

特異摂動系におけるアヒル解の数値的考察

児玉 貴大[†] 土居 伸二[†]

[†] 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻

〒 615-8510 京都市西京区京都大学桂

E-mail: {kodama@rotary., doi@}kuee.kyoto-u.ac.jp

あらまし 特異摂動系には、アヒル解 (Canard 解) と呼ばれる興味深い固有の非線形振動が現れる。アヒル解とは、解軌道が nullcline に収束する領域 (安定な領域) と nullcline から遠ざかる領域 (不安定な領域) の両方を通過する周期解であり、ホップ分岐近傍で観測される。これまでに、2 次元の Bonhoeffer-van der Pol (BVP) 方程式に対して漸近解析を用いてアヒル解が発生するパラメタ値を求め、数値計算によってアヒル解の存在が確認された。しかし、数値計算によって得られた解軌道の中に、理論的に存在し得ない不可解な解軌道が観測された。本研究では、BVP 方程式の数値計算において観測された不可解な解軌道の発生原因を調べる。まず、不可解な解の発生原因が数値計算の精度不足によるものと考え、高精度計算ライブラリを用いてアヒル解を計算し、不可解な解軌道が発生するかを確認する。さらに、高精度計算ライブラリを用いてアヒル解を解析し、不可解な解軌道の発生原因について考察する。

キーワード 特異摂動系, アヒル解, 漸近解析, 高精度数値計算ライブラリ

A numerical study of canard solution in a singularly perturbed system

Takahiro KODAMA[†] and Shinji DOI[†]

[†] Department of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Kyotodaigaku-katsura Nishikyo-ku, Kyoto, 615-8510 Japan

E-mail: {kodama@rotary., doi@}kuee.kyoto-u.ac.jp

Abstract In singularly perturbed systems, there are characteristic phenomena such as canards. Canards are periodic orbits which the trajectory follows both the attracting and repelling part of a nullcline. In the two-dimensional Bonhoeffer-van der Pol (BVP) equations, theoretically impossible types of canards have been found by numerical computations. In this study, we analyze the causes of occurrence of this strange canard orbit. Supposing that the lack of precision in numerical computations generates such theoretically impossible orbits, we compute canard orbits using a high precision computation library. Furthermore, the process to produce such theoretically nonexistent orbits is explored in detail on the basis of the high precision numerical computation.

Key words Singularly Perturbed system, Canard Solution, Asymptotic Analysis, High Precision Computation Library

1. ま え が き

様々な生命現象の数値モデルとして非線形の連立微分方程式が用いられ、Hodgkin-Huxley 方程式 (以下 HH 方程式) は、神経細胞膜の電氣的興奮現象を定量的に再現することのできる優れた現象論的モデルであり、4 次元の非線形微分方程式で記述される [1]。HH 方程式は複雑な非線形関数を多く含むため、神経興奮の本質をとらえることが難しい。そのため、FitzHugh は代表的な非線形回路の方程式である van der Pol 方程式を修正し、神経細胞の電氣的興奮現象を定性的に表現できる 2 次元モデルとして Bonhoeffer-van der Pol 方程式 (以下 BVP 方

式と省略する。また、FitzHugh-Nagumo 方程式と呼ばれる。) を提案した [2]。

HH 方程式や BVP 方程式は、時定数の異なる複数の時間スケールを持ち、数学的には特異摂動系である。特異摂動系には、アヒル解 (Canard 解) と呼ばれる興味深い非線形振動が現れる。アヒル解とは、解軌道が安定な nullcline と不安定な nullcline に沿う周期解であり、ホップ分岐近傍で観測される。アヒル解はパラメタの狭い範囲において存在し、そのパラメタ値は漸近解析によって求めることができる [3]。これまでに BVP 方程式に対して漸近解析を行い、アヒル解が発生することが確認された [4]。その中で、数値計算によって得られる解軌道の中に、理

表 1 BVP 方程式においてアヒル解が発生するパラメタ値 ($\varepsilon = 0.1$).

n	$B_{n,0.1}$
1	-0.9875
4	-0.986347210693359
9	-0.986315776443403
20	-0.986301374830635
27	-0.985939041390151

論的に存在し得ない不可解な解軌道が観測された.

