

Coupled Map Gas の Dynamics

— Clustering, Exchanging and Intermittency —

— Lattice から Gas へ! —

柴田達夫*, 金子邦彦
東京大学教養学部

1 Introduction

乱流などの複雑な現象は流体力学系ばかりでなく、拡散を伴う化学反応系や光学系や生態系など様々な系で普遍的に見られる現象である。これらの現象は「時空カオス (spatiotemporal chaos)」と呼ばれている。これらの現象をモデルし、特徴付ける方法としては、反応拡散方程式や、Coupled Map Lattice, Globally Coupled Map などがある。

Couple Map Lattice (CML) は時空カオスの本質的な特徴の単純なモデルとして導入された。CML では格子上に状態変数が置かれ、自分と近接格子の状態によって次の時間ステップでの自分の状態が決まる [1].

$$u_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(u_n^i) + \frac{\epsilon}{2}\{f(u_n^{i+1}) + f(u_n^{i-1})\},$$

u_n^i : 離散時刻 n における格子サイト i の状態変数.

$$f(u) = 1 - au^2 \text{ など}$$

Globally Coupled Map (GCM) は、状態変数が「平均場」を通して結合している系である。このような系は要素が保存則の制限を受けながら時間変化していく系や、多数の神経素子が結合しているニューラルネットワークや、ある資源のなかで共存する代謝系、生態系などに見られるものである [2].

$$u_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(u_n^i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(u_n^j).$$

反応拡散方程式や CML では状態変数は場の量として定義され、状態変数間の陽な関係が変化することはない。また、GCM においても、同じである。これらのモデルは、ある状態変数と他の状態変数との陽な結合関係は静的に決まっていて、時間とともに変わることはない。ここで、“結合関係”とは上の式の右辺に現れるような状態変数と状態変数の関係を指す。以下で用いる時も同様である。

しかし、これらの方法が全ての複雑な現象に適用できるわけではない。そのひとつとして内部に自由度をもった要素が他の要素との結合関係を陽に変えていくような系を挙げることが出来る。このような系は内部自由度を考慮に入れなくてはならない多粒子系や、多数の要素が全体としては

*E-Mail: shibata@complex.c.u-tokyo.ac.jp

集団的な動きをしながら、局所的には相互作用をしてる要素が時間とともに変化していく粘菌や鳥や魚の群などの生物系や、交通渋滞など、自然界には多数見ることが出来る。

そこで、そのような系のダイナミクスを見るためのプロトタイプ的なモデルとして、**Coupled Map Gas¹ (CMG)**を導入する。CMGでは状態変数を持つ多数の要素が CML や GCM のように結合しているが、要素間の結合関係が時間とともに陽に変わっていく。氷が融けて水になり、やがて水蒸気になるように、CML の格子が崩れて状態変数を持った要素が Gas となり、空間を飛び回り、作用を及ぼしあう要素を次々と変えていく様子を想像されるとよい。実際、以降に示すモデルでは、パラメータによって自発的に格子が形成され、パラメータを変えていくと格子が壊れ空間中を要素が飛び回っている様子を見ることが出来る。

2 Coupled Map Gas

Coupled Map Gas では、状態変数をもった要素は位置をもって空間中に配置される。要素 i の状態変数は要素 i から半径 R の距離のなかにある要素と等しい強さで結合している。一方、要素 i に位置は同じく半径 R の距離にある他の要素と力学的相互作用をし、次の時間ステップの位置に移る。

$$u_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(u_n^i) + \frac{\epsilon}{N_n^i} \sum_{j \in R(i)} f(u_n^j),$$

$$x_{n+1}^i = x_n^i + C \sum_{j \in R(i)} \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} F(u_{n+1}^i, u_{n+1}^j) \pmod{L}.$$

ただし、 u_n^i は要素 i の時間ステップ n での状態変数、 x_n^i はその位置をあらわす。 $R(i) = \{j \mid |x_n^j - x_n^i| \leq R\}$, すなわち $R(i)$ は、要素 i から半径 R の内側にある要素の集合をさす。 N_n^i は $R(i)$ に属する要素の数。 $F(u_{n+1}^i, u_{n+1}^j)$ は要素 i と j の状態変数によって決まる i と j との力学的相互作用。 $\frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|}$ は作用・反作用を満たすように導入した単位ベクトルである。 L は空間サイズ。 C は定数。全体の要素の数は N で表す。(図 1 参照)

