

Forchheimer 則を適用した Confined Seepage

——河川構造物の浸透問題 (1)——

岡 太 郎

STUDY OF CONFINED SEEPAGE AROUND SHEET PILE APPLYING FORCHHEIMER'S LAW

——Seepage Problem for River Structure (1)——

By Taro OKA

Synopsis

Forchheimer's law is belived to be applicable to the seepage flow beyoud the applicability of Darcy's law. The seepage flow around a sheet pile in a river has been studied experimentally and theoretically.

In this study, the fundamental equation for the flow has been derived using Forchheimer's law, and solved numerically by using the technique of finite difference to compare with the solution of Laplace's equation derived using Darcy's law. It was disclosed that the former can explane well the experimental results but the latter has fairly difference with those.

1. ま え が き

Darcy 則の発見以来、土中の水、石油の流れを対象としたいわゆる浸透流に関する研究は数多く行なわれており、Muskut¹⁾の成書にも多くの例が示されている。しかし Darcy 則が成立するのは比較的浸透流速が遅いときに限られ、一般に porous media の粒径 d と断面平均流速 u で定義される Reynolds 数 $R=du/\nu$ が 3~10 に達すると、流れは乱流状態に遷移し、このような領域ではもはや Darcy 則は成立せず、Forchheimer 則が成立するといわれ²⁾、また実験的に Forchheimer 則の実用性を裏付けた研究もいくつかみられる^{3),4)}。ただこのような乱流状態の現われる浸透流問題を具体的に扱った研究は必ずしも多いとはいえない。本研究は矢板の下を流れる Confined seepage の問題を Forchheimer 則を適用して検討し、その実用性を確かめようとしたものである。

2. 実 験

2.1. 実験装置と材料および実験概要

実験は Fig. 1 に示すような長さ 200 cm、深さ 100 cm、巾 40 cm、1 側面に厚さ 10 mm の透明アクリル樹脂板をはめた鋼鉄製槽を用いて行なった。この水槽の他の鋼板面には最小 5 cm 最大 20 cm 間隔に、水頭測定用の長さ 5 cm (内側へ 3 cm 突出) 内径 4.8 mm の真鍮パイプを配置してあり、水位を塩化ビニールパイプを通してガラス製マノメーターへとり出した。このガラスパイプは内径 4 mm であるが、必ずしも整一ではないので、実験に先立ち、槽に水を張り、メニスカス補正量を測定しておき、これを実験データの補正に使用した。

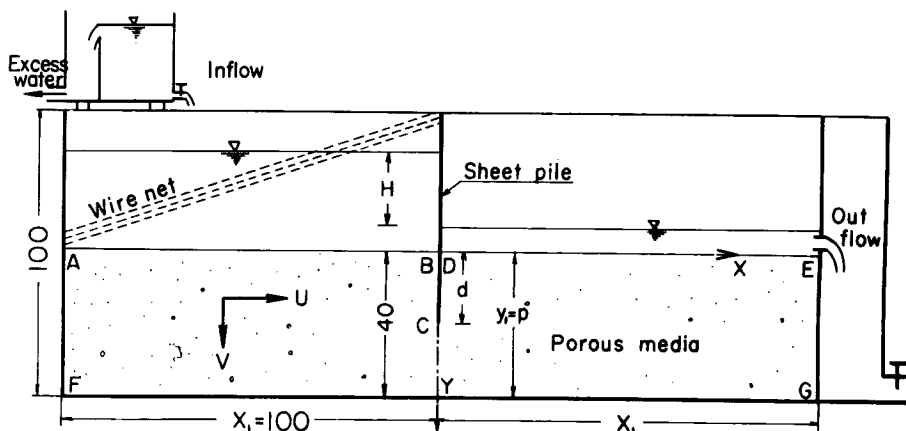


Fig. 1 Experimental apparatus and co-ordinate system.

Table 1 Grain size distribution by weight.