本稿では, BVP 方程式の数値計算において観測された不可解な解軌道の発生原因を調べる. まず, 数値計算の精度不足による誤差が不可解な解軌道の発生原因だと考え, 高精度計算ライブラリを用いてアヒル解の計算を行い, 不可解な解軌道が発生するかどうかを確認する. さらに, 高精度計算ライブラリを用いてアヒル解を解析し, 不可解な解軌道の発生原因について考察する.

2. アヒル解

2.1 Bonhoeffer-van der Pol 方程式に現れるアヒル解

特異摂動系ではアヒル解と呼ばれる固有の非線形振動現象が発生する. 本稿では特に 2 次元の特異摂動系である BVP 方程式に現れるアヒル解について解析を行う. BVP 方程式は以下の 2 次元の微分方程式で表される.

$$\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \equiv f(x, y) \quad (1a)$$

$$\dot{y} = \varepsilon(x - b) \equiv g(x, y) \quad (1b)$$

$0 < \varepsilon \ll 1$ である. ここで, ε は十分小さい ($0 < \varepsilon \ll 1$) 値を取る. このとき, x は y に比べて速く変化するので, x を速い変数と呼び, システム (1a) を速いサブシステムと呼ぶ. 一方, y を遅い変数と呼び, システム (1b) を遅いサブシステムと呼ぶ. また, 速いサブシステムの平衡点である $\{(x, y) | f(x, y) = 0\}$ を x -nullcline と呼ぶ.

アヒル解が発生するパラメタ b の値は漸近解析によって求められる. $\varepsilon = 0.1$ の場合にアヒル解の発生するパラメタ値を漸近展開を用いて計算した例を表 1 に示す. この漸近解析の詳細は次項で述べる. 表 1 に示したパラメタ値を用いてアヒル解を計算した結果を図 1 に示した. アヒル解はホップ分岐付近で観測され, パラメタ値の微小な変化に対して周期解の振幅が大きく変化するという特徴を持っている. 表 1 のパラメタ値とアヒル解を見比べると, パラメタ値が 10^{-3} 程度しか変化していないのに対して, アヒル解の振幅は各パラメタ値で大きく異なっていることが分かる. また図 1 から, アヒル解は x -nullcline に沿った解軌道であることがわかる. $\varepsilon \ll 1$ のとき速い変数 x の変化 $\dot{x}$ が支配的であるため, 解は速いサブシステムの平行点 (x -nullcline) に近づく. その後, システムの軌道は $O(\dot{x}) \sim O(\dot{y})$ を保つように, x -nullcline に沿って進む. $\partial f / \partial x = 1 - x^2$ より, 速いサブシステムの平行点 (x -nullcline) の (速いサブシステムとしての) 安定性は, $|x| < 1$ の場合は不

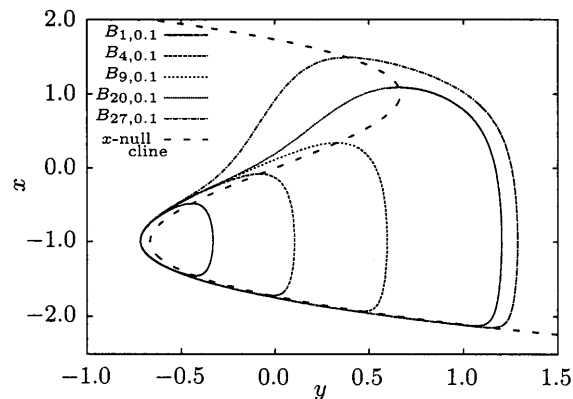


図 1 BVP 方程式において表 1 に示したパラメタ値 $b = B_{n,0.1}$ を用いて計算したアヒル解 ($\varepsilon = 0.1$).

