

関孝和の交式、斜乗

竹之内 脩

関孝和は、『解伏題之法』において、多元の方程式についての消去の議論をしている。

◆ 3 次の場合

三式	二式	一式			
壬	己	丙			
辛	戊	乙			
庚	丁	甲			

相壬 乘乙 丁 生	相己 乘辛 甲 生	相丙 乘戊 庚 生			
○	○	○			
三 辛丁乙	二 辛戊甲	一 庚戊乙			
六 庚丁乙	五 辛丁甲	四 庚戊甲			

相壬 乘戊 甲 剋	相己 乘乙 庚 剋	相丙 乘辛 丁 剋			
○	○	○			
二 辛戊甲	一 庚戊乙	三 辛丁乙			
四 庚戊甲	六 庚丁乙	五 辛丁甲			

◆ 4 次の場合

4 次の場合も、同じように、まずデータの図を与える。

四式	三式	二式	一式
婁	危	斗	房
奎	虚	箕	低
壁	女	尾	亢
室	牛	心	角

そして、三次の場合と同様の消去した表を与える。

相尾婁 乘角虛 生	相亢危 乘室箕 冠	相壁斗 乘牛底 生	相女房 乘心奎 冠
○	○	○	○
二十四 奎虛尾角	二十三 室虛箕亢	二十二 壁牛箕底	二十一 奎女心底
六 壁虛尾角	五 室女箕亢	八 壁牛尾底	七 奎女心亢
二十八 室虛尾角	二十七 室牛箕亢	二十六 壁牛心底	二十五 奎女心角

相尾婁 乘牛底 冠	相亢危 乘心奎 生	相壁斗 乘角虛 冠	相女房 乘室箕 生
○	○	○	○
四 奎牛尾底	三 奎虛心亢	二 壁虛箕角	一 室女箕底
八 壁牛尾底	七 奎女心亢	六 壁虛尾角	五 室女箕亢
十二 室牛尾底	十一 奎牛心亢	十 壁虛心角	九 室女箕角

相女婁 乘角箕 冠	相尾危 乘室底 生	相亢斗 乘牛奎 冠	相壁房 乘心虛 生
○	○	○	○
三十二 奎女箕角	三十一 室虛尾底	三十 奎牛箕亢	二十九 壁虛心底
十五 壁女箕角	十四 室女尾底	十三 奎牛尾亢	十六 壁虛心亢
九 室女箕角	十二 室牛尾底	十一 奎牛心亢	十 壁虛心角

相亢婁 乘心虛 冠	相壁危 乘角箕 生	相女斗 乘室底 冠	相尾房 乘牛奎 生
○	○	○	○
三 奎虛心亢	二 壁虛箕角	一 室女箕底	四 奎牛尾底
十六 壁虛心亢	十五 壁女箕角	十四 室女尾底	十三 奎牛尾亢
二十七 室虛心亢	十九 壁牛箕角	十八 室女心底	十七 奎牛尾角

相女婁 乘心底 生	相尾危 乘角奎 冠	相亢斗 乘室虛 生	相壁房 乘牛箕 冠
○	○	○	○
二十一 奎女心底	二十四 奎虛尾角	二十三 室虛箕亢	二十二 壁牛箕底
三十六 壁女心底	三十五 奎女尾角	三十四 室虛尾亢	三十三 壁牛箕亢
十八 室女心底	十七 奎牛尾角	二十 室虛心亢	十九 壁牛箕角

相亢婁 乘牛箕 生	相壁危 乘心底 冠	相女斗 乘角奎 生	相尾房 乘室虛 冠
○	○	○	○
三十 奎牛箕亢	二十九 壁虛心底	三十二 奎女箕角	三十一 室虛尾底
三十三 壁牛箕亢	三十六 壁女心底	三十五 奎女尾角	三十四 室虛尾亢
二十七 室牛箕亢	二十六 壁牛心底	二十五 奎女心角	二十八 室虛尾角

交式、斜乗 この表にしたがって各項を掛け、生尅をつけて加えるのだが、掛ける数が多くて見やすすくないから、次の交式、斜乗の方式を使う、といって、次のやり方を示す。

右各逐式交乗して、正尅を得たる也。しかりと雖も、相乗の数、位繁多にして見やすからず。故に、交式、斜乗を以って、之にかえる。

交式

換三式より換四式を起こし、換四式より換五式を起こし、逐って此の如くす。○順逆共に通めて一を添えて、次を得る。乃ち、式数奇なるものは皆順、偶なるものは順逆相交わる也。