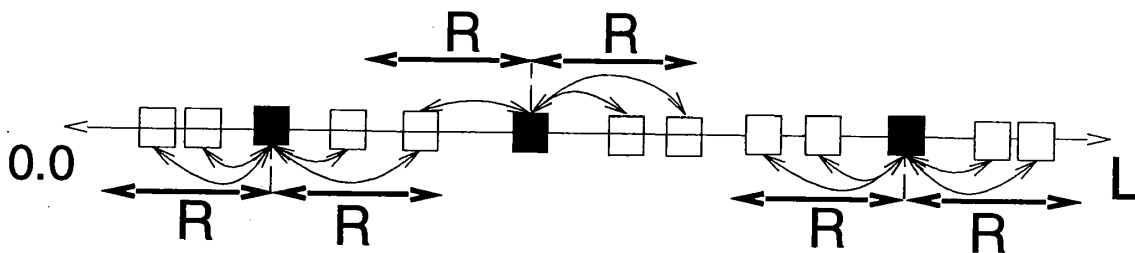


図 1: CMG の概念図。□ は要素の位置を表し空間には位置されている。黒く塗りつぶされた要素はそれぞれを中心とした半径 R の内で他の要素と相互作用している。

今回扱う系は、以下の通りである。

- TYPE I

$$u_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(u_n^i) + \frac{\epsilon}{N_n^i} \sum_{j \in R(i)} f(u_n^j),$$

¹Gas という単語は 17 世紀に空虚な空間や大気を意味するギリシャ語の Chaos に似せて造られた言葉である。

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \frac{C}{N_n^i} \sum_{j \in R(i)} \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} u_{n+1}^i u_{n+1}^j \quad (\text{mod } L).$$

$$\text{但し, } f(u) = 1 - au^2.$$

• TYPE II

$$u_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(u_n^i) + \frac{\epsilon}{N_n^i} \sum_{j \in R(i)} f(u_n^j),$$

$$x_{n+1}^i = x_n^i + C \sum_{j \in R(i)} \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} u_{n+1}^i u_{n+1}^j \quad (\text{mod } L).$$

$$\text{但し, } f(u) = 1 - au^2.$$

ここではロジスティック・マップとして $1 - au^2$ を用いているので状態変数 u の変域は $[-1, 1]$ である。そこで、上式の

$$\frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} u_{n+1}^i u_{n+1}^j$$

の項は従って、要素 i, j の状態変数が同符号ならば2つの要素は近付きあい、異符号ならば遠ざかりあう相互作用を表す。

位置の変化については以下のように変形して見方を変えることも出来る。

$$x_{n+1}^i = x_n^i + C u_{n+1}^i \left\{ \sum_{j \in R_l(i)} u_{n+1}^j - \sum_{j \in R_r(i)} u_{n+1}^j \right\} \quad (\text{mod } L).$$

ただし、 $R_l(i) = \{j | -R \leq x_j - x_i < 0\}$, $R_r(i) = \{j | 0 < x_j - x_i \leq R\}$ すなわち、 $R_l(i)$ 要素 i の左側にある要素をさす。 $R_r(i)$ 要素 i の右側にある要素をさす。この様に変形すると要素 i は自分の右側にある場と左側にある場を感じて、その時の自らの内部状態で右や左に力を受けると考えることが出来る。

3 CMG の諸現象

TYPE I

図 2 は TYPE I のモデルについて、各要素の軌道を時間の経過とともに描いたものである。 $R = 1.0$ と $R = 5.0$ の時の要素の軌道を示す。

Clustering and Exchanging particles

$R = 5.0$ の時：要素は R 程度の距離をおいてクラスターを形成する。各クラスターは隣のクラスターと要素を交換しながら推移していく(図 2)。クラスターはほぼ結合の幅 R の距離をおいて並んでいる。また、図には示されていないが、1つのクラスターはほぼ同じ値の状態変数を持った