安定, $|x| \geq 1$ ならば安定である. このことから, 図 1 において, $|x| > 1$ の領域に含まれる x -nullcline を安定な枝と呼び, 解軌道はこの安定な枝に近づくように動く. それに対して, $|x| < 1$ の領域に含まれる x -nullcline を不安定な枝と呼び, 解軌道はこの不安定な枝から遠ざかるように動く. 図 1 に示したアヒル解は, 一部が不安定な枝に沿う解軌道になっている. このように, アヒル解は不安定な枝に沿う部分を持つ解軌道である.

2.2 アヒル解の漸近解析

アヒル解の発生するパラメタ値は漸近解析によって求めることができる [3]. 大崎はその漸近解析の手法を BVP 方程式に適用し, canard manifold とアヒル解の発生するパラメタ値を近似的に求めた [4]. canard manifold とは, x -nullcline から $O(\varepsilon)$ の位置に存在する不変多様体であり, 安定な多様体と不安定な多様体からなる. パラメタ b の値によって, その安定な多様体と不安定な多様体の位置関係が変化し, 2 つの多様体が滑らかにつながるとき, システムがアヒル解を持つ. また, 2 つの多様体が滑らかにつながるパラメタの値が, アヒル解が発生するパラメタ値である.

本節では, BVP 方程式のアヒル解に対する漸近解析の手法を簡単に紹介する. 式 (1) で t を消去すれば,

$$\left(x - \frac{x^3}{3} - y\right) y' = \varepsilon(x - b) \quad (2)$$

となる. y' は y の x に対する微分を表し, 以後この記法を用いる. ここでは, y を canard manifold の近似として x の関数 $y(x)$ で表すことを考える. また, 式 (1) が canard manifold を持つためのパラメタ値も近似的に求める. b, y を漸近展開すると,

$$\begin{aligned} b &= b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \dots \\ y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

となる. 式 (3) を式 (2) に代入すると,

$$\begin{aligned}
& \alpha(x, y_0)y'_0 + \varepsilon(\alpha(x, y_0)y'_1 - y_1y'_0) \\
& + \varepsilon^2(\alpha(x, y_0)y'_2 - y_1y'_1 - y_2y'_0) \\
& + \varepsilon^3(\alpha(x, y_0)y'_3 - y_1y'_2 - y_2y'_1 - y_3y'_0) + \cdots \\
& = \varepsilon(x - b_0) - \varepsilon^2b_1 - \varepsilon^3b_2 - \cdots
\end{aligned} \quad (4)$$

を得る。ここで、 $\alpha(x, y_0) \equiv x - x^3/x - y_0$ である。まず、式 (4) に対して、 $O(\varepsilon^0)$ の項の係数を両辺で比較すると、

$$\alpha(x, y_0)y'_0 = 0 \quad (5)$$

となる。ここで y は canard manifold の近似と考えているため、式 (5) を満たすためには $\alpha(x, y_0) = 0$ である必要がある。よって、

$$y_0 = x - \frac{x^3}{3} \quad (6)$$

を得る。次に式 (4) について、 $O(\varepsilon^1)$ の項の係数を比較すると、

$$-y_1y'_0 = x - b_0 \quad (7)$$

となり、さらにこれを書き直すと、

$$y_1 = \frac{b_0 - x}{y'_0} \quad (8)$$

を得る。 $y'_0 = 1 - x^2$ より、 $x = -1$ のとき $y'_0 = 0$ となる。ここで、 y は canard manifold の近似と考えているため、安定、不安定な 2 つの多様体が滑らかに接続する必要がある。よって、式 (8) おいて $x \rightarrow -1$ としたときに y_1 が有界でなければならない、

$$\lim_{x \rightarrow -1} b_0 - x = 0 \quad (9)$$

が得られ、 $b_0 = -1$ が導かれる。さらに、式 (4) について $O(\varepsilon^2)$ の項の係数を両辺で比較すると、

$$-y_2y'_0 - y_1y'_1 = -b_1 \quad (10)$$

となり、これを書き直せば

$$y_2 = \frac{b_1 - y_1y'_1}{y'_0} \quad (11)$$

を得る。 y_1 のときと同様の考え方で、 $x \rightarrow -1$ としたときに y_2 が有界であるためには、

$$\lim_{x \rightarrow -1} b_1 - y_1y'_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{1}{x-1} \frac{-1}{(x-1)^2} \right\} \quad (12)$$