換三式

順 順 順

一	二	三
---	---	---

換四式

順 逆 順 逆

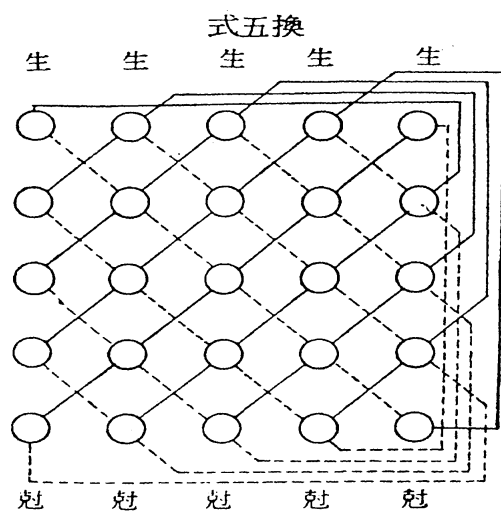
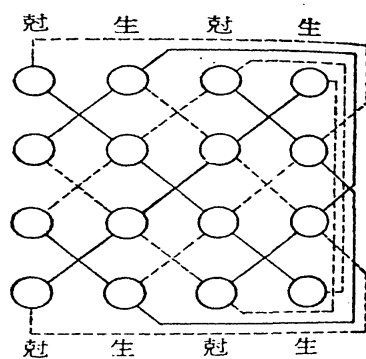
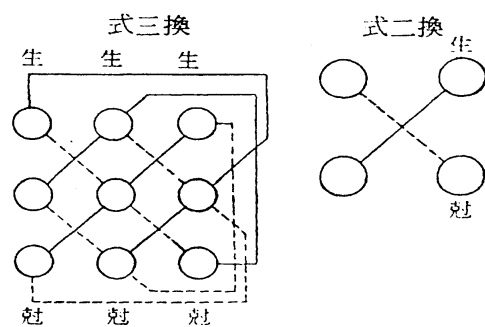
一	二	三	四
一	二	四	三
一	四	二	三

換五式

一	二	三	四	五
一	二	三	五	四
一	四	五	二	三
一	五	四	三	二
一	三	四	五	二
一	四	二	三	五
一	五	三	二	四
一	三	五	四	二
一	二	五	一	四
一	五	二	四	三
一	三	四	一	五
一	四	三	五	二

斜乗

交式、各之を布きて、左右の斜乗により 正尅を得る也。換式数奇なるものは、左斜乗を以って正となし、右斜乗を以って尅となす。偶なるものは、左斜乗、右斜乗共に正尅相交わる也。



関の意図とあやまり

関の意図を付度するに、関は、もとの式が何次のものであっても、この交式、斜乗の方式でやれば、結果を得ることができることを主張したかったのであろう。そして、5 次の場合には、ともかくも、このようにやればよい、とい方式はできた。そこで、これを 6 次の場合にやるとして、どのようにやればよいか。ところが、これがうまくいかないのである。6 次の場合の交式をどのように作ればよいのか。

また、関の述べた方法は、5 次の場合には、斜乗における符号のつけ方、交式における式の配列の仕方ともに、そもそもあやまりであって、この方式でやると、結果は 0 になってしまうのである。

関は、おそらく 5 次の場合のあやまりについては、気がついていたことであろう。そして、これを改良するためにあれやこれや考えているうちに、田中由実や井関知辰による小行列式展開の方法が発表されて、この方式ならば順次やっていけることがわかり、『大成算経』では、交式斜乗の方法を捨てて、小行列式展開の方法を採用したものと考えられる。

関の交式斜乗の方法については、その後、何人かの人々が改良を試みているのであるが、関にしろ、その人たちにしろ、これによって何をしようとしていたのであろうか。

関がはじめに目指したように、変数の消去が目的であったのならば、はじめの符号のあやまりなどは当然気がついていなければならない。

そこで、単に、交式斜乗という形式的処理にだけ興味をもって、それを *consistent* な形で拡張しようと考えたと思われる。

行列式という見地では、理論の整合性が出てくるが、この和算における一連の業績では、そのような形の評価を与えることはできない。

交式の作り方と符号

交式をシステマティックに作っていくためには、 $n = 4$ の場合が基本になる。

1234, 1342, 1423

関は、この交式の作り方について、

換三式より換四式を起こし、換四式より換五式を起こし、逐って此の如くす。○順逆共に通めて一を添えて、次を得る。乃ち、式数奇なるものは皆順、偶なるものは順逆相交わる也。

と書いているのであるが、これは、 $n = 3, 4$ の場合から類推して、一般のとき、このようにやっていけばよい、と述べたものと思われる。しかし、事はそのように簡単ではない。

