

On Riesz mean for the coefficients of the twisted Rankin - Selberg L-function.

市原由美子 (Yumiko Ichihara)

名古屋大学多元数理科学研究科
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)

normalized Hecke eigen cusp form $f(z)$ の係数における Fourier 係数

a_n について、1939 年に Rankin [5] により、2 次が示された。

$$\sum_{n \leq x} a_n^2 = \frac{\pi^2}{6} \alpha x^k + O(x^{k-\frac{2}{5}}) \quad (1)$$

ここで α は定数で、 k は $f(z)$ の weight である。この結果は

$$L_{f \otimes f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^{-s+k+1}, \quad \text{Re}(s) > 1 \quad (2)$$

を調べることで得られる。これは Riemann zeta 関数。実際、ここで、

$L_{f \otimes f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n n^{-s}$ と書くとき、この L 関数の性質から

$$\sum_{n \leq x} \tilde{c}_n = \frac{\pi^2}{6} k \alpha x + O(x^{\frac{3}{5}}) \quad (3)$$

が求められて、Rankin の結果 (1) を導く。つまり (1) の本質は (3) である。

実は (3) の評価はより改良できるであろうと予想されている。Ivić に

より (3) の error term について $O(x^{\frac{3}{5}})$ と評価されて以来、このことから

error term は $O(x^{\frac{3}{5}})$ ぐらいであろうと予想される。しかし Rankin [5]

以後 (1) の評価は全く改良されていない。

この評価の改良に向けて 1 つの試みは Ivić - Matsumoto - Tanigawa [4]

によりなされた。彼らは Riesz mean と呼ばれる次の様な和について

$$D_f(x) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \sum_{n \leq x} \tilde{c}_n (x-n)^p$$

幾つかの Voronoi - formula と同様に、 $D_1(x)$ の error term の 2 乗平均
に対する考察から Rankin の評価 (1) と改良する可能性を示して。

さて、Rankin の結果 (1) の類似として次が得られる。

$f(z), g(z) : SL_2(\mathbb{Z})$ に関する normalized Hecke eigen cusp form
それぞれ weight を k, ℓ ($k \geq \ell$) とする。

f, g , それぞれの n における n -th Fourier 係数 を a_n, b_n と書くこと
にし、 $\chi \pmod{d}$ ($d \geq 1$) の primitive Dirichlet 指標 とするとき
 $f \neq g$ 又は χ non-trivial であれば、

$$\sum_{n \leq x} a_n b_n \chi(n) \ll x^{\frac{k+\ell}{2} - \frac{2}{5}} d^{\frac{4}{5} + \varepsilon} \quad (4)$$

が成り立つ。これは Rankin-Selberg L 関数

$$\begin{aligned} L_{fg}(s, \chi) &= L(2s, \chi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n \chi(n)}{n^{s + \frac{k+\ell}{2} - 1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1 \\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(n) \chi(n)}{n^s} \\ C_n &= n^{1 - \frac{k+\ell}{2}} \sum_{m^2 | n} a_{\frac{n}{m^2}} b_{\frac{n}{m^2}} m^{k+\ell-2} \end{aligned}$$

に対して

$$\sum_{n \leq x} C_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5} + \varepsilon} \quad (5)$$

の評価に対応している。

(3) における error term の考察と (5) の評価の考察は対応するので
(5) における x のべきの考察は Ivic - Matsumoto - Tamagawa [4] の手法で

意味があると思われる、(5)の様な modulus d や保型形式の level に
関する評価はあまりされておらず、またまた情報は少ない。そこで今回は、
Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の方法から modulus d に与える影響に
ついて調べてみて、その結果を報告したい。

まず、先に紹介した Rankin-Selberg L 関数 $L_{f \otimes g}(s, X)$ の性質を
述べる。 $L_{f \otimes g}(s, X)$ は $\Re(s) > 1$ で絶対収束し、 s -平面全体に pole を除き
正則に解析接続される。 pole は $f = g$, $d = 1$ の時 $s = 1$ = simple pole
が存在する。また $C_n \ll n^c$ も分かる。次の関数等式を述べる。

$$\Phi_{f \otimes g}(s, X) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{-s} \Gamma\left(s + \frac{k-l}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{k+l}{2} - 1\right) L_{f \otimes g}(s, X)$$

に対して、大きさを X のみに依る絶対定数 C_X があり、

$$\Phi_{f \otimes g}(s, X) = C_X \Phi_{f \otimes g}(1-s, \bar{X})$$

が満たす。

次に Riesz mean

$$D_f(x, X) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \sum_{n \leq x} (x-n)^p, \quad p \in \mathbb{R}$$