となり、 $b_1 = 1/8$ が導かれる。このように、同様の計算を繰り返して行くと、canard manifold と canard manifold が存在する b の値を ε に関する漸近展開として求めることができる。以降、 ε^n まで漸近展開で求めたパラメタ b の近似値を

$$B_{n,\varepsilon} = \sum_{k=0}^n b_k \varepsilon^k \quad (13)$$

と表現する。

2.3 理論的に不可解な解軌道

BVP 方程式で $\varepsilon = 0.01$ のとき、漸近解析によりアヒル解が現れるパラメタを求めた。その値を表 2 に示す。 $\varepsilon = 0.01$ の場

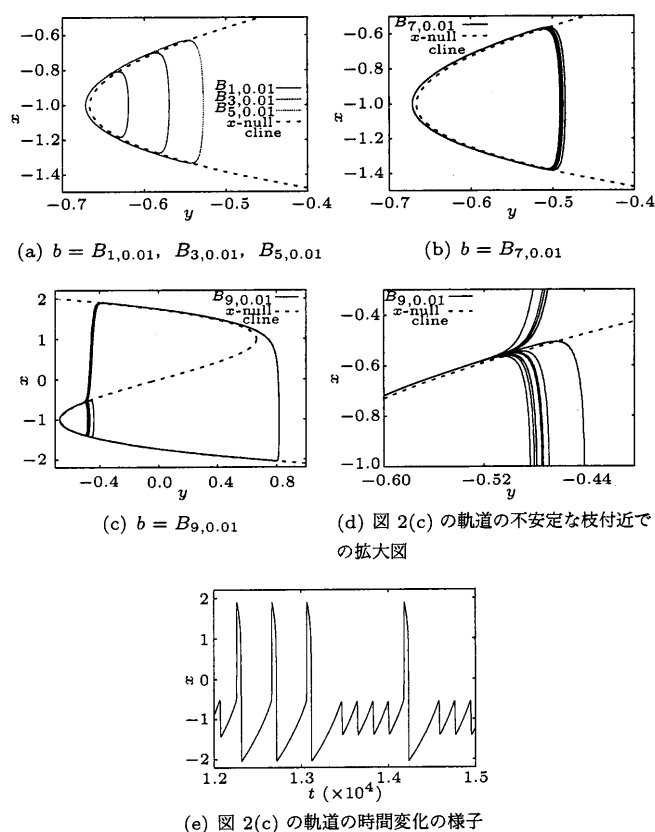


図 2 BVP 方程式において表 2 に示したパラメタ値 $b = B_{n,0.01}$ を用いて計算したアヒル解 ($\varepsilon = 0.01$).

合、アヒル解が発生するパラメタ値は、 B_{10} 以降では小数点以下 15 桁までの値に変化が見られなくなった。そのため、表 2 には B_9 まで計算した結果を示した。表 2 に示したパラメタ値を用いて、アヒル解を数値計算によって求めた結果を図 2 に示す。図 2(a) は、パラメタ値 $b = B_{1,0.01}$, $B_{3,0.01}$, $B_{5,0.01}$ の場合のアヒル解、図 2(b), 図 2(c) はそれぞれパラメタ値 $B_{7,0.01}$, $B_{9,0.01}$ の場合のアヒル解である。不安定な枝付近での図 2(c) の軌道の拡大図を図 2(d) に、図 2(c) の軌道の時間変化の様子を図 2(e) に示す。