Particle size (mm)	~10	10~4.8	4.8~2.0	2.0~0.85	0.85~
%	0.3	26.6	67.3	5.7	0.1

実験に使用した porous media は Table 1 に示すような粒度分布をもった丸味のある砂、小礫で、これを十分水洗した後実験槽に填充した。填充深さ h は 40 cm である。矢板材料としては厚さ 10 mm のアクリル板を使用し、実験は矢板の透水層中の深さ d が 20 cm および 30 cm の2つの場合を行なった。なお、矢板面の滑面効果を除去するため、矢板両面に実験に使用した砂礫と同じ砂礫を接着しておいた。また透水層としての砂礫はできるだけ密につめたが、透水層内水頭分布に不揃いがみられたときは詰め変えをした。

実験に用いた水は水道水であるが実験中水温は 18~21°C であった。水には溶解空気が含まれ、これが透水中分離して砂礫に付着するなど不都合を生じやすいが、本実験では上下流に深い貯水槽を設けてできるだけ長時間放置した水を使用するとともに、幾重にも張った目の細かい金網を通して空気分離をこの金網面で起させ、これを通過した水が透水層内を流れるようにした。ただこの実験では透水層の透水性がよいため定常状態になるのも速く、短時間で一実験が終了できるので、この空気の分離問題は本実験に関する限り無視できる程度であったと考えている。

2.2. 実験結果

2.2.1. 透水試験

填充砂礫内の流れの抵抗特性を知るため、予め透水試験を行なった。この試験は通常の透水試験器ではあまり十分な試料が充てんできないので、内径 12.5 cm 長さ 110 cm の硬質塩化ビニールパイプを用いた。この場合でも直径の大きさが問題になるが、充てん長さをいろいろ変えての実験的検討により、充てん長が 60 cm 以上であれば側壁効果は無視できることを確認した。したがって砂礫充てん長は 60~100 cm とした。

透水性の程度は試料の充てん密度により多少異なる。実験結果は Fig. 2 に示すとおりである。またこれらの結果より、よく充てんされたものに対し

$$-\frac{\Delta H}{L} = 0.27U + 0.25U^2 \quad \dots\dots\dots (a)$$

やや粗なものに対しては

$$-\frac{\Delta H}{L} = 0.25U + 0.15U^2 \quad \dots\dots(b)$$

$$-\frac{\Delta H}{L} = 0.23U + 0.12U^2 \quad \dots\dots(c)$$

を得た。なおこの結果は充てんを行なった回ごとのそれであり、1回の実験結果のバラツキを示すものではない。

Fig. 2 に見られるように、いずれも平均流速は 0.1 cm/sec 以上であるが、これは Reynolds 数で 5 以

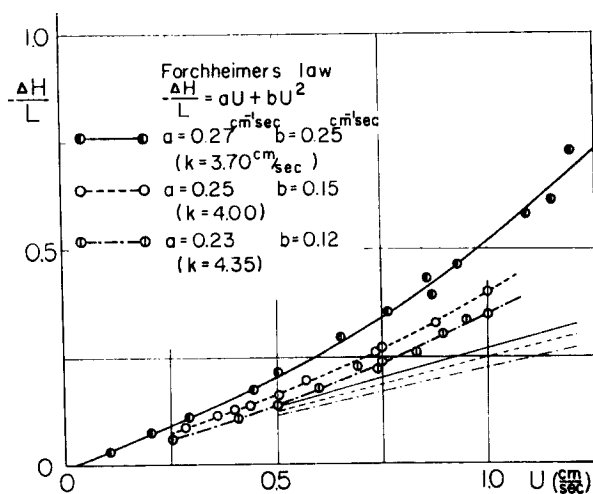


Fig. 2 Results of permeability test.

