

無限次元回転群の表現について

広島大 理学部 櫻井孝俊

1. 無限次元回転群 G のクラス I の既約ユニタリ表現に対して、McKean 予想 ([2]) が正しいことを示すことが、目的である。

H を実 (又は複素) 可分ヒルベルト空間とし、その正規直交基底を $\{\xi_j; j=1, 2, \dots\}$ とする。この基底により代数的に張られる空間を E とし、最初の m 個 $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ により張られる空間を E_m とおくと、 $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ となる。故に E は核型空間である。 H の等長写像で、有限個の j をのぞいて ξ_j を固定するものの全体からなる群を G とし、その部分群 G_m を $\{g \in G; g\xi_j = \xi_j, j = m+1, m+2, \dots\}$ とおくと、 $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$ を得る。 G は位相群である。 $g \in G$ に対し $g\xi_j = \sum_{i=1}^m g_{ij} \xi_i$ ($j=1, \dots, m$) とおくことにより g を $O(m)$ (又は $U(m)$) の元 (g_{ij}) と同一視する。以下の議論は、この同一視のもとに行なわれる。

E^* を E の双対空間とすれば、

$$E^* \subset H \subset E$$

を得る。位相は右に行く程、弱くなっているものとする。

$\xi \in E$ に対し、 $e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}$ は正定値ゆえ、Bochner-Minlos の定理 ([1]) により E^* 上の確率測度 μ が存在し、

$$e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} = \int_{E^*} e^{\sqrt{-1}\langle x, \xi \rangle} d\mu(x) \quad (x \in E^*)$$

と表わすことができる。明らかに μ は G 不変である。そこで

$f \in L^2(E^*, \mu)$ と $g \in G$ に対し、 G のユニタリ表現を、

$$(\pi_*(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{a.e. } x \in E^*$$

により定義する。

G_m のリー環を $\mathfrak{g}_m$ とし、その展開環を $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)$ とする。 E_{ij} を (i, j) 成分だけが 1 で他の成分はすべて 0 である $m \times m$ 行列とし

$X_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $Y_{ij} = \sqrt{-1}(E_{ij} + E_{ji})$, $Y_{ii} = \sqrt{-1}E_{ii}$ とおく。

$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_m)$ の元であるカシミール作用素を C_m とすれば、 C_m は、 H 及び E が実ベクトル空間、又は、複素ベクトル空間である場合に対し、それぞれ、

$$C_m = \frac{-1}{2(m-2)} \sum_{1 \leq i < j \leq m} X_{ij}^2 \quad (O(m))$$

$$C_m = \frac{-1}{4m} \sum_{1 \leq i < j \leq m} (X_{ij}^2 + Y_{ij}^2) - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m Y_{ii}^2 \quad (U(m))$$

と表わされる。

ξ_1 における G の等方部分群 (即ち、 $\{g \in G; g\xi_1 = \xi_1\}$) を K とする。以下の議論において、 $(\pi, \mathcal{A})$ と書けばいつでも G の既約ユニタリ表現を表わすことにする。

定義 $(\pi, \mathfrak{g})$ が G の K に関するクラス 1 の表現とは、以下の (A.1) と (A.2) とを満足するときをいう。

(A.1) $\pi(K)$ 不変ベクトル (即ち、 $\pi(k)v = v, \forall k \in K$)

のなす空間の次元が 1。

(A.2) v_0 を $\pi(K)$ 不変ベクトルとするとき、 v_0 は、

$\pi(G_m)$ 有限であり、 $\lim_{m \rightarrow \infty} d\pi(C_m)v_0$ が存在する。

(但し、 $d\pi$ は G_m の表現 π の微分表現を表わす)

以下、クラス 1 の表現 $(\pi, \mathfrak{g})$ に関し、 v_0 で $\pi(K)$ 不変単位ベクトルを表わすことにする。このとき、 G 上の球関数 ϕ_π を、

$$\phi_\pi(g) = (v_0, \pi(g)v_0)$$

で定義すれば次の命題 1 を得る。

命題 1 $(\pi, \mathfrak{g}), (\pi', \mathfrak{g}')$ をそれぞれクラス 1 の表現とする。このとき π と π' とが同値であるための必要十分条件は、 $\phi_\pi = \phi_{\pi'}$ である。