図 2(a) では、 $\varepsilon = 0.1$ の場合と同様に、 $|x| < 1$ において不安定な枝に沿うような解軌道になっており、 $\varepsilon = 0.01$ についてもアヒル解の存在が確認できる。ここで注目したいのが、図 2(b), 図 2(c) のパラメタ値が $B_{7,0.01}$, $B_{9,0.01}$ の場合のアヒル解である。図 2(b) では、 $(x, y) = (-1.0, -0.5)$ 回りで軌道が不安定な枝から下側の安定な枝に向かう際に、一つの周期解に収束していない様子が見られる。また図 2(c) では、 $(x, y) = (-0.6, -0.5)$

表 2 BVP 方程式においてアヒル解が発生するパラメタ値 ($\varepsilon = 0.01$).

n	$B_{n,0.01}$
1	-0.99875
3	-0.998740456054687
5	-0.998740451253671
7	-0.998740451245979
9	-0.998740451245955

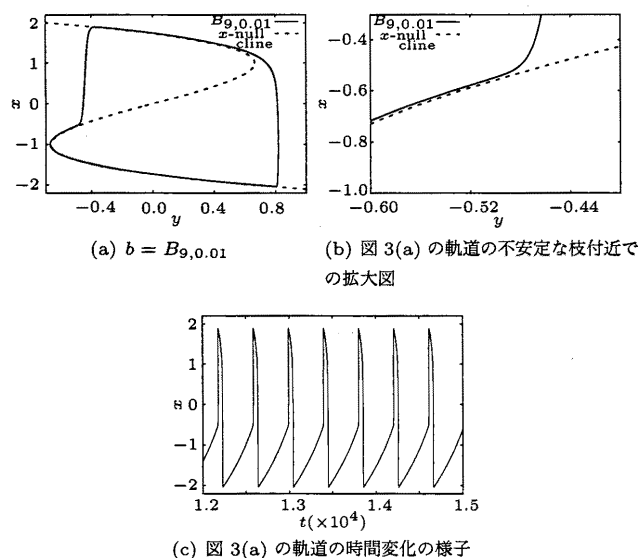


図 3 BVP 方程式において高精度変数を用いて計算したアヒル解 ($b = B_{9,0.01}$, $\varepsilon = 0.01$).

の辺りで、不安定な枝から上方向と下方向に向かう軌道が存在し大振幅と小振幅の周期解が発生している事がわかる。図 2(b), 図 2(c) のような軌道は、解軌道が自身と交わるため、理論的には存在し得ない、不可解な解軌道である。以降、この不可解な解軌道の発生原因を調べる。

3. 高精度計算ライブラリを用いた解析

前節では、BVP 方程式においてアヒル解が発生するパラメータ値を漸近解析により求め、数値計算によってアヒル解を計算した。その中で、 $\varepsilon = 0.01$, $b = B_7$, B_9 の場合に、理論的に説明できない不可解な解軌道が観測された。本節では、その不可解な解軌道の発生原因が、数値計算の精度不足によるものと考えて、高精度計算ライブラリを用いてアヒル解を計算し、不可解な解軌道の発生原因を調べる。

3.1 高精度計算ライブラリを用いたアヒル解の計算

まず、これまでに発生した不可解な解軌道が高精度計算においても発生するかどうかを確認する。高精度計算には、MPFR(the Multiple Precision Floating-point Reliable library) を用いる [5]。このライブラリを用いると、数値計算に用いる浮動小数点の仮数部の bit 数を任意に設定することができる。一般的な double 型変数の仮数部には 52bit が割り当てられており、52bit 以上の bit 数を指定することで、double 型変数を用いた計算に比べ高精度な計算を行うことができる。以降、計算に用いる変数の仮数部の bit 数を、変数の精度と表現する。