に対して Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の議論を類似を考へよう。この前にも、
Hafner [1] の一般論から次のような Voronoi-formula を得られている。

$$D_f(x, X) = Q_f(x, X) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_X C_n \bar{X}(n) \left(\frac{2\pi}{d}\right)^2}{\left(n \cdot \frac{16\pi^4}{d^4}\right)^{1+p}} J_p\left(\frac{16\pi^4 x n}{d^4}\right) \quad (6)$$

$$Q_f(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(s) L_{f, \chi}(s, x) x^{f+s}}{\Gamma(s+f+1)} ds$$

$$f_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,b}} \frac{\Gamma(1-s) \Gamma(s + \frac{k-l}{2}) \Gamma(s + \frac{k+l}{2} - 1)}{\Gamma(2+f-s) \Gamma(1-s + \frac{k-l}{2}) \Gamma(-s + \frac{k+l}{2})} x^{1+f-s} ds$$

(積分路 C , $C_{a,b}$ は Hafner [1] 参照, $a > 0$, $b > \frac{k+l}{2} - 1$ とする)

また, この Voronoi-formula (6) に現れる無限級数は $f > \frac{3}{2}$ でなければ絶対収束せず, $f > \frac{1}{2}$ で収束する。つまりこの formula から直接 $D_0(\lambda, x)$ の情報を得ることはできない。ここで絶対収束する (3) の情報を使えば (3) や (5) が得られる ([2] 参照)。Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] は条件収束している場合 ($f=1$) から得られる情報に注目した。ここでは (6) のタイプの Voronoi-formula ではなく, Main term と有限和と error term と表される truncated Voronoi-formula, 更に Meurman-type と呼ばれる Voronoi-formula の 2 つを求め, これらを用いて $f=1$ における error term $D_f(\lambda, x) - Q_f(\lambda, x)$ の 2 乗平均を調べた。指標付きで考えた場合には同様の議論を考えると, 次の結果を得た。

Proposition 1 (truncated Voronoi-formula)

f は実数で $0 \leq f \leq \frac{3}{2}$ とする。 $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \varepsilon & 0 \leq f \leq 1 \\ \frac{1}{f} + \varepsilon & 1 < f \leq \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{と置く。 また } N \geq d^{\varepsilon^*} \text{ とする}$$

十分大きな N とするとき, 次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
D_f(x, X) &= \frac{x^f}{\Gamma(f+1)} L_{f \log}(c, X) \\
&+ \frac{C_X}{(2\pi)^{f+1}} d^{\frac{f+1}{2}} x^{\frac{3+6f}{8}} \sum_{n \leq N} \frac{C_n \overline{X}(n)}{n^{\frac{5+2f}{8}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d}(xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{3-2f}{4}\pi\right) \\
&+ O\left(x^{\frac{1+6f}{8}} d^{\frac{3}{2}+f} N^{\frac{1-2f}{8}} + x^{\frac{1+3f}{4}} d^{f+1} N^{\frac{1+f}{4}+\varepsilon} + x^{\frac{3+3f}{4}+\varepsilon} d^{1+f} N^{-\frac{1+f}{4}}\right) \\
&+ \begin{cases} O\left(x^{\frac{11}{8}} d^{\frac{5}{2}} N^{-\frac{1}{8}+\varepsilon^*} + x^{\frac{3}{2}-\varepsilon^*} d^{2+4\varepsilon^*}\right) & \frac{d^4}{16\pi^4 x} \geq 1, \quad f = \frac{3}{2} \\ O\left(x^2 d^2 + x^{\frac{1+3f}{4}} d^{f+1} N^{\frac{1-f}{4}+\varepsilon^*} + x^{f-\varepsilon^*} d^{2+4\varepsilon^*}\right) & \frac{d^4}{16\pi^4 x} \geq 1, \quad f \neq \frac{3}{2} \\ O\left(x^{\frac{1+6f}{8}} d^{f+\frac{3}{2}}\right) & \frac{d^4}{16\pi^4 x} < 1 \end{cases} \\
&+ O(x^{f+\varepsilon})
\end{aligned}$$

ここで 最後の error term は $f=0$ の時は現れない。 $\exists T = k=l$ ならば $L_{f \log}(c, X) = c$ であることに注意。

Proposition 2 (Meurman type Voronoi-formula)