証明 π と π' とが同値 (以下 $\pi \sim \pi'$ と書く) ならば、 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ 上への等長写像 U で、任意の $g \in G$ に対し、 $\pi'(g)U = U\pi(g)$ となるものが存在する。 U は、 $\pi(K)$ 不変ベクトルを $\pi'(K)$ 不変ベクトルに移すゆえ、(A.1) より $\phi_\pi = \phi_{\pi'}$ を得る。

逆に $\phi_\pi = \phi_{\pi'}$ ならば、 U を

$$U\left(\sum_i c_i \pi(g_i) v_0\right) = \sum_i c_i \pi'(g_i) v'_0$$

と定義すれば、 $v = \sum_i a_i \pi(g_i) v_0$, $w = \sum_j b_j \pi(g_j) v_0$ に対し、

$$(Uv, Uw) = (v, w)$$

となることが容易に分かる。 $(\pi, \mathfrak{g})$, $(\pi', \mathfrak{g}')$ の既約性から

U は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ 上への等長写像に拡張できる。このとき、

$$U\pi(g) = \pi'(g)U \text{ となる。} \quad (\text{証明終})$$

さて、 v_0 を含む $\pi(G_m)$ 不変部分空間を $\mathfrak{f}_m$ とし、 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{f}_m$ 上への正射影を P_m で表わすことにする。このとき、 $Dd\pi(c)$ を、

$$Dd\pi(c) = \left\{ v \in \mathfrak{f}; \lim_{m \rightarrow \infty} d\pi(C_m) P_m v \text{ が存在する} \right\}$$

とし、 $v \in Dd\pi(c)$ に対し、 $d\pi(c)v$ を、

$$d\pi(c)v = \lim_{m \rightarrow \infty} d\pi(C_m) P_m v$$

で定義する。 π の既約性から、 $Dd\pi(c)$ は $\mathfrak{f}$ で稠密となる。

$d\pi(C_m)$ は $\mathfrak{f}_m$ 上対称作用素ゆえ、 $d\pi(C)$ は対称作用素である。

$d\pi(C)$ の随伴作用素 $d\pi(C)^*$ の定義域の元を u とすれば、

$u \in \mathfrak{f}$ が存在して、任意の $v \in Dd\pi(c)$ に対し、

$$(d\pi(C)v, u) = (v, u)$$

となる。任意の正整数 m 及び、任意の $v \in \mathfrak{f}_m$ に対し、

$$(d\pi(C)v, u) = (d\pi(C_m) P_m v, u) = (v, d\pi(C_m) P_m u)$$

一方

$$(v, u) = (v, P_m u)$$

ゆえ、

$$d\pi(C_m) P_m u = P_m u$$

となる。よって、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d\pi(C_m) P_m u = u$$

を得る。これは、 u が $Dd\pi(C)$ に含まれることを示している。故に $d\pi(C)$ は自己随伴作用素である。

命題 2 $(\pi, \mathcal{H})$ を G のクラス 1 の表現とすれば、

$$d\pi(C) \pi(g) = \pi(g) d\pi(C).$$

証明は、直接、計算を行なうことにより容易に得られる。Schur の補題より、 $d\pi(C)$ は、スカラー作用素となる。そこで、そのスカラー値を $\chi_\pi(C)$ と書くことにする。 I を $\mathcal{H}$ の恒等写像とすれば、 $d\pi(C) = \chi_\pi(C) I$ となる。

2. この章では、 H と E は、ともに実ベクトル空間とする。非負整数 k に対し、エルミート多項式

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2} \quad t \in \mathbb{R}$$

を考える。このとき、 $H_k(t)$ が以下の等式を満足している

ことは容易に分かる。

$$H_k''(t) - 2tH_k'(t) + 2kH_k(t) = 0$$

$$H_k'(t) = 2kH_{k-1}(t)$$

$$H_k(C_1 t_1 + \dots + C_\ell t_\ell) = k! \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = k} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{C_j^{k_j}}{k_j!} H_{k_j}(t_j)$$

