M+r_0}} - \frac{1}{(r_0+1)^{j-M+r_0}} \right\} > 0$$

補題 8 $M \leq N$ の時, 任意の $r_0 \geq 1$ に対して次式が成り立つ.

$$(5.19) \quad \pi_0(r = r_0)^{-1} - \pi_0(r = r_0 + 1)^{-1} \\ = \frac{C^c r_0!}{C!} \sum_{j=M-r_0}^M \frac{\gamma_g^j}{(M-j)!} \left\{ \frac{1}{r_0^{j-M+r_0}} - \frac{1}{(r_0+1)^{j-M+r_0}} \right\} > 0$$

ユニット - I のサービス率 α を一定に保ち, ユニット - II のサービス率 β を変化させる場合を考える. λ^* の定義式 (5.1) より, $\partial \lambda^* / \partial \beta$ の符号は,

$$(5.20) \quad \lambda = \sum_{j=0}^{C-1} \frac{(C-j)C^j \gamma_g^j}{j!} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma_g} \pi_0^{-1} - \pi_0^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma_g} \sum_{j=0}^{C-1} \frac{(C-j)C^j \gamma_g^j}{j!}$$

のそれと一致する.

補題 9 まず,

$$(5.21) \quad \phi = \sum_{j=1}^{C-1} \frac{j C^j \gamma_g^{j-1}}{(j-1)!} \cdot \sum_{k=1}^{C-1} \frac{C^k \gamma_g^k}{k!} - \sum_{j=1}^{C-1} \frac{C^j \gamma_g^j}{(j-1)!} \cdot \sum_{k=1}^{C-1} \frac{C^k \gamma_g^{k-1}}{(k-1)!} > 0$$

が成り立つ。従って,

$$(5.22) \quad \chi = \phi + \sum_{j=1}^{C-1} \frac{j C^j \gamma_g^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{C^C}{C!} \sum_{j=0}^{C-1} \frac{(C-j) C^j \gamma_g^j}{j!} \mu_j > 0$$

を得る。ただし, μ_j は次のように与えられる。 $M > N$ の時,

$$(5.23) \quad \mu_j = \sum_{k=C}^{\min(M-r, N)-1} (k-j) \gamma_g^{k-1} + r! \sum_{k=\min(M-r, N)}^{N+r^*} \frac{(k-j) \gamma_g^{k-1}}{\gamma^{k-\min(M-r, N)} (\min(M, N+r)-k)!}$$

また, $M \leq N$ の時,

$$(5.24) \quad \mu_j = \sum_{k=C}^{M-r-1} (k-j) \gamma_g^{k-1} + r! \sum_{k=M-r}^M \frac{(k-j) \gamma_g^{k-1}}{\gamma^{k-M+r} (M-k)!}$$

である。

以上の補題により, システムの設計に関するパラメータについて, 次の定理を導くことができる。

定理 5 (i) 臨界到着率 λ^* は, $N \leq M-1$ なるユニット - I の容量 N に関して狭義に単調増加する。 $N \geq M-1$ の時, λ^* は一定値を取る。

(ii) ユニット - I の各サーバーのサービス率がサーバー数 C に反比例する時, λ^* は C に関して狭義に単調減少する。

(iii) ユニット - II の各サーバーのサービス率がサーバー数 r に反比例する時, 次のことが成り立つ.

・ $M > N$ の時

$M - N \geq r_0 > r_1 > 1$ なる任意の r_0, r_1 に対して次式が成り立つ.

$$(5.25) \quad \lambda^*(r=r_0, r^*=r_1) > \lambda^*(r=r_0-1, r^*=r_1)$$

$M - N \geq r_0 > 1$ なる任意の r_0 に対して次式が成り立つ.

$$(5.26) \quad \lambda^*(r=r_0, r^*=1) = \lambda^*(r=r_0-1, r^*=1)$$

$r_0 \geq M - N \geq r_1 > 1$ なる任意の r_0, r_1 に対して次式が成り立つ.

$$(5.27) \quad \lambda^*(r=r_0, r^*=r_1) > \lambda^*(r=r_0+1, r^*=r_1)$$

特に, r^* を最大値 $\min(M-N, r)$ に設定すると

$$(5.28) \quad \begin{aligned} & \lambda^*(r=1) < \lambda^*(r=2) < \cdots < \lambda^*(r=M-N-1) < \lambda^*(r=M-N) \\ & > \lambda^*(r=M-N+1) > \lambda^*(r=M-N+2) > \cdots \end{aligned}$$

となる.

・ $M \leq N$ の時

λ^* は r に関して狭義に単調減少する.

(iv) λ^* はユニット - II のサービス率 β に関して狭義に単調増加する. また, 次式が成り立つ.

$$(5.29) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \lambda^* = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lambda^* = C\alpha\theta_3$$

$$(5.30) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^* = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^* = \begin{cases} r\beta\theta_3/\theta_2, & \text{規則 a} \\ r\beta\theta_3/(\theta_2+\theta_3), & \text{規則 b} \end{cases}$$

Stidham [6] は、単一ユニットシステムではサービス率 α の C 個の指数サーバーをサービス率 $C\alpha$ の 1 個の指数サーバーに取り換える方が望ましいことを示した。本稿で扱ったモデルにおいても、下ロックキングの起らないユニット - I にその事実が当てはまる。しかし、下ロックキングの発生するユニット - II には逆転現象が認められる。

λ^* の α への依存性を知るためには、 $\partial\lambda^*/\partial\alpha$ の符号を調べなければならないが、その表現の複雑さのために未だ確認できていない。 λ^* が α に関して狭義に単調増加すると推測するのは自然であり、簡単な数値計算で検証できる。

紙面の都合により、種々のパラメータに関する λ^* の性質を示す数値例は割愛する。

6. おわりに

以上の解析結果は、安定な計算機システムの設計に対する 1 つの指針を与えている。今後更に解析を進め、実際の設計に役立つより具体的な結論を得たいと思う。

また、行列長や待ち時間等の統計量の有効な計算法の開発及び具体的な数値計算も非常に興味深い問題である。

最後に、本研究に関して有意義な御意見を賜った京都大学大型計算機センター、北川一助教授に感謝いたします。

References

- [1] Kobayashi, H., "System Design and Performance Analysis Using Analytic Models," in Current Trends in Programming Methodology Vol.III, K. M. Chandy and R. T. Yeh (Eds.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1978).
- [2] Kobayashi, H., Modeling and Analysis — An Introduction to System Performance Evaluation Methodology, Addison- Wesley, Reading, Mass., (1978).
- [3] Buzen, J. P., "A Queueing Network Model of MVS," Comput. Surveys, Vol.10(1978), pp.319-331.
- [4] Latouche, G., "Algorithmic Analysis of a Multiprogramming-Multiprocessor Computer System," Technical Report 78/13, Department of Statistics and Computer Science, University of Delaware (1978).
- [5] Neuts, M. F., Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models — An Algorithmic Approach, The John Hopkins University Press, Baltimore and London, (1981).
- [6] Stidham, S., "On the Optimality of Single-Server Queueing Systems," Operations Res., Vol.18(1970), pp.708-732.