図 2(c) と同じパラメータ値に対して高精度変数を用いてアヒル解を計算した結果を図 3 に示す。この計算には、200bit の精度を持つ変数を用いた。図 3 を見ると、図 2(c), 2(e) のように不安定な枝から上方向と下方向に向かう解軌道は発生せず、一つの閉軌道に収束していることが分かる。この結果のように、高精度変数を用いて計算した場合、不可解な解軌道は発生しない。変数の仮数部の精度を上げることで、不可解な解軌道が発

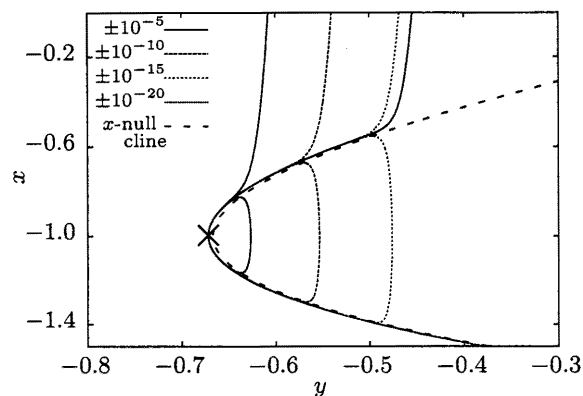


図 4 $(x, y) = (-1.0, -0.67)$ 付近でアヒル解に数値的な摂動を加えた場合の解の様子 ($\varepsilon = 0.01$, $b = B_{9,0.01}$).

生しなくなることから、数値計算における計算の丸め誤差が不可解な解軌道の発生に影響していると考えられる。

3.2 数値計算の誤差が解に及ぼす影響

アヒル解は、 x -nullcline の安定な枝と不安定な枝に沿うような解軌道である。安定な枝の付近では解軌道は x -nullcline に近づくように動き、不安定な枝の付近では解軌道は x -nullcline から遠ざかるように動く。そのため不安定な枝の付近での微小な数値計算誤差が、上方向と下方向に向かう不可解な解軌道の発生に影響していると考えられる。本節では、アヒル解の軌道に数値的な摂動を加えることで仮想的に誤差を再現し、解軌道にどのような影響を及ぼすのかを調べる。

不可解な解軌道が発生しない精度 200bit の変数を用いて計算した軌道に数値的な摂動を加える。まず、安定な枝と不安定な枝がぶつかる点 $(x, y) = (-1.0, -0.67)$ に、軌道に対して垂直な方向 (今は z 方向) に $\pm 10^{-5}$, $\pm 10^{-10}$, $\pm 10^{-15}$, $\pm 10^{-20}$ のオーダーの数値的な摂動を加えた。この結果を図 4 に示す。図 4 を見ると、 $\pm 10^{-5}$, $\pm 10^{-10}$, $\pm 10^{-15}$ の摂動を加えた場合、解軌道は上方向と下方向に向かい、 $\pm 10^{-20}$ の場合は、上方向にのみ向かう軌道が観測された。数値計算において double 型変数を用いた場合、計算の有効桁数は約 15 桁であり、図 4 の $\pm 10^{-15}$ の摂動に対応する。よって、 $x = -1.0$ の不安定な枝に差し掛かる部分で、double 型変数の計算による丸め誤差が発生すると上方向と下方向に向かう解軌道が発生することが確認できた。

次に、解が不安定な枝に沿ってある程度進んだ $(x, y) = (-0.8, -0.6)$ の辺りに、数値的な摂動を加える。上と同様に精度 200bit の変数を用いて計算したアヒル解の軌道に対して垂直に、 $\pm 10^{-5}$, $\pm 10^{-10}$, $\pm 10^{-15}$, $\pm 10^{-20}$ のオーダーの摂動を加える。結果は図 5 に示す。図 5 では、 $\pm 10^{-5}$, $\pm 10^{-10}$ の摂動を加えた場合に解は上方向と下方向に分かれ、 $\pm 10^{-15}$, $\pm 10^{-20}$ の摂動を加えた場合には上方向にのみ向かう軌道が観測された。この結果から、特に、 $x = -1.0$ 付近の不安定な枝に差し掛かる部分での計算誤差が不可解な解軌道の発生原因だと考えられる。