(但し、 $C_1^2 + \dots + C_\ell^2 = 1$, $k_j \geq 0$ とする)

さて、非負整数 n に対し、 $\mathcal{B}_n$ を

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{\infty} n_j! 2^{n_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} H_{n_j} \left(\frac{\langle x, \xi_j \rangle}{\sqrt{2}} \right); \sum_{j=1}^{\infty} n_j = n, n_j \geq 0 \right\}$$

とおき、 $\mathcal{H}_n$ を $\mathcal{B}_n$ により張られる閉部分空間とすれば、

$L^2(E^*, \mu)$ の Wiener-Itô 分解

$$L^2(E^*, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n \quad ([1])$$

を得る。各 $\mathcal{H}_n$ は、 $\pi_*(G)$ 不変ゆえ、 $(\pi_*, L^2(E^*, \mu))$ の部分表

現 $(\pi_n, \mathcal{H}_n)$ を得る。そこで、任意の正整数 i に対し、

$$\Phi_i^n(x) = \frac{1}{\sqrt{n! 2^n}} H_n \left(\frac{\langle x, \xi_i \rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad x \in E^*$$

とおく。このとき、 Φ_i^n は、 $\pi_n(K)$ 不変単位ベクトルである。

補題 1 $\mathcal{H}_n$ の任意の $\pi_n(K)$ 不変ベクトル ψ は、定数 c が存在して、 $\psi = c \Phi_i^n$ となる。

証明 まず、 Φ_i^n は π_n の巡回ベクトルゆえ、 $\mathcal{H}_n$ の $\pi_n(G)$ 不変ベクトルは、 $n \neq 0$ ならば、0 ベクトルにかざることを、注意しておく。さて、 ψ を任意の $\pi_n(K)$ 不変ベクトルとすれ

は、 μ は、

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{n_1+n_2+\dots=n} C_{n_1, n_2, \dots} \prod_j H_{n_j} \left(\frac{\langle x, \xi_j \rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= f_0 + \sum_{\ell=1}^m f_\ell \Xi_1^\ell\end{aligned}$$

と表わすことができる。但し、各 f_ℓ は $\langle x, \xi_1 \rangle$ を含まない。

明らかに、各 f_ℓ は、 $\pi_n(K)$ 不変ベクトルゆえ、先の注意から

、 $f_0 = \dots = f_{n-1} = 0$ となり、 $\mu = C \Xi_1^m$ を得る。

(証明終)

補題 2 $(\pi_n, \mathcal{H}_n)$ は、既約ユニタリ表現である。

証明 W を $\mathcal{H}_n$ における任意の $\pi_n(G)$ 不変閉部分空間とし、

P_W を $\mathcal{H}_n$ から、 W 上への正射影とすれば、任意の $k \in K$ に対し、

$$P_W \Xi_1^m = P_W \pi_n(k) \Xi_1^m = \pi_n(k) P_W \Xi_1^m$$

を得る。故に補題 1 により、定数 C が存在して、

$$P_W \Xi_1^m = C \Xi_1^m$$

となる。 Ξ_1^m は巡回ベクトルゆえ、 I_n を $\mathcal{H}_n$ の恒等写像とすれば

$$P_W = C I_n$$

を得る。故に、 $W = \{0\}$ 又は $W = \mathcal{H}_n$ となる。

(証明終)

命題3 (π_n, χ_n) は G のクラス 1 の表現である。

証明 (A.2) を示せばよい。明らかに $\mathfrak{H}_1^n$ は、任意の正整数 m に対し、 $\pi_n(G_m)$ 有限である。次に、 $x_i = \langle x, \xi_i \rangle$ とおくことにより、 $\pi_n(G_m)\mathfrak{H}_1^n$ により張られる空間の元は全て、 $x_1, \dots, x_m$ の関数と見なすことができる。特に、 $\mathfrak{H}_1^n$ は x_1 だけの関数ゆえ、

$$d\pi_n(C_m)\mathfrak{H}_1^n = \frac{-1}{2(m-2)} \left\{ \left(\sum_{j=2}^m x_j^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (m-2)x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right\} \mathfrak{H}_1^n$$