図 2：TYPE I における各要素の軌道の時間変化を描いたもの。 u, x の初期条件はランダム。適当な時間ステップから 2000 ステップを描いたもの。縦軸は時間で、0 ステップから下方へ 2000 ステップ。横軸は空間で各要素の位置がプロットしてある。以下の図においても同じ。(a) 要素の数 $N = 100$, ロジスティックマップのパラメータ $a = 1.8$, 要素間の結合の強さ $\epsilon = 0.2$, 結合の幅 $R = 5.0$, $C = 1.0$, $L = 50.0$ (詳しくは本文参照)。(b) $N = 100$, $a = 1.75$, $\epsilon = 0.1$, $R = 5.0$, $C = 1.0$, $L = 50.0$ 。(c) $N = 50$, $a = 1.85$, $\epsilon = 0.03$, $R = 1.0$, $C = 1.0$, $L = 50.0$ 。(d) $N = 50$, $a = 1.85$, $\epsilon = 0.01$, $R = 1.0$, $C = 1.0$, $L = 50.0$ 。

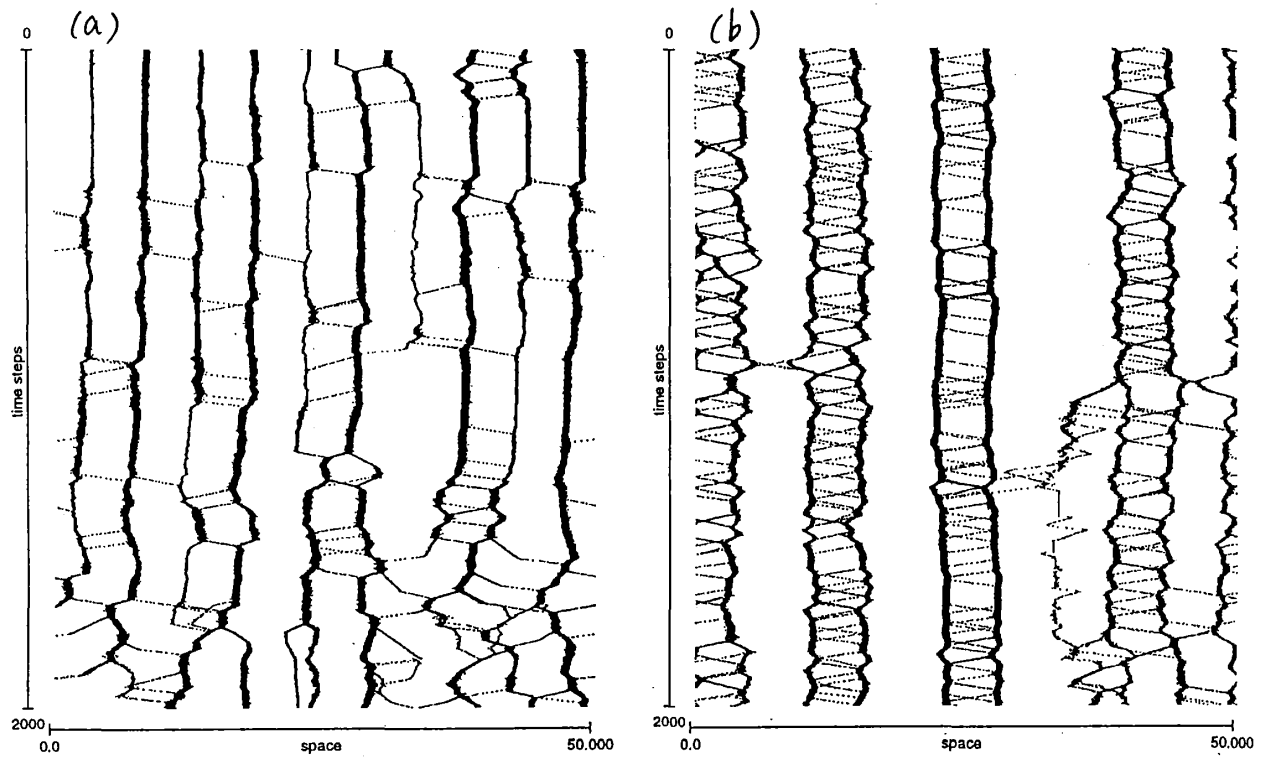
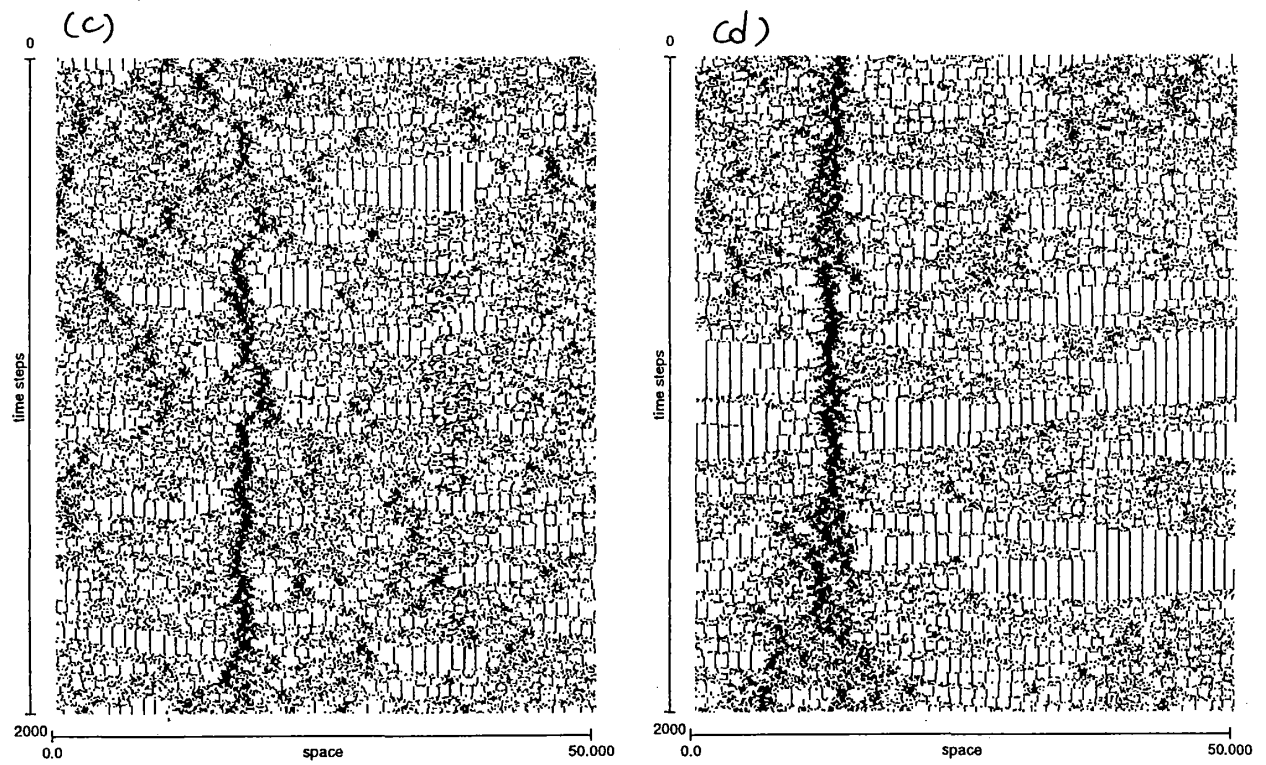