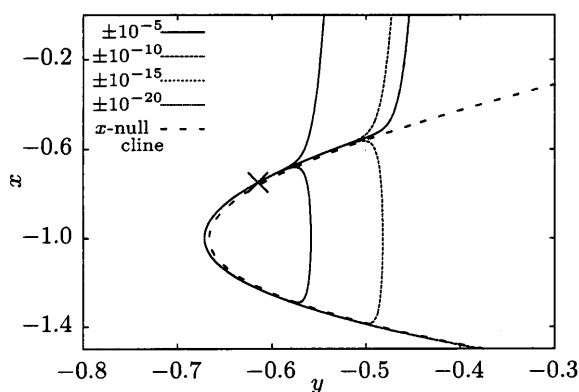


図5 $(x, y) = (-0.8, -0.6)$ 付近でアヒル解に数値的な摂動を加えた場合の解の様子 ($\varepsilon = 0.01$, $b = B_0, 0.01$).

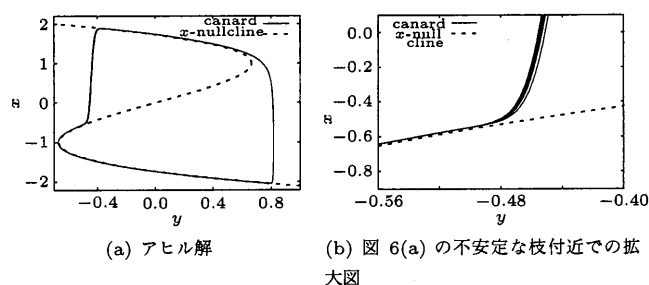


図6 一つの閉軌道に収束せず複数の線が存在する例 ($\varepsilon = 0.01$).

3.3 不可解な解軌道の発生に対する ε の影響

これまでの数値計算では、BVP 方程式の $\varepsilon = 0.01$ の場合に不可解な解軌道が観測された。しかし、 $\varepsilon = 0.1$ としたシステムでは、不可解な解軌道は観測されていない。以下では、 ε と不可解な解軌道の発生との関係を調べる。

ここでは、 ε の値を、0.03 から 0.001 まで変化させ、不可解な解軌道が発生する変数の精度を調べる。また、アヒル解の発生するパラメタ値は ε を用いた漸近展開として近似されるので、 ε によってアヒル解の発生するパラメタ値は異なる。そのため、各 ε についてアヒル解の発生するパラメタ値を漸近解析により近似し、有効桁数 15 桁までの値に変化がなくなる次数まで漸近展開したパラメタ値に対して不可解な解軌道が発生する変数の精度を調べる。またこのシミュレーションでは、解軌道が不安定な枝の途中で上方向と下方向に向かう軌道のみを不可解な解軌道であると判断する。変数の精度によっては、図 6 のように、解軌道はすべて上方向にのみ進むが、一つの閉軌道に収束していない軌道が観測される。この解軌道も理論的には存在し得ず、不可解であると考えられるが、このシミュレーションでは不可解な解軌道として扱わない。

今回は、数値計算に用いる変数の精度を一般的な double 型の仮数部の bit 数である 52bit から順番に上げ、不可解な解軌道が発生する最大の変数の精度を調べた。その結果を図 7 に示す。図 7 に示した点は、不可解な解軌道が発生する変数の精度のうち、最も高精度な変数の bit 数を表している。それぞれの ε について、示した点の bit 数以下の精度の変数を用いて計算した場合に不可解な解軌道が発生し、示した点よりも大きな精