となる。ここで、大数の強法則

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \langle x, \xi_j \rangle^2 = 1 \quad \text{a.e. } x \in E^*$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} d\pi_n(C_m)\mathfrak{H}_1^n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \mathfrak{H}_1^n \\ &= \frac{n}{2} \mathfrak{H}_1^n \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

命題4 $\phi_{\pi_n}(g) = \langle \xi_1, g\xi_1 \rangle^n \quad g \in G$.

証明は、直接の計算により容易に得られる。

さて、 G のクラス 1 の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ において、 G_2 の部分群 A を、

$$A = \{g \in G_2; \det g = 1\}$$

により定義しておく、 G の Cartan 分解 $G = KAK$ を得る。

$a_\theta \in A$ を

$$a_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおくことにより、 A を $SO(2)$ と同一視することにする。このとき、球関数 ϕ_π は、 K 両側不変ゆえ、 A 上の関数と見なすことができる。そこで、

$$F_\pi(\theta) = \phi_\pi(a_\theta)$$

により、 A 上の関数 F_π を定義しておく。

定理 1 $(\pi, \mathcal{H})$ を G のクラス 1 の表現とする。このとき、

$2\chi_\pi(C)$ は非負整数であり、 $(\pi, \mathcal{H}) \sim (\pi_n, \mathcal{H}_n)$

となる。(但し、 $n = 2\chi_\pi(C)$ である。)

証明

$$\begin{aligned} \chi_\pi(C) F_\pi(\theta) &= (\nu_0, \pi(a_\theta) d\pi(C) \nu_0) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\nu_0, \pi(a_\theta) d\pi(C_m) \nu_0) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-1}{2(m-2)} \sum_{j=2}^m (\nu_0, \pi(a_\theta) d\pi(X_{1j}^2) \nu_0) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \text{Ad}(a_\theta)^{-1} X_{2j} &= \cos \theta X_{2j} - \sin \theta X_{1j} \quad (j=3, \dots, m) \\ [\text{Ad}(a_\theta)^{-1} X_{2j}, X_{2j}] &= \sin \theta X_{12} \quad (j=3, \dots, m) \end{aligned}$$

であることに注意すれば、

$$X_{1j}^2 = \operatorname{cosec}^2 \theta (\operatorname{Ad}(a_\theta)^{-1} X_{2j})^2 - \cot \theta \operatorname{cosec} \theta \{ 2(\operatorname{Ad}(a_\theta)^{-1} X_{2j} \\ - \sin \theta X_{12} \} + \cot^2 \theta X_{2j}^2 \quad (j=3, \dots, m)$$

を得る。よって

$$\chi_\pi(C) F_\pi(C) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-1}{2(m-2)} \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} F_\pi(\theta) + (m+2) \cot \theta \frac{d}{d\theta} F_\pi(\theta) \right\} \\ = -\frac{1}{2} \cot \theta \frac{d}{d\theta} F_\pi(\theta)$$

となる。この微分方程式は、 $F_\pi(0)=1$, $F_\pi \in C^\infty(A)$ に注意すれば、 $2\chi_\pi(C)$ が非負整数であり、

$$F_\pi(\theta) = \cos^n \theta \quad (n=2\chi_\pi(C))$$

なる解を持つことが分る。

一方、命題4において、 $g = k a_\theta k'$ ($k, k' \in K$, $a_\theta \in A$) とおくと、

$$\phi_{\pi_m}(g) = \cos^n \theta$$

となり、 $\phi_\pi = \phi_{\pi_m}$ を得る。故に、命題1により、

$$(\pi, \chi) \sim (\pi_m, \chi_n)$$

を得る。

(証明終)

3. この章では、 H と E は、ともに複素ベクトル空間とする。非負整数 p, q に対し、複素エルミート多項式

$$H_{p,q}(t, \bar{t}) = (-1)^{p+q} e^{t\bar{t}} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{t}^p \partial t^q} e^{-t\bar{t}} \quad t \in \mathbb{C}$$