$n = 5$ の場合を考えてみると、

1234, 1342, 1423

から、各数を 1 ずつ進めて、それに頭に 1 をつけて、

12345, 12453, 12534

とするまではよいが、式の数全部で 12 必要で、それをこれからどう作るのか、符号をどうするかが、大きな問題である。

松永良弼による交式の作り方

松永良弼は、

松永良弼『解伏題交式斜乗之諺解』（1715）

において、

$1\ 2\ 3\ 4\ 5 \rightarrow 1\ 3\ 4\ 5\ 2 \rightarrow 1\ 4\ 5\ 2\ 3 \rightarrow 1\ 5\ 2\ 3\ 4$

$1\ 2\ 4\ 5\ 3 \rightarrow 1\ 4\ 5\ 3\ 2 \rightarrow 1\ 5\ 3\ 2\ 4 \rightarrow 1\ 3\ 2\ 4\ 5$

$1\ 2\ 5\ 3\ 4 \rightarrow 1\ 5\ 3\ 4\ 2 \rightarrow 1\ 3\ 4\ 2\ 5 \rightarrow 1\ 4\ 2\ 5\ 3$

とすることを与えている。これは、2 番目の数字を次々 1 番後ろに廻す、ということによって作っていくので、この方針でやれば、何次になっても、続けていくことができる。いくつ後ろに廻すか。この場合は奇数個なので、 $+$, $-$, $+$, $-$ と符号を変えていけば、

$+12345 \quad -13452 \quad +14523 \quad -15234$

$+12453 \quad -14532 \quad +15324 \quad -13245$

$+12534 \quad -15342 \quad +13425 \quad -14253$

が得られる。

$n = 6$ の場合には、

$+123456 \quad +134562 \quad +145623 \quad +156234 \quad +162345$

$+124536 \quad +145362 \quad +153624 \quad +136245 \quad +162453$

$+125346 \quad +153462 \quad +134625 \quad +146253 \quad +162534$

$-134526 \quad -145263 \quad -152634 \quad -126345 \quad -163452$

$-145326 \quad -153264 \quad -132645 \quad -126453 \quad -164532$

$-153426 \quad -134265 \quad -142653 \quad -126534 \quad -165342$

$+145236 \quad +152364 \quad +123645 \quad +136452 \quad +164523$

$+153246 \quad +132465 \quad +124653 \quad +146532 \quad +165324$

$+134256 \quad +142563 \quad +125634 \quad +156342 \quad +163425$

$-152346 \quad -123465 \quad -134652 \quad -146523 \quad -165234$

$-132456 \quad -124563 \quad -145632 \quad -156324 \quad -163245$

$-142536 \quad -125364 \quad -153642 \quad -136425 \quad -164253$

この方式によって、この後、何次の式であっても、整然と交式をつくっていくことができる。

斜乗の符号

斜乗の符号については、行列式の議論からは、次のようになる。

左斜乗

◇ $n = 4$ のとき 基本の順列 1234 に対して、2 項目の順列 2341 は奇順列であるから、符号は $-$ となるので、項の符号は $+ - + -$ となる。

◇ $n = 5$ のとき 基本の順列 12345 に対して、2 項目の順列 23451 は偶順列であるから、符号は $+$ となるので、項の符号は $+++++$ となる。

以後、このパターンが繰り返されていく。

右斜乗

◇ $n = 4$ のとき 基本の順列 4321 は、偶順列。これに対して、2 項目の順列 3214 は奇順列であるから、符号は $-$ となる。したがって、項の符号は $+ - + -$ となる。

◇ $n = 5$ のとき 基本の順列 54321 は偶順列で、符号は $+$ 。2 項目の順列 43215 は偶順列であるから、符号は $+$ である。したがって、以下項の符号は $+++++$ となる。(ここが関の大きなあやまり)

◇ $n = 6$ のとき 基本の順列 654321 は奇順列で、符号は $-$ 。2 項目の順列 543216 は偶順列であるから、符号は $+$ となるので、項の符号は $- + - + - +$ となる。

◇ $n = 7$ のとき 基本の順列 7654321 は奇順列で、符号は $-$ 。2 項目の順列 6543217 も奇順列であるから、符号は $-$ である。したがって、項の符号は $-----$ となる。

以後、このパターンが繰り返されていく。すなわち、右斜乗の符号は、4 を周期として、変化する。

菅野 元健による斜乗の符号

このことについて、和算の文献の中で、はじめて述べているのは、

菅野 元健 『補遺解伏題正尅篇』 (1798)

である。

彼は、

左斜乗について、次数が 4 の場合からはじめて、項の符号が、

$+ - + -$, $++++$, $+ - + - + -$, $++++++$, $\dots$

右斜乗について、

$+ - + -$, $++++$, $- + - + - +$, $-----$, $\dots$

となり、以下このパターンを繰り返すと述べている。

しかし、これについて、菅野はこれだけしか述べていないので、どのようにしてこのことを結論したのかわからない。