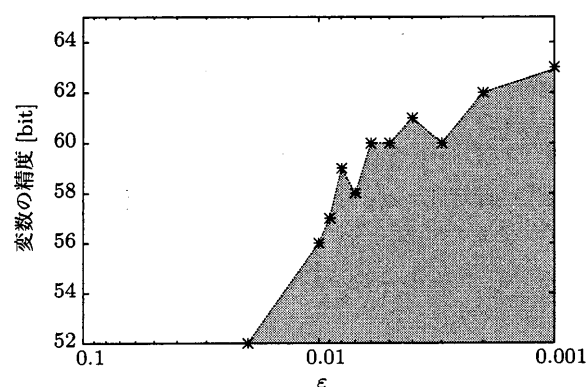


図7 各 ε において不可解な解軌道が発生する変数の精度

度を持つ変数を用いた計算では不可解な解軌道は発生しない。また、 $\varepsilon = 0.03$ については、double 型変数を用いた計算では不可解な解軌道は発生しなかったため、図に記されている点は $\varepsilon = 0.02$ からとなっている。

図 7 を見ると、double 型変数を用いてアヒル解を計算した場合、不可解な解軌道が発生するのは ε が 0.02 より小さい場合であることがわかる。このことから、 $\varepsilon = 0.1$ の場合にはアヒル解の数値計算において不可解な解軌道は発生しなかったのに対して、 $\varepsilon = 0.01$ の場合は不可解な解軌道が発生するということが確認できた。さらに、 ε が小さくなるほど、不可解な解軌道が発生する変数の精度が高くなっていることがわかる。言い換えると、 ε が小さくなることで、不可解な解軌道が発生しやすくなるということである。特異摂動系において ε は、速い変数と遅い変数の時定数の比を表しており、 ε が小さくなると、相対的に遅い変数の変化に対して速い変数の変化が速くなる。この BVP 方程式では、 ε が変化することで、不安定な枝の近傍で、不安定な枝から x 方向に遠ざかるダイナミクスが変化し、 ε が小さくなればなるほど、不安定な枝から速く遠ざかることになる。そのため、 ε が小さくなるにつれ不可解な解軌道が発生しやすくなると考えられる。

4. あとがき

本研究では、高精度計算ライブラリを用いて、2次元の特異摂動系である BVP 方程式のアヒル解の数値計算に現れる不可解な解軌道の発生原因を調べた。高精度変数を用いたアヒル解の計算では不可解な解軌道は観測されず、数値計算に用いる変数の精度による計算誤差が不可解な解軌道の発生に影響していると考えられる。さらに、高精度計算によって得られたアヒル解に数値的な摂動を加えたところ、特に、アヒル解の安定な領域から不安定な領域に遷移する部分での誤差が、不可解な解軌道が発生させていることが分かった。また、この不可解な解軌道は時間スケール ε が 0.1 の場合には観測されず、 $\varepsilon = 0.01$ の場合では観測される。このことについて、 ε を変化させ不可解な解軌道の発生を調べたところ、倍精度計算では ε が 0.02 以下の場合にのみ不可解な解軌道が発生することが分かった。さらに、 ε が小さくなるにつれ、不可解な解軌道の発生を抑制す

るために必要な変数の精度が高くなる傾向にあることも確認された。つまり、 ε が小さくなるにしたがって、正確なアヒル解を計算するためには、より高い精度を持つ数値計算が必要であると言える。

謝辞 本研究の一部は、総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム (FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト) により、日本学術振興会を通して助成を受けた。また、科研費 (24500274) により助成を受けた。

文 献

- [1] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, "A quantitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve," J. Physiol., vol. 117, pp. 500-544, 1952.
- [2] R. FitzHugh, "Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane," Biophys. J., Vol. 1 pp. 445-466, 1952.
- [3] J. Moehlis, "Canards for a reduction of the Hodgkin-Huxley equations," J. Math. Biol., vol. 52, No. 2, pp. 141-153, 2006.
- [4] 大崎 弘貴, "3次元特異摂動系のホップ分岐近傍に生じるアヒル解の漸近解析と長周期振動に対する考察," 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 修士論文, 2011.
- [5] The GNU MPFR Library: <http://www.mpfr.org/>.