$x \geq 1$ なる 整数でない実数とする。 $M \geq d^4$ を満たす十分大なる M と $0 \leq \varepsilon$ について次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
D_1(x, X) &= x L_{f \log}(c, X) \\
&+ \frac{C_X}{(2\pi)^2} d^{\frac{3}{2}} x^{\frac{9}{8}} \sum_{n \leq M} \frac{C_n \overline{X}(n)}{n^{\frac{7}{8}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d}(xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{4}\right) \\
&+ O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon} d^2 M^{-\frac{1}{2}} \|x\|^{-1} + x^{\frac{13}{8}} d^{\frac{3}{2}+\varepsilon} M^{-\frac{3}{8}+\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^{\frac{11}{8}} d^{\frac{21}{10}+\epsilon} M^{-\frac{17}{40}} + x^{\frac{9}{8}} d^{\frac{23}{10}+\epsilon} M^{-\frac{11}{40}} \\
& + x^{\frac{9}{8}} d^{\frac{31}{10}+\epsilon} M^{-\frac{27}{40}} + x^{\frac{7}{8}} d^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{13}{8}} d^2 M^{-\frac{1}{2}} \Big) \\
& + \begin{cases} 0 & \frac{d^q}{16\pi^q} < 1, \quad k-l=0, 2 \\ C(d^6) & \frac{d^q}{16\pi^q} < 1, \quad k-l \neq 0, 2 \\ O(xd^2M^6) & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで $\|x\|$ は $x \in \mathbb{R}$ に対する一番近い整数との間の距離を表す。

この2つの Proposition より 次の Theorem を導ける。

Theorem

$$D_1^*(x, x) = D_1(x, x) - x L_{\log}(c, x) \quad \text{とある。}$$

$f \neq g$ 又は $\chi \neq 1 \pmod{d \neq 1}$ の primitive character χ とす。

$$\int_0^x |D_1^*(x, x)|^2 dx = \frac{2d^3}{13(2\pi)^4} \sum_{n=1}^x \frac{|C_n \chi(n)|^2}{n^{\frac{7}{4}}} x^{\frac{13}{4}} + F(x)$$

ここで $F(x) = O(x^{3+\epsilon} d^{4+\epsilon})$ である。

この結果は (5) を改良したもので、もし

$$F(x) = x^3 d^4 P(\log xd) + O(x^\alpha d^\beta), \quad \alpha \leq 3$$

の様に多項式 $P(x)$ を用いて書き表すことができれば、多少の条件は必要だが

$$D_1(x, x) \ll x^{\frac{5}{8}} d^{\frac{3}{2}} + x^{1+\epsilon} d^{2+\epsilon} + x^{\frac{3+5\alpha}{15}} d^{\frac{4+5\beta}{15}}$$

となることは明らか。これは $D_2(x)$ を改良するだけの情報を持つている。

すなわち、これから考察は modulus $1 = 2\pi i$ を注意する = 22 非常に複雑 $1 = 2\pi i$ である。
 実際 $\frac{d^4}{16\pi^4 x} \leq 1$ という条件が 22 の Proposition 達は簡単に書ける。
 次の 55 になる。

Remark 1 (Truncated Voronoi-formula)

$0 \leq p \leq \frac{3}{2}$, $0 < \epsilon < 1$ に対して。

$$\begin{aligned} D_p(x, x) &= Q_p(x, x) \\ &+ \frac{C_x}{(2\pi)^{1+p}} x^{\frac{3+6p}{2}} d^{\frac{1}{2}+p} \sum_{n \leq N} \frac{C_n \bar{\chi}(n)}{n^{\frac{5+2p}{2}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d} (xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{3-2p}{4}\pi\right) \\ &+ O\left(x^{\frac{1+6p}{2}} d^{\frac{3}{2}+p} + x^{\frac{3+3p}{4}+\epsilon} d^{1+p} N^{\frac{1+p}{4}} + x^p d^2 \right. \\ &\quad \left. + x^{p+\epsilon} + x^{\frac{1+3p}{4}} d^{1+p} N^{\frac{1-p}{4}+\epsilon}\right) \end{aligned}$$

ただし $N > \max\{d^4, 16\pi^4\}$ なる十分大なる N により成り立つ。

Remark 2 (Meurman-type の Voronoi-formula)