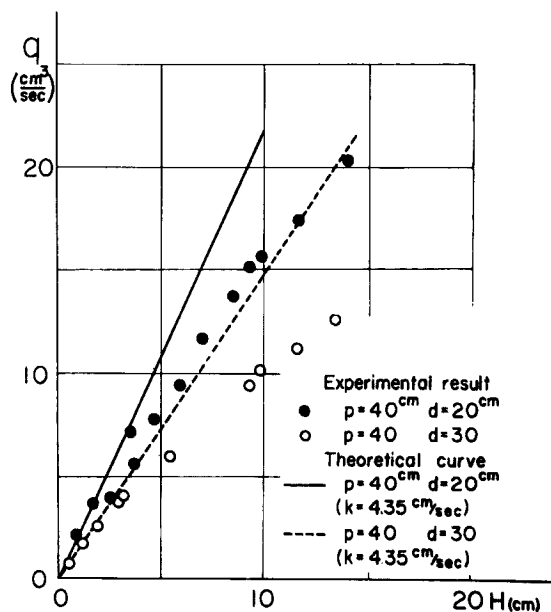


Fig. 3 Relationships between q and H .

上となり、明らかに Darcy 則の適用範囲外であることがわかる。またこうした条件下で透水係数を考えるのは問題であるが、一応 Forchheimer 則の第1項の係数の逆数を透水係数 K とすると⁹⁾、(a)~(c) 式の場合それぞれ $K_a=3.7\text{cm/sec}$ 、 $K_b=4.0\text{cm/sec}$ および $K_c=4.35\text{cm/sec}$ となる。

2.2.2. 矢板のまわりの流れ

前述の装置による矢板のまわりの実験結果と、浸透流量 q と上下流水位差 H について示すと Fig. 3 のようである。図中黒丸は矢板深さ $d=20\text{cm}$ 、白丸は $d=30\text{cm}$ の場合であり、実線・点線はそれぞれの場合の Laplace 方程式の解である。

3. 理 論

3.1. 基礎方程式および境界条件

運動方程式として、Fochheimer 則を用いたときの基礎方程式を誘導する。Fochheimer 則は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= -au - b|u|u & \dots\dots\dots (a) \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -av - b|v|v & \dots\dots\dots (b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで a : 定数 [L^{-1}, T], b : 定数 [L^{-2}, T^2], h : 水頭 [L], x, y : 座標 [L]
 u, v : x, y 方向の断面平均流速 [LT^{-1}]

また連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。

3.1.1. 流れの函数 ϕ に関する基礎方程式

よく知られたように、流れの関数は次式で示される。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(3) 式を (1) 式に代入して流れの函数 ϕ についての基礎方程式を求める。まず (1-a) 式を y について、(1-b) 式を x について微分し、前者から後者を減ざると、水頭 h の項が消去された次式を得る。

$$-\frac{\partial}{\partial y}(au + b|u|u) + \frac{\partial}{\partial x}(av + b|v|v) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 u, v はそれぞれ x, y 方向を正とする。(4) 式に (3) 式を代入し整理すると次式を得る。

(i) $u \geq 0, v \geq 0$ のとき

$$a \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} = 2b \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (5-a)$$

(ii) $u > 0, v < 0$ のとき

$$a \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} = -2b \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (5-b)$$

Confined seepage 問題では適当な座標交換を行なうことによりほとんどの場合上式を基礎式にすることができる。

3.1.2. 水頭 h に関する基礎方程式

水頭 h に関する基礎方程式を誘導する。まず (1-a) 式を x で、式 (1-b) を y で微分し、両式の辺々を加え、 u, v を流れの函数を用いて表わすと、次式を得る。

(i) $u \geq 0, v \geq 0$ のとき

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -2b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (6-a)$$

(ii) $u > 0, v < 0$ のとき

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -2b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots(6-b)$$

これが水頭 h についての基礎式である。とくに (5), (6) 式において, $b=0$ のとき, すなわち Darcy 則が成立するときには

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(7-a)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(7-b)$$

となり, 流れの函数 ϕ , 水頭 h に関して Laplace の方程式が得られる。

3.1.3. 境界条件

簡単のため境界は x, y 軸に直角とする。ここで Fig. 1 のような解析領域を考えると各々の境界に対する条件は次のとおりである。

(i) 流入面 (AB) [流出面 (DE)]

