

氏 名	いり たに ひろし 入 谷 寛
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2937 号
学位授与の日付	平 成 17 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Quantum D - modules and equivariant Floer theory for free loop apaces (量子 D 加群と自由ループ空間に対する同変フレア理論)
論文調査委員	(主 査) 教 授 中 島 啓 教 授 深 谷 賢 治 教 授 河 野 明

論 文 内 容 の 要 旨

シンプレクティック多様体 M に対して, M を像とするリーマン面からの擬正則写像の全体のなすモジュライ空間を考える。モジュライ空間は, 特異点を持つかもしれないが, 有限次元の多様体であり, そのコホモロジー環の上で交叉理論を展開することができる。これを用いて, 定義されるのが M の Gromov-Witten 不変量である。特に, 球面 S^2 からの写像を考えると, M のコホモロジー環の積構造を量子変形した, 量子コホモロジーが定義される。これらは1990年代に定義されて以来, 現在も活発に研究が行われている。

一方で Givental は, 物理的な動機付けから, 次のような無限次元多様体の幾何学としての量子コホモロジーの理解を提唱した。すなわち, 円周 S^1 からシンプレクティック多様体 M への写像全体のなす自由ループ空間の普遍被覆空間 $\tilde{L}M$ という無限次元多様体の上でモース理論を展開することにより, 円周 S^1 のパラメータ変換による $\tilde{L}M$ への S^1 作用に関する半無限次の S^1 同変半無限次コホモロジー群 (フレア・コホモロジー) を定義できると仮想的に考える。形式的な議論により, このコホモロジーは D 加群の構造をもつことが示される。そしてこれが, 量子コホモロジーの積を接続行列と見て定義される D 加群 (量子 D 加群) と同型になるだろうと予想した。

しかし, $\tilde{L}M$ は無限次元多様体であり, その半無限次の S^1 同変コホモロジー理論を数学的に厳密に構成することは, 現時点では難しいと思われる。申請者は, M がトーリック多様体内の完全交叉であるという特別な場合に, $\tilde{L}M$ が有限次元多様体の極限として近似できることに着目して, 有限次元多様体のコホモロジーの極限として, 半無限次のコホモロジーを厳密に定義し, その上 D 加群の構造を定義した。

さらに $c_1(M)$ が nef (数値的に半正) であれば, 同変フレア・コホモロジーと量子 D 加群が同型であることを証明した。この証明のために申請者は Guest の研究に動機付けされて, 抽象量子 D 加群の概念を導入し, その同型類の中から一意的に定まる「標準形」の概念を導入した。同変フレア・コホモロジーの「標準形」が量子 D 加群に他ならず, 「標準形」を求める手続きが物理でいうところのミラー変換に他ならない。

引き続いて参考論文では, nef という仮定をはずしたときの同変フレア・コホモロジーを研究した。この場合は, 一般には同変フレア・コホモロジーと量子 D 加群は同型にならない。この場合は, 量子コホモロジーに二次元コホモロジー $H^2(M)$ をパラメータ空間とする小量子コホモロジーと, コホモロジー全体 $H^*(M)$ をパラメータ空間とする大量子コホモロジーがあることを念頭において, 同変フレア・コホモロジーの D 加群の底空間を拡大し, それが大量子コホモロジーの定める大量子 D 加群に等しいことを証明した。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

近年, 理論物理学, 特に弦理論の研究に示唆されて多くの新しい数学の概念が導入されている。中でも顕著なのは, すべての写像の全体のなす空間といった無限次元多様体を, 通常の有限次元多様体と同様に自由自在に使いこなすことである。

このようにしてたとえば新しい不変量の定義がなされ、通常の幾何学へ応用がなされた。ところが、数学的に厳密にいうと、無限次元多様体の幾何学は基礎付けがなされていないので、その代わりに、擬正則写像の全体の空間といった、有限次元のモジュライ空間の幾何学を用いて不変量は定義される。そのためには、モジュライ空間の幾何学についての深い理解が必要であり、現在もこの方面の研究は活発に行われている。この立場からいえば、物理的な背景である無限次元多様体の幾何学は単に動機付けのために必要なだけであったことになる。しかし、これはあくまで不変量の一面的な理解に過ぎず、真の理解をするためには無限次元多様体の幾何学を直接的に展開することが重要であると思われる。

申請者は、円周 S^1 からシンプレクティック多様体 M への写像全体のなす自由ループ空間の普遍被覆空間 $\tilde{LM}$ という無限次元多様体の同変フレア・コホモロジーを定義することが可能であり、さらに擬正則写像の全体のなすモジュライ空間をもちいて定義される量子 D 加群と同型であるという Givental の予想について研究した。 $\tilde{LM}$ は無限次元多様体であり、その同変フレア・コホモロジーを定義することは、現時点では技術的に難しいと思われる。申請者は、 M がトーリック多様体内の完全交叉であるという特別な場合に、この困難を克服して同変フレア・コホモロジーを定義した。さらに $c_1(M)$ が nef であれば、同変フレア・コホモロジーと量子 D 加群が同型であることを証明した。そのために抽象量子 D 加群の概念を導入し、その同型類の中に一意的に「標準形」が存在することを証明し、同変フレア・コホモロジーの「標準形」が量子 D 加群であることを証明した。申請者は、このように明快な枠組みを定式化したにとどまらず、証明の途中の技術的に微妙な取り扱いを必要とする部分も見事に処理した。この結果は、高く評価できるものである。

さらに参考論文では、 $c_1(M)$ が nef でない場合を扱った。このときは同変フレア・コホモロジーと量子 D 加群は一般には同型にならない。しかし、定義空間を広げて、「大」量子 D 加群を考えると同型になることを証明した。この結果は、ほぼ同時期に得られていた秦泉寺による射影空間内の超平面の量子コホモロジーを決定するための一般ミラー変換を特別な場合として含むのみならず、概念的にもきれいな基礎付けを与えるものである。この結果は、非常に高く評価できる。

以上の理由により、大学院在学5年未満であるが、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また、論文内容とそれに関連した試問の結果、合格と認めた。