を考える。 $H_{p,q}(t, \bar{t})$ は、次の等式を満足している。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} H_{p,q}(t, \bar{t}) - \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} H_{p,q}(t, \bar{t}) + q H_{p,q}(t, \bar{t}) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial t} H_{p,q}(t, \bar{t}) - t \frac{\partial}{\partial t} H_{p,q}(t, \bar{t}) + p H_{p,q}(t, \bar{t}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} H_{p,q}(t, \bar{t}) = p H_{p-1,q}(t, \bar{t}) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} H_{p,q}(t, \bar{t}) = q H_{p,q-1}(t, \bar{t}) \end{cases}$$

$$H_{p,q} \left(\sum_{j=1}^l a_j t_j, \sum_{j=1}^l \bar{a}_j \bar{t}_j \right) = p! q! \sum_{\substack{p_1+\dots+p_l=p \\ q_1+\dots+q_l=q}} \prod_{j=1}^l \frac{a_j^{p_j} \bar{a}_j^{q_j}}{p_j! q_j!} H_{p_j, q_j}(t_j, \bar{t}_j)$$

(但し、 $\sum_{j=1}^l |a_j|^2 = 1$, $p_j \geq 0$, $q_j \geq 0$ とする。)

非負整数 p, q に対し、 $B_{p,q}$ を

$$B_{p,q} = \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p_j! q_j!}} H_{p_j, q_j}(\langle z, \xi_j \rangle, \overline{\langle z, \xi_j \rangle}); \sum_{j=1}^{\infty} p_j = p, \sum_{j=1}^{\infty} q_j = q, p_j \geq 0, q_j \geq 0 \right\}$$

とおき、 $\mathcal{H}_{p,q}$ を $B_{p,q}$ により張られる閉部分空間とすれば、

$L^2(E^*, \mu)$ の Wiener-Itô 分解

$$L^2(E^*, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 0}} \mathcal{H}_{p,q} \quad ([1])$$

を得る。 $\mathcal{H}_{p,q}$ は、 $\pi_*(G)$ 不変ゆえ、 $(\pi_*, L^2(E^*, \mu))$ の部分表現 $(\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ を得る。そこで、正整数 i に対して、

$$\pi_i^{p,q}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{p! q!}} H_{p,q}(\langle z, \xi_i \rangle, \overline{\langle z, \xi_i \rangle}) \quad z \in E^*$$

とおくと、 $\pi_i^{p,q}$ は $\pi_{p,q}(K)$ 不変単位ベクトルとなり、2章と同様に、以下の補題、命題を得る。

補題3 $\mathcal{H}_{p,g}$ の $\pi_{p,g}(K)$ 不変ベクトル ψ は、定数 C が存在して、 $\psi = C \Phi_1^{p,g}$ となる。

補題4 $(\pi_{p,g}, \mathcal{H}_{p,g})$ は既約ユニタリ表現である。

命題5 $(\pi_{p,g}, \mathcal{H}_{p,g})$ は、 G のクラス1の表現である。

証明 (A.2) を示せばよい。 $z \in E^*$ に対し、 $z_i = \langle z, \xi_i \rangle$ とおけば、 $\pi_{p,g}(G_m) \Phi_1^{p,g}$ により張られる空間の元は、 $z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ の関数と見なすことができる。特に、 $\Phi_1^{p,g}$ は $z_1, \bar{z}_1$ だけの関数ゆえ、

$$d\pi_{p,g}(C_m) \Phi_1^{p,g} = \left\{ \frac{1}{2} (z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}) + \frac{1}{2m} (z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \bar{z}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1^2}) - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m |z_j|^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \right\} \Phi_1^{p,g}$$

を得る。大数の強法則

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\langle z, \xi_j \rangle|^2 = 1 \quad \text{a.e. } z \in E^*$$

を用いることにより、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} d\pi_{p,g}(C_m) \Phi_1^{p,g} &= \frac{1}{2} (z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}) \Phi_1^{p,g} \\ &= \frac{p+g}{2} \Phi_1^{p,g} \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