この面では水頭 h は一定であるから $\partial h / \partial x = 0$ である。したがって $u=0$ となり

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

を得る。

(ii) 不透壁 [矢板壁上 (BC, CD) または不透壁上 (AFGE)]

不透壁は一つの流線であるから, 不透壁上の流れの函数値は一定である。

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{BOD} = 0 \\ \phi_{AFGE} = \text{const.} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

また不透壁を横切る流れはないから, 水頭 h についての境界条件は次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{AF, EG, BC, CD 上では } \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \text{FG 上では } \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

3.2. 解法

流れの函数に関する基礎方程式は (5) 式であり, 水頭に関する基礎方程式は (6) 式である。(6) 式の中には, 流れの函数が含まれているため (6) 式単独では, 水頭 h の値を求めることはできない。そこでまず (5) 式を与えられた境界条件のもとに解析し, 領域内の ϕ の値を得た後, (6) 式に代入し, 水頭 h の値を求める。

解析領域として Fig. 1 を考えると, 領域内の流れは y 軸に対して対称である。このような場合には, y 軸上に境界条件として対称の条件を入れることによって, (5-a) 式を $u \geq 0, v \geq 0$ の領域のみについて解けばよい。むろん, y 軸に対して非対称の場合には, それぞれの点について (5-a), (5-b) を用いて解析しなければならない。

さていまの場合, Fig. 1 の $u \geq 0, v \geq 0$ の領域について (5-a) 式を境界条件 (8), (9) 式のもとに解く。この場合, 基礎方程式が非線型かつ境界の形状が複雑であり, 解析的に解くのは困難であるから数値解法によることにする。

まず Fig. 4 の場において (5-a) 式を差分近似式で表わすと (11) 式を得る。ここで n は格子点の間隔である。また交点

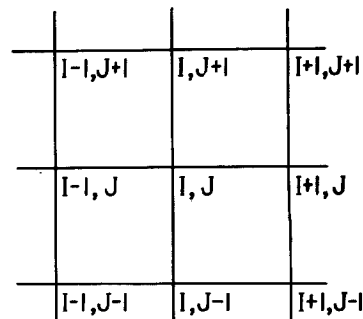


Fig. 4 Finite difference grid used to solve the differential equation.

の ϕ および h の値をその点の suffix を用いて表わす。

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{ij} = \rho_{ij} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし

$$\begin{aligned} \rho_{ij} = & \frac{b}{an} \{ (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{ij}) \\ & - (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{ij}) \} \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

この (11) 式を解くのに逐次代入法⁵⁾を用いる。すなわち、すべての格子点上で第 m 近似 ϕ^m がすでに与えられているものとして第 $(m+1)$ 近似を次のようにして求める。

まず (12) 式を用いて ρ_{ij}^m を計算する。次に ρ_{ij}^m を (11) 式に代入し S. O. R. 法 (Successive Over Relaxation Method) により各点の ϕ^{m+1} を求める。

逐次代入法の出発値 ϕ^0 としては $b=0$ の場合を考え Laplace 式から得られる解を用いる。この際、はじめから格子点間距離を小さく取ると収束が悪い。そこではじめ格子点間隔を大きく取り近似値を求め、この値を用いて中間点の値を補間し、これを ϕ^0 に用い ϕ^1 を計算し逐次近似度を上げて行く方法を取ると良い。

ϕ の値が希望する精度で得られたものとし、水頭分布 (h) を求めるには次のようにする。まずこの流れの場において一つの流線に沿う全損失水頭を求める。Fig. 1 の場合には次式によって求めうる。

$$\begin{aligned} H = & 2 \int_A^F (av + bv^2) dy + \int_F^G (au + bu^2) dx \\ = & 2 \int_A^F \left\{ a \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1} + b \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1}^2 \right\} dy + \int_F^G \left\{ a \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_1} + b \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_1}^2 \right\} dx \end{aligned}$$

この H の値を流入側の値とし、BC, DC 以外の解析領域内の y 軸上には $h=H/2$ の値を用い、これを (6-a) 式を解く際の境界値とする。(6-a) 式を差分方程式で表わすと (13) 式を得る。

$$\begin{aligned} h_{i+1,j} + h_{i,j+1} + h_{i-1,j} + h_{i,j-1} - 4h_{ij} \\ = & \frac{-b}{4n} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}) \\ & \times (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