$0 < \epsilon$, 十分大なる $M > d^4$ により成り立つ。

$$\begin{aligned} D_1(x, x) &= Q_1(x, x) \\ &+ \frac{C_x}{(2\pi)^2} x^{\frac{9}{2}} d^{\frac{3}{2}} \sum_{n \leq M} \frac{C_n \bar{\chi}(n)}{n^{\frac{7}{2}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d} (xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &+ O\left(x^{\frac{13}{2}} d^2 M^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}+\epsilon} d^2 M^{-\frac{1}{2}} \|x\|^{-1} + x^{\frac{7}{2}} d^{\frac{5}{2}} \right. \\ &\quad \left. + x^{\frac{13}{2}} d^{\frac{3}{2}+\epsilon} M^{-\frac{3}{2}+\epsilon} + x^{\frac{9}{2}} d^{\frac{23}{10}+\epsilon} M^{-\frac{11}{40}} \right. \\ &\quad \left. + x^{\frac{5}{2}} d^{\frac{31}{10}+\epsilon} M^{-\frac{29}{40}} + x^{\frac{11}{2}} d^{\frac{21}{10}+\epsilon} M^{-\frac{17}{40}}\right) \end{aligned}$$

22 を用いて記号は Proposition 2 と同じ。

この Remark 1.2 には Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の結果と対応するものがある。Proposition と Remark を見比べると modulus に関する議論の複雑さが見られる。この理由は (6) の Voronoi-formula にあるように、 x に関する良い評価の代償として d^4 の評価の悪さについてまわっているにある。つまり、単純に指標がつかない場合の議論を指標付きのものにあてはめるわけにはいかないのである。指標付きの場合の今回の結果においても様々な箇所で工夫が必要であるが、それは [3] を参照していただくとして、最も大きい相違点について紹介する。

これは Meurman-Type の Voronoi-formula (Proposition 2) を得るために必要となる「 $D_1(x, X)$ の上からの評価」を求める点に表れる。

Proposition 2 を得るためには

$$D_1(x, X) \ll x^{\frac{6}{5}} d^{\frac{6}{5} + (k-2)\varepsilon} \quad (7)$$

の評価を必要とするが、これを求めるのは簡単でない。指標がつかない場合、つまり Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の場合に関しては、(7) に対応するものは $D_1(x) - Q_1(x) \ll x^{\frac{6}{5}}$ であるが、これはすぐに求めることができる。

Rankin の結果 (3) を用いても、 $D_2(x)$ については Hafner の Voronoi-formula (6) を考え、これに差分作用素を作用させて調べることもできる。差分作用素を用いた評価の方法に関しては [2] を参照してもらいたい。これは Landau-Walfisz によって扱われている標準的な手法である。この差分作用素を用いる Landau-Walfisz の方法で (7) が得られるのは「 $d^2 > x$ 」又は「 $d^2 \leq x$ かつ $\frac{16\pi^4 x}{d^4} \geq 1$ 」

の時がある。 $d^2 \leq x \leq \frac{d^4}{16\pi^4}$ により、これから従来方法より (7) を得られる。 $k=2$ Proposition 1 の導出は、次の 2 乗平均を利用した。

Lemma

$$\int_0^x |D_1(x)|^2 dx = \frac{2}{13(2\pi)^4} d^3 x^{\frac{13}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|C_n \bar{\chi}(n)|}{n^{\frac{7}{4}}} \\ + O(d^{\frac{17}{2}+\epsilon} x^{\frac{25}{8}+\epsilon} + d^{4+\epsilon} x^{3+\epsilon})$$

ここで ϵ は正の任意の実数。

この Lemma は

$$D_1(x) = \frac{1}{H} \int_x^{x+H} D_1(t) dt - \frac{1}{H} \int_x^{x+H} \int_x^t D_0(u) du dt$$

に適用し、更に (5) に注意すると、

$$|D_1(x)|^2 \leq \left\{ \frac{1}{H} \int_x^{x+H} |D_1(t)| dt + O(H x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5}+\epsilon}) \right\}^2 \\ \ll \frac{1}{H} \int_x^{x+H} |D_1(t)|^2 dt + O(H^2 x^{\frac{6}{5}} d^{\frac{8}{5}+\epsilon})$$

とあり、この Lemma より $d^2 \leq x \leq \frac{d^4}{16\pi^4}$ により (7) を得られる。

<References>

- [1] J. L. Hafner, On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions, Lec. Note in Math. 899 (1981) 148-165.

- [2] Y. Ichihara , The evaluation of the sum over arithmetic progressions for the coefficients of the Rankin-Selberg series , preprint .
- [3] ——— , On Riesz mean for the coefficients of the Twisted Rankin-Selberg L-function , preprint .
- [4] A. Ivić , K. Matsumoto and Y. Tanigawa , On Riesz mean of the coefficients of the Rankin-Selberg series , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 127 (1999) 117-131 .
- [5] R. A. Rankin , Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetic functions I and II, Proc. Camb. Phil. Soc. 35 (1939) 351-356 .