

非一様擬軌道追跡の方法と Markov 分割

東大理 関根正幸 (Masayuki Sekine)

f をコンパクト多様体 M 上の $C^{1+\alpha}$ 級微分同相写像 ($0 < \alpha \leq 1$)
 ε を十分小さな正数とする。このとき $0 \leq k \leq \dim M$, $\chi > 0$
 $l \geq 1$ に対し、 $\Lambda_{\chi, l}^k$ を次の性質をもつ点 $x \in M$ の全体とする。

Splitting $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$ が存在し、(1) $\dim E_x^s = k$,

$$(2) \left. \begin{aligned} \|df^n u\| &\leq l e^{\varepsilon |x|n} e^{-\chi n} \|u\| \\ \|df^{-n} u\| &\geq \frac{1}{l} e^{-\varepsilon |x|n} e^{\chi n} \|u\| \end{aligned} \right\} u \in df^m(E_x^s),$$

$$(3) \left. \begin{aligned} \|df^n v\| &\geq \frac{1}{l} e^{-\varepsilon |x|n} e^{\chi n} \|v\| \\ \|df^{-n} v\| &\leq l e^{\varepsilon |x|n} e^{-\chi n} \|v\| \end{aligned} \right\} v \in df^m(E_x^u),$$

$$(4) (\angle(df^m(E_x^s), df^m(E_x^u))) \geq \frac{1}{l} e^{-\varepsilon |x|n}$$

がすべての $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ について成り立つ。

$\Lambda_{\chi, l}^k$ は次の性質をもつ ([Pe1])

(1) 各 $\Lambda_{\chi, l}^k$ はコンパクト。

$$(2) \chi_1 \geq \chi_2, l_1 \leq l_2 \Rightarrow \Lambda_{\chi_1, l_1}^k \subset \Lambda_{\chi_2, l_2}^k.$$

$$(3) f(\Lambda_{x,l}^k) \cup f^{-1}(\Lambda_{x,l}^k) \subset \Lambda_{x,l}^k, l \in \mathbb{N}.$$

これらの性質により、 $\Lambda_x^k = \bigcup_{l \geq 1} \Lambda_{x,l}^k$ は f -不変である。

さらに Λ_x^k は次の性質をもつ。

(4) $x \in M$ が Oseledec の意味で正則 ([Pe1]) で、その

Lyapunov 指数 $\{\chi_j(x)\}_{j=1, \dots, \dim M}$ が

$$\chi_1(x) \leq \dots \leq \chi_k(x) \leq -(1+\varepsilon)\chi, (1+\varepsilon)\chi \leq \chi_{k+1}(x) \leq \dots \leq \chi_{\dim M}(x)$$

をみたすならば x は Λ_x^k に属する。

ここでの目的は、 Λ_x^k の「擬軌道追跡性」を調べる事と、
応用として、 Λ_x^k にある条件を仮定して、Markov 分割を構成する事にある。以下 k と χ を固定し、 $\Lambda = \Lambda_x^k$, $\Lambda_l = \Lambda_{x,l}^k$ と書く。 ($l \geq 0$)

定義 1. $\{\beta_l\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ を単調減少正数列とするとき、点列 $\{x_n\}_{a < n < b}$ が $(\{\Lambda_l\}, \{\beta_l\})$ -擬軌道であるとは、

$k: (a, b) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ が存在して、 $|k(n) - k(n+1)| \leq 1$ ($a < n < b-1$),

$$f(x_{n-1}), x_n \in \Lambda_{k(n)}, d(x_n, f(x_{n-1})) \leq \beta_{k(n)} \quad (a < n < b)$$

をみたすもの。

定義 2. $\|\cdot\|'$ を Λ 上の metric, $\gamma > 0$ とするとき、 $y \in M$ が $(\{\Lambda_l\}, \{\beta_l\})$ -擬軌道 $\{x_n\}_{a < n < b}$ を $\|\cdot\|'$ に関して γ -追跡するとは任意の $a < n < b$ に対し $\|\exp_{x_n}^{-1} f^n(y)\|'_{x_n} \leq \gamma$ となること。