この式で右辺は既知であるので S. O. R. 法により容易に解を得ることができる。

3.3. 計算結果および考察

Fig. 1 に示される有限領域の矢板のまわりの流れについて解析を行なう。この場合、Forchheimer 則の係数に実験で求めた次の値を用いた。

$$a = 0.23 \text{ (cm}^{-1} \cdot \text{sec)}$$

$$b = 0.12 \text{ (cm}^{-2} \cdot \text{sec}^2)$$

また AFGE 上の流れの函数 ϕ に $20.0 \text{ (cm}^2/\text{sec)}$ を与えた。したがって、Fig. 1 の単位断面についての浸透量は $20 \text{ cm}^3/\text{sec}$ である。矢板付近、 x 方向に 40 cm の領域は 2.5 cm 網目で区切り、他は 5 cm 網目で計算した。この場合、流れの函数 ϕ については第3近似値まで求めたが、第3補正量 $\Delta\phi^3$ は 10^{-2} のオーダーであった。なおこの計算で用いた S. O. R. 法で、各点の修正量の絶対値の総和が 0.1 以下になったとき収束したものとし、これを各点の修正量になおすと、全領域の計算を行なう交点数が 408 点であるので、一点につき約 2×10^{-4} 程度であり、十分収束した段階で、一段階近似度を上げる計算に進んだものと考えている。また (6) 式の解析については十分な精度で水頭の値が求められたものと考えている。

計算結果の一例を Fig. 5 に示す。Fig. 5 に同じ浸透量についての Laplace 方程式から得られる解も示したが、本理論との間に大きな差異が認められる。すなわち矢板部以外の y 軸上では、Laplace 方程式から得られる解の場合より流線の分布が平均化している。すなわち流速分布が平均化されていることを意味している。これは矢板先端部の流速の大きい部分が U^2 の抵抗の項によって、Laplace 方程式の解から得られる値より流速が低下し、逆にやや離れた部分で流速が大きくなったことを意味している。水頭分布については、矢板先端部で、 U^2 の抵抗の項が大きく作用し、損失水頭が大きく、水頭勾配が大きくなっている。こ

