

2

C_K/D_K の Galois cohomology について

京大 理 片山 真一

Introduction. k を有限次代数体, K を k の有限次 Galois 拡大とする。また, $\text{Gal}(K/k)$ を G で表し, C_K を K の idele 類群とし, D_K をその単位元の連結成分とする。この時, C_K の G -加群としての P 次 cohomology 群 $H^P(G, C_K)$ は, 類体論の cohomology による証明において, 重要な群で, 任意の整数 P に対し,

$$(i) \quad H^P(G, C_K) \cong H^{P-2}(G, \mathbb{Z})$$

という関係をみたす。

同様に, D_K の cohomology 群も, Weil 群の定義において重要な群で, 任意の整数 P に対し, 次が成立する。

$$(ii) \quad H^P(G, D_K) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r & (P: \text{even}) \\ 0 & (P: \text{odd}) \end{cases}$$

ただし, r は, K で分岐する k の実素点の数である。

ここで、我々が問題にするのは、 $H^p(G, C_k/D_k)$ の構造で、この構造を定めることも、 C_k, D_k の場合と同じく整数論的な意味があると考えられる。

まず、分岐の数 $r = 0$ の時は、完全系列

$1 \rightarrow D_k \rightarrow C_k \rightarrow C_k/D_k \rightarrow 1$ に基く cohomology sequences と (i), (ii) より、全ての整数 p に対し、

$$(iii) \quad H^p(G, C_k/D_k) \cong H^p(G, C_k) \cong H^{p-2}(G, \mathbb{Z})$$

が、容易に得られる。

従って、以下の議論では、 $r > 0$ の場合に限る。この時、 $[K: \mathbb{Q}] = n$ とおけば、 n は偶数であり、 $n = 2m$ とおく。

最終的に得られた結果は、 $p \geq 0$ の場合で、まとめて書けば、

$$I) \quad H^0(G, C_k/D_k) \cong G/[G, G]N$$

ただし、 N は、次のような群とする。 K で分岐する $\mathbb{Q}$ の実素点を $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_r$ とする。 $\mathbb{P}_i$ の K への延長の 1 つを $\mathbb{P}_i$ とし、 $\mathbb{P}_i$ の分解群を N_i とする時に、 N は、 $N = \langle N_i \mid 1 \leq i \leq r \rangle$ と、全ての N_i で生成した群を表す。

$$II) \quad H^{2p+2}(G, C_k/D_k) \cong H^{2p}(G, \mathbb{Z}) / m \cdot H^{2p}(G, \mathbb{Z}) \quad (p \geq 0)$$

ただし、 $m H^{2p}(G, \mathbb{Z})$ は、 $H^{2p}(G, \mathbb{Z})$ を加群と考えた時

各元の m 倍で生成された群, 即ち $\langle m\chi \mid \chi \in H^{2p}(G, \mathbb{Z}) \rangle$ を示す。

$$\text{III) } H^{2p+1}(G, C_K/D_K) \cong H^{2p+1}(G, \mathbb{Z}) \times M \quad (p \geq 0)$$

ただし, M は, G の 2-Sylow 群 S と, P によって, 次のように分類される群,

$$a) \ M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1} \quad \text{は次の場合}$$

$$P = 0$$

または, S が巡回群

または, S が一般四元数群で, $P = \text{even}$ の時

$$b) \ M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \quad \text{その他。}$$

§ 1. 証明の方針。

まず, K の idele 群 $K_A^\times$ の単位元の連結成分を H_K とする。 E を K の複素素点全体の集合とすると, H_K の極大 compact 部分群 H'_K は,

$$H'_K = \{ \chi = (\chi_P) \in K_A^\times \mid \chi_P = 1 \text{ if } P \notin E, |\chi_P| = 1 \text{ if } P \in E \}$$

で, 与えられる。

$K_A^\times$ から C_K への自然な準同型を φ とし, $\varphi(H'_K) = D'_K$ とすると, $D'_K \subset D_K$ で, 次の完全系列が存在する。

$$(1) \quad 1 \rightarrow H'_K \xrightarrow{\varphi} C_K \xrightarrow{\psi} C_K/D_K \rightarrow 1$$