命題6 $\phi_{\pi_{p,g}}(g) = \langle \xi_1, g \xi_1 \rangle^p \overline{\langle \xi_1, g \xi_1 \rangle^g} \quad g \in G$

さて、 G のクラス 1 の表現 $(\pi, \mathcal{H})$ において、 G の部分群 T を、 $T=G$ で定義し、 A を、2章と同じにとると、 G の Cartan 分解 $G=KTA$ を得る。 $t_\varphi \in T$ を

$$t_\varphi = (e^{\sqrt{-1}\varphi})$$

とおくことにより、 T と $U(1)$ とを同一視する。 $\hat{T}$ を T の指標群とし、 $\eta \in \hat{T}$ に対し、 $\hat{T}$ から $\mathbb{Z}$ への同形写像 ρ を、

$$\eta(t_\varphi) = e^{\sqrt{-1}\rho(\eta)\varphi} \quad (t_\varphi \in T)$$

により定義する。

$t_\varphi \in T$, $k \in K$ に対し、

$$\begin{aligned} \pi(k)\pi(t_\varphi)\psi_0 &= \pi(t_\varphi)\pi(k)\psi_0 \\ &= \pi(t_\varphi)\psi_0 \end{aligned}$$

ゆえ、(A.1)より、定数 $\eta_\pi(t_\varphi)$ が存在して、 $\pi(t_\varphi)\psi_0 = \eta_\pi(t_\varphi)\psi_0$ となる。明らかに、 η_π は T の指標である。

定理 2 $(\pi, \mathcal{H})$ を G のクラス 1 の表現とする。このとき、

$2\chi_\pi(C)$ は非負整数であり、さらに $|\rho(\eta_\pi)| \leq 2\chi_\pi(C)$

ならば、 $(\pi, \mathcal{H}) \sim (\pi_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ となる。(但し、

$p+q=2\chi_\pi(C)$, $p-q=\rho(\eta_\pi)$ である。)

証明 $g = kt_\varphi a_\theta k'$ ($k, k' \in K$, $t_\varphi \in T$, $a_\theta \in A$) , $\lambda = \rho(\eta_\pi)$

とみると、

$$\phi_{\pi}(g) = e^{-\sqrt{-1} \ell \varphi} \phi_{\pi}(a_{\theta})$$

を得る。そこで、 $F_{\pi}(\theta) = \phi_{\pi}(a_{\theta})$ とおくと、又章の定理1

と同様な計算を行なうことにより、 $F_{\pi}(\theta)$ は微分方程式

$$\chi_{\pi}(C) F_{\pi}(\theta) = -\frac{1}{2} \cot \theta \frac{d}{d\theta} F_{\pi}(\theta)$$

を満足することが分かる。故に $2\chi_{\pi}(C)$ は非負整数であり、

$$\phi_{\pi}(g) = e^{-\sqrt{-1} \ell \varphi} \cos^n \theta \quad (n = 2\chi_{\pi}(C))$$

を得る。さらに、 $|\alpha(\gamma_{\pi})| \leq 2\chi_{\pi}(C)$ ならば、 $p+q = 2\chi_{\pi}(C)$,

$p-q = \alpha(\gamma_{\pi})$ なる p, q が存在する。このとき、 $(\pi_{p,q}, \chi_{p,q})$ に

対し、命題6より、球関数 $\phi_{\pi_{p,q}}$ は

$$\phi_{\pi_{p,q}}(g) = e^{-\sqrt{-1} (p-q) \varphi} \cos^{p+q} \theta$$

となる。故に命題1より $(\pi, \ell) \sim (\pi_{p,q}, \chi_{p,q})$ を得る。

(証明終)

参考文献

- [1] T.Hida, Brownian motion, Springer-Verlag (1980)
- [2] H.P.McKean, Geometry of differential space, Ann. Probability (1973), 197-206
- [3] H.Matshushima, K.Okamoto and T.Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group I, Hiroshima Math.J. 11 (1981), 181-193