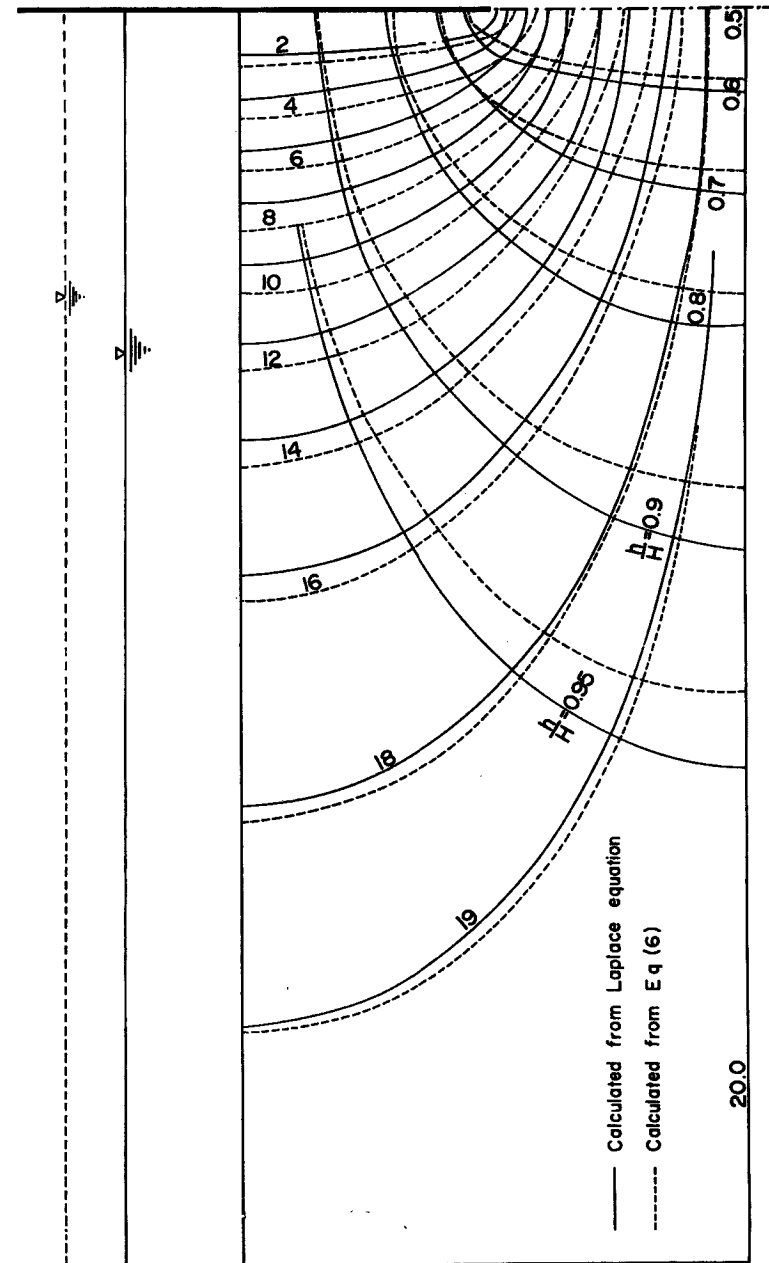


Fig. 5 Flow nets calculated from Eqs. (5), (6) and Laplace Equation.

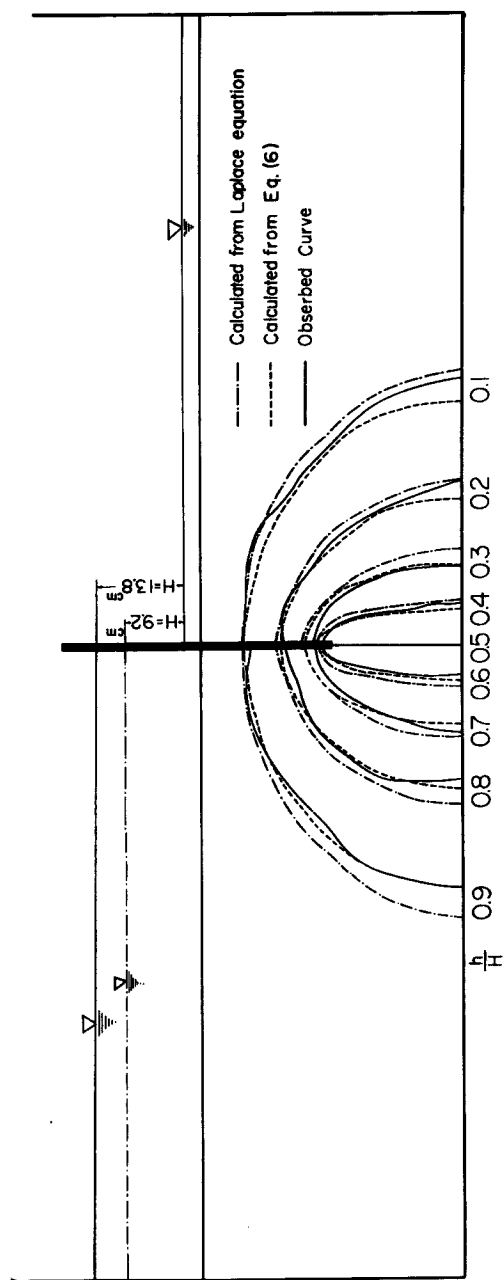


Fig. 7 Comparison of equipotential lines obtained by Eq. (6), Laplace Equation and experiment.