(1) にもとづく cohomology sequences において,

$H^{2p+1}(G, H'_k) = 0$ (for all $p \in \mathbb{Z}$) が成立するから, 任意の整数 p に対し, 次の完全系列が存在する。

$$(2) \quad 0 \longrightarrow H^{2p+1}(C_k) \xrightarrow{\psi_*} H^{2p+1}(C_k/D'_k) \xrightarrow{\delta_*} H^{2p+2}(H'_k) \\ \xrightarrow{\varphi_*} H^{2p+2}(C_k) \xrightarrow{\psi_*} H^{2p+2}(C_k/D'_k) \longrightarrow 0$$

ここで, G -加群 A に関して, $H^p(G, A)$ を $H^p(A)$ と略記した。

さらに, D_k/D'_k は, 実数体 $\mathbb{R}$ と solenoid 何個かの直積になることから, 一意的に除法可能である。従って,

$1 \rightarrow D_k/D'_k \rightarrow C_k/D'_k \rightarrow C_k/D_k \rightarrow 1$ に基づく cohomology sequences より, 次式を得る。

$$(3) \quad H^p(G, C_k/D_k) \cong H^p(G, C_k/D'_k) \text{ (for all } p \in \mathbb{Z})$$

従って, 以下では, (3) の右辺の群の構造を決定する。

まず, (2) において, 2行目の ψ_* は, onto map. ゆえ

$$(4) \quad H^{2p+2}(C_k/D'_k) \cong H^{2p+2}(C_k) / \varphi_*(H^{2p+2}(H'_k))$$

を得る。同様に, 1行目の ψ_* は, 単射ゆえ,

(*) $H^{2p+1}(C_k/D'_k)$ は, $H^{2p+1}(C_k)$ の $\delta_*(H^{2p+1}(C_k/D_k))$ による拡大になっている。』ことがわかる。

証明の大きな方針としては, この (4), (*) の結果に, 序文に書いた, 良く知られた結果 (i), (ii) を代入するのであるが, その代入のためには, transfer homomorphism, restriction cup product 等の cohomology の基本的な写像を用い

る。次の section では、得られた結果を細かな証明は、省略して列挙する。

§3. 前§の H_K は K_A^* の部分群ゆえ、 $H^{2p}(G, H_K)$ は、 $H^{2p}(G, K_A^*)$ の直和成分である。従って、(4) の $\mathcal{C}_*$ は、 $H^{2p}(G, K_A^*) \rightarrow H^{2p}(G, C_K)$ という準同型から導かれるから、次の定理は、明らかである。

定理1. 全ての整数 p に対し、次の同型が成立する。

$$H^{2p+2}(G, C_K/D_K) \cong H^{2p}(G, \mathbb{Z}) / \langle \tau^{N_i, G} H^{2p}(N_i, \mathbb{Z}) \mid 1 \leq i \leq r \rangle$$

ただし、 $\tau^{N_i, G}$ は、 N_i から G への transfer homomorphism。

ここで、 $p = -1$ とすることにより、自然に (I) が導かれる。

系1. N を前と同様に、 N_i で生成される G の部分群とすると、 $H^0(G, C_K/D_K) \cong G/[G, G]N$

次に (II), (III) については、まず、 G が Abelian 群の時を考える。ここで、 N_i から G への制限写像を ρ^{G, N_i} とおくと、 $p \geq 0$ に対し、 $H^{2p}(N_i, \mathbb{Z}) = \rho^{G, N_i} H^{2p}(G, \mathbb{Z})$ が成立するので、 $\tau^{N_i, G} H^{2p}(N_i, \mathbb{Z}) = \mathcal{M} H^{2p}(G, \mathbb{Z})$ である。従って (4) より、(II) が得られる。Lyndon [5]. で示された $H^*(G, \mathbb{Z})$ の Abelian 群としての構造により、(III) を言うためには、(*) での拡大が split すればよい。これは、 $H^{2p}(G, H_K)$ の non-

trivial な cocycle の代表系を実際に書き下し, 低次元の場合 split することを示し, 高次元の時には, cup 積を用いて, 低次元の結果を拡張することにより証明される。以上の結果を, 非Abel群 G にのばすために, 次の補題を用意する。