図 2



要素によって構成されている。クラスター間は状態変数が逆位相になって並んでいる。ただし、状態変数が同位相になって並ぶことがあり、そこがフラストレーションとなって全体のダイナミクスに影響を与えている。

Clustering and Intermittency

$R = 1.0$ の時: 要素は $R = 5.0$ の時の様なクラスターを作ることではなく、系全体に広がっている。一方で要素はクラスターを作りながら、他方各要素はできるだけ相互作用が無いような位置に並ぼうとする (図 2(c)(d))。図 2(c)(d) において要素の位置が時間方向に直線になっているところは他の要素と相互作用をしていない孤立した要素である。しかし、クラスターが間欠的にバーストを起こすのでそれが系全体に広がる (spatiotemporal intermittency)。

TYPE II

TYPE I の時と同様に $R = 1.0$ と $R = 5.0$ の時の要素の軌道を示す (図 3, 図 4)。

Clustering and Exchanging particles

$R = 5.0$ の時: 様々な形態のクラスターが形成される (図 3)。TYPE I の時に比べてクラスターは幅を持って形成される。TYPE I の時のようなクラスターが要素を交換しあうといった描像よりもむしろクラスターが生成、分裂、結合を繰り返すといったイメージに近い。各クラスターの間隔は、結合の幅 R を基準としている。倉スターの空間的な拡がりには常に振動している。クラスターのそうしたゆらぎが、例えば、隣のクラスターの力が及ぶ領域で起こると増幅され、新たなクラスターの形成へとつながる。こうしたゆらぎの増幅や通減と、クラスターの分裂、生成、結合との関係は詳しく調べられているわけではない、完全な大域的結合では見ることが出来ない現象で興味深い。