れが全領域へ影響し、この断面で $q=20\text{cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ 流下させるために Laplace 方程式から得られる解からは、上下流の水頭差 $H=9.20\text{cm}$ ($K=1/a=4.35\text{cm}/\text{sec}$) となるのに対し、この理論では $H=13.79\text{cm}$ となり大きな違いを示す。

4. 考 察

Fig. 6 に境界 $AFGE$ に与えた ϕ の値すなわち $q\text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ と水頭差 H との関係を実験結果と解析結果について示す。これは Fig. 1 の場で透水層厚 (P) 40cm 、矢板の深さ 20cm についてのものである。透水試験から最も密に充てんした場合の実験式として (a) 式を得たが、これを用いての解析結果はあまりよくなく、やや緩に充てんしたと思えるときの (c) 式を用いた場合の解析結果は実験値と良く一致している。直径 12.5cm のパイプ内への砂の充てんは容易に密にすることができ、広い水槽内で砂を密に充てんすることはかなり困難であるということを考慮すると、前述の解析結果はかなり良好なものとみてよい。

Fig. 7 に $q=21.26\text{cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ 、 $H=13.8\text{cm}$ の条件で得られた実験結果と、(C) 式すなわち $a=0.23\text{cm}^{-1}\text{sec}$ 、 $b=0.12\text{cm}^{-2}\cdot\text{sec}^2$ を用い、 $q=20.0\text{cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ の場合について解析した結果との比較を水頭分布について示す。図面には $q=20.0\text{cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ の場合の Laplace の式よりの解を併示してある。いま q に約 5% の差があることを無視すると、Fig. 7 からこの理論結果はよく実験結果と合っているといえよう。これに対し Laplace 式から得られた計算値では $H=9.2\text{cm}$ となり、比較にならないが、水頭線の分布の状態のみに着目しても、実験結果とはかなり様相が異なる。

以上 Fig. 6, 7 の対比より、Darcy 則の上限を越える流れの領域では Forchheimer 則の適用がよい結果を与えることと結論することができる。

5. 結 言

本研究では Darcy 則の適用限界を越える confined seepage 問題に、Forchheimer 則を適用して理論的・実験的に検討した。Forchheimer 則を適用すると基礎方程式が非線形になり、解析解が得がたいので数値解法によったが、計算結果はよく実験的事実を説明しうることを明らかにすることができた。数値計算法には技術的な問題が残されているように思われるが、それは今後の問題としたい。なお、計算には京都大学電子計算機 KDC-II を使用した。

参 考 文 献

- 1) Muskat: The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. 1937.
- 2) Kochina, P.: Theory of Ground Water Movement. 1962, p. 17.
- 3) 例えば Ward, J.C.: Turbulent Flow in Porous Media. Proc. A.S.C.E. Vol. 90, Hy. 5 1964, p. 1—12.
- 4) 室田明・佐藤邦明: 地下水流の浸透機構について (II), 土木学会, 第23回年次学術講演会講演概

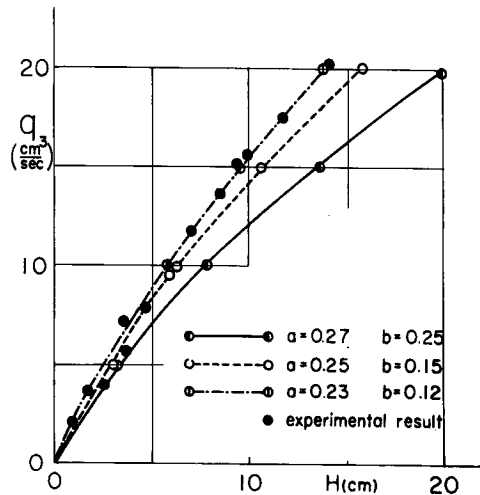


Fig. 6 Comparison of theoretical relationships between q and H with experimental results.

要第II部門, 昭43, pp. 415—418.

- 5) 高見顯郎: Navier-Stokes 方程式の解の一計算, 偏微分方程式の数値解法研究会報告集, 京大数理解析研究所, 数理解析研究所講究録37, 昭43, pp. 53—66.
- 6) 一松信他 2 名: 数値計算法 (1), pp. 163—172.