これらの概念を用いて Λ 上の擬軌道追跡性は次の様に記述できる。

定理 1 Λ 上に可測な metric $|\cdot|'$ が存在して次をみたす。

(1) $|\cdot|'$ は各 Λ_ℓ 上で $\|\cdot\|$ と同値である。詳しくは、

定数 C_1, C_2 が存在して、

$$C_1 \|\cdot\|_x \leq |\cdot|'_x \leq C_2 e^{4\ell \varepsilon x} \|\cdot\|_x \quad (x \in \Lambda_\ell)$$

となる。

(2) $0 < \gamma \leq 1$ に対し、減少正数列 $\{\beta_\ell\}_{\ell \in \mathbb{Z}_+}$ が存在して、任意の $(\{\Lambda_\ell\}, \{\beta_\ell\})$ -擬軌道 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ はある M の点 y により、一意に γ -追跡される。

$|\cdot|'$ の構成は [Ts] 内の議論が元になっている。

この定理の応用として我々は Markov 分割を構成するための条件を与えることができる。

定理 2 関数 $C_1, C_2: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ が存在して次をみたすとする。

(a) $C_1(k) \leq k \leq C_2(k)$

(b) $C_1(k)$ は単調増加で、 $k \rightarrow \infty$ のとき $C_1(k) \rightarrow \infty$ となる。

(c) 定理 1 の状況下、 $(\{\Lambda_\ell\}, \{\beta_\ell\})$ -擬軌道 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が $x_0 \in \Lambda_k$ をみたすならば、 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $\Lambda_{C_1(k)} - \Lambda_{C_1(k)-1}$ の点で一意に γ -追跡される。

このとき、 Λ は次の性質をもつ可算個の開集合の族 $R = \{R_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ により覆われる。

- (1) $\text{diam } R_m = \sup_{x, y \in R_m} d(x, y) \leq \gamma'$
 ここで γ' は十分小さな正数。
- (2) 各 R_m はある Λ_ε に含まれる。
- (3) 各 R_m は proper である。すなわち $c|_{\Lambda_\varepsilon}(\text{int}_{\Lambda_\varepsilon}(R_m)) = R_m$
- (4) $\{\text{int } R_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ は互いに素である。
- (5) $f(R_m)$ は R の高々有限個の元とのみ交わる。
- (6) $x \in R_m$ に、 $W^s(x, R_m) \subset W^s(x) \cap R_m$, $W^u(x, R_m) \subset W^u(x) \cap R_m$ が対応する。ここで $W^s(x) = \{y \in M \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < 0\}$
 $W^u(x) = \{y \in M \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < 0\}$ 。
- (7) $x, y \in R_m$ に対し、 $W^s(x, R_m) \cap W^u(y, R_m)$ は 1 点よりなり、 R_m に属する。
- (8) $x \in \text{int } R_m \cap f^{-1}(\text{int } R_{m'})$ に対し、
 $f(W^s(x, R_m)) \subset W^s(f(x), R_{m'})$
 $f^{-1}(W^u(f(x), R_{m'})) \subset W^u(x, R_m)$
 となる。

参考文献

- [Bo] R. Bowen, Lecture Note in Math. 470 (1975), Springer.
- [Ka] A. B. Katok, Publ. Math. IHES 51 (1980), 137-173
- [Pe1] Y. B. Pesin, USSR Izvestija 10 (1976), 1261-1305.
- [Pe2] Y. B. Pesin, Russian Math. Surveys 32: 4 (1977), 55-112

[Se] M. Sekine, A Method of Nonuniform Pseudo-orbit
Tracing and Markov Partitions, preprint.

[Ts] M. Tsujii, Regular points for ergodic Sinai measures,
preprint