図 3(a) では大きなドメインクラスターが振動しながら小さなクラスターと共存している。小さなクラスターは大きなクラスター決して吸収されることはない。系はこの後、図のような大きなクラスターと小さなクラスターが共存している時間とほぼ等しい大きさのクラスターが共存している時間を繰り返す。

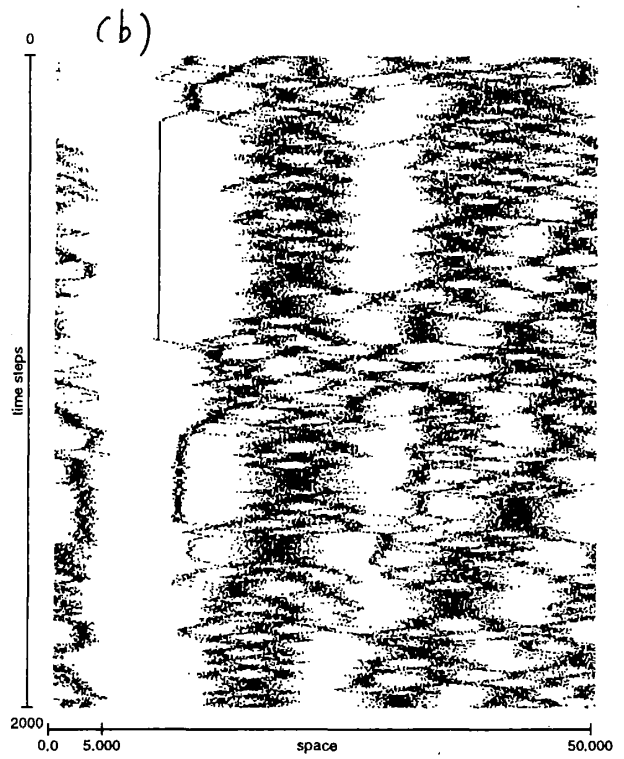
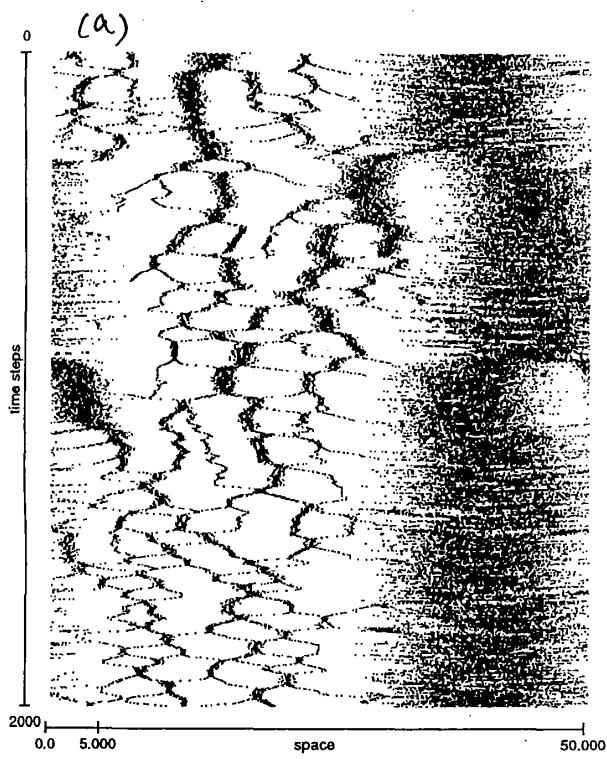
図 3(b)(c)(d) は $a = 1.85$ に固定して結合の強さ ϵ を変化させた。ほぼ等しい大きさのクラスターが分裂結合を繰り返している。