補題1. 2^l を n を割る最大の2巾とし, G の 2-Sylow 群を S で表す。この時, $P \geq 0$ に対し, 次は同値である。

$$\begin{aligned} H^{2P+2}(G, C_k/D_k) &\cong H^{2P}(G, \mathbb{Z})/m H^{2P}(G, \mathbb{Z}) \\ \iff H^{2P+2}(S, C_k/D_k) &\cong H^{2P}(S, \mathbb{Z})/2^{l-1} H^{2P}(S, \mathbb{Z}) . \end{aligned}$$

補題2. G が位数 2^l の一般四元数群の時, 任意の整数 P に対し, 次が成立する。

$$\begin{aligned} H^{4P}(G, C_k/D_k) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \\ H^{4P+1}(G, C_k/D_k) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1} \\ H^{4P+2}(G, C_k/D_k) &\cong \mathbb{Z}/2^{l-1}\mathbb{Z} \\ H^{4P+3}(G, C_k/D_k) &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \end{aligned}$$

以上の補題は, 補題1は, transfer と制限写像の相互関係, 補題2は, 一般四元数群の cohomological period が4であることから導かれる。

定理2. 任意の Galois 群 G , 正整数 P について, 次が成立する。

$$H^{2P+2}(G, C_k/D'_k) \cong H^{2P}(G, \mathbb{Z}) / m H^{2P}(G, \mathbb{Z})$$

証明). 補題1より, G は 2-群としてよい。 G が巡回群でも, 一般四元数群でもない時は, 各 N_i に対し, $L_i \cap N_i$ で, $L_i \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ であるような G の部分群 L_i が存在する。

この時, Abel 群の時の結果と定理1により,

$$2 H^{2P}(L_i, \mathbb{Z}) = \cap_{N_i \supset L_i} H^{2P}(N_i, \mathbb{Z}) = 0$$

$$\therefore m H^{2P}(G, \mathbb{Z}) = \langle \cap_{N_i \supset G} H^{2P}(N_i, \mathbb{Z}) \mid 1 \leq i \leq r \rangle$$

$= 0$ 従って, 定理1とあわせて, 証明できる。 また,

G が巡回群, 一般四元数群の時は, それぞれ, Abel 群の時の結果と, 補題2により明らか。 以上で証明終わり。

系2. 任意の $P \geq 0$ に対し, 次の同型が成立する。

$$H^{2P+1}(G, C_k/D'_k) \cong H^{2P+1}(G, \mathbb{Z}) \times M$$

(M は, Ⅲ に書いた通り)

この系は, (*) と定理2 から, 拡大が, split することだけが, 残っているが, それは, 補題2 と, G が Abel 群の場合より, cup 積を用いて, 証明される。

§4. 最大 Abelian 拡大との関連。

K の最大 Abelian 拡大を K_{ab} とおく。この時, G -加群として, $C_K/D_K \cong \text{Gal}(K_{ab}/K)$ である。また, K_{ab}/k は, Galois 拡大ゆえ, 次の完全系列が存在する。

$$1 \rightarrow C_K/D_K \rightarrow \text{Gal}(K_{ab}/k) \rightarrow G \rightarrow 1$$

従って, $\text{Gal}(K_{ab}/k)$ は, C_K/D_K の G による拡大であり, $H^2(G, C_K/D_K)$ の 1 つの cohomology 類が対応するが, それは, Weil 群の性質から, $H^2(G, C_K)$ の標準類の ψ による像に対応することがわかる。即ち, $H^2(G, C_K/D_K) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の生成元が, $\text{Gal}(K_{ab}/k)$ には, 対応する。

参考文献

- [1] E. Artin - J. Tate, Class Field Theory. Benjamin, New York (1967)
- [2] H. Cartan - S. Eilenberg, Homological Algebra. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1956)
- [3] 弥永 昌吉 (編), 数論, 岩波書店, (1969)
- [4] 片山 真一, C_K/D_K の Galois cohomology について, 修士論文, 京大, (1981)
- [5] R. C. Lyndon, Cohomology theory for group extensions. Duke Math. J., 15, 271-292 (1948)

[6] R. G. Swan, The p -period of a finite group.

Illinois J. Math., 4, 341-346 (1960)

[7] Zassenhauss, The theory of groups, Chelsea 書店,
(1958)