Spatiotemporal Intermittency

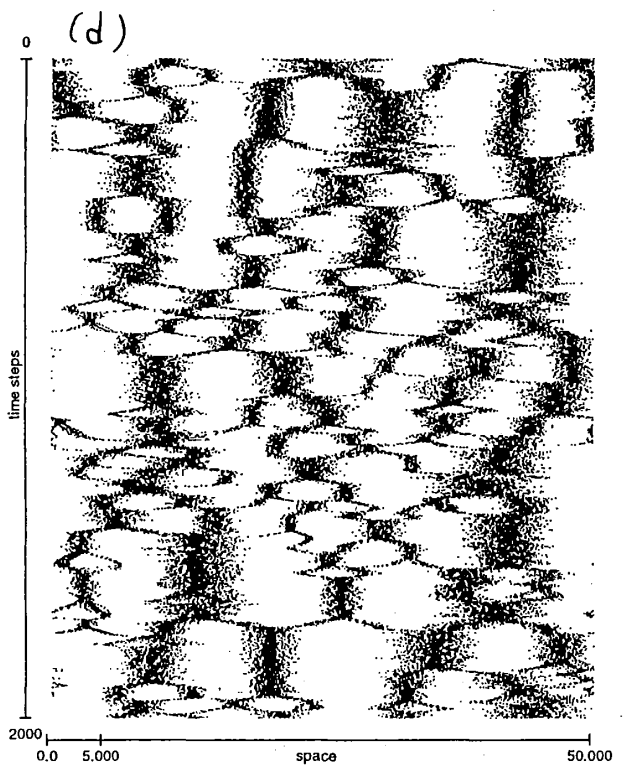
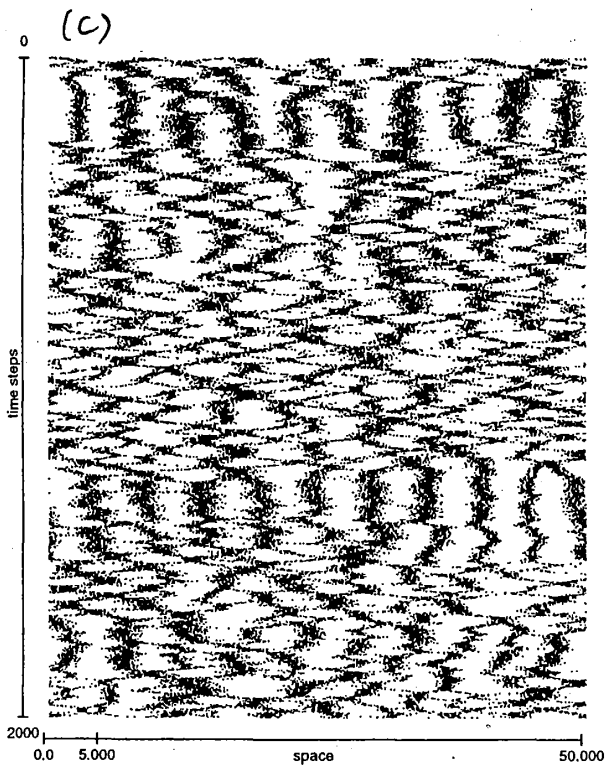
$R = 1.0$ の時: クラスターはできない (図 4)。各要素は系全体に広がってできるだけ相互作用の無い位置に並ぼうとする。しかし、結合の距離が丁度 $R = \frac{L}{N}$ であるため、全ての要素が完全に相互作用の無い位置に並ぶことはできない。

図 3: TYPE II における各要素の軌道の時間変化を描いたもの。図の説明については図 2 の説明文を参照のこと。(a) $N = 50, a = 1.65, \epsilon = 0.1, R = 5.0, C = 0.5, L = 50.0$. (b) $N = 50, a = 1.85, \epsilon = 0.12, R = 5.0, C = 0.5, L = 50.0$. (c) $N = 50, a = 1.85, \epsilon = 0.15, R = 5.0, C = 0.5, L = 50.0$. (d) $N = 50, a = 1.85, \epsilon = 0.25, R = 5.0, C = 0.5, L = 50.0$.

図 4 f: TYPE II における各要素の軌道の時間変化を描いたもの。図の説明については図 2 の説明文を参照のこと。 $R = 1.0$ (a) $N = 50, a = 1.6, \epsilon = 0.2625, C = 1.0, L = 50.0$. (b) $N = 50, a = 1.6, \epsilon = 0.31, C = 1.0, L = 50.0$. (c) $N = 50, a = 1.6, \epsilon = 0.315, C = 1.0, L = 50.0$. (d) $N = 50, a = 1.55, \epsilon = 0.5, C = 1.0, L = 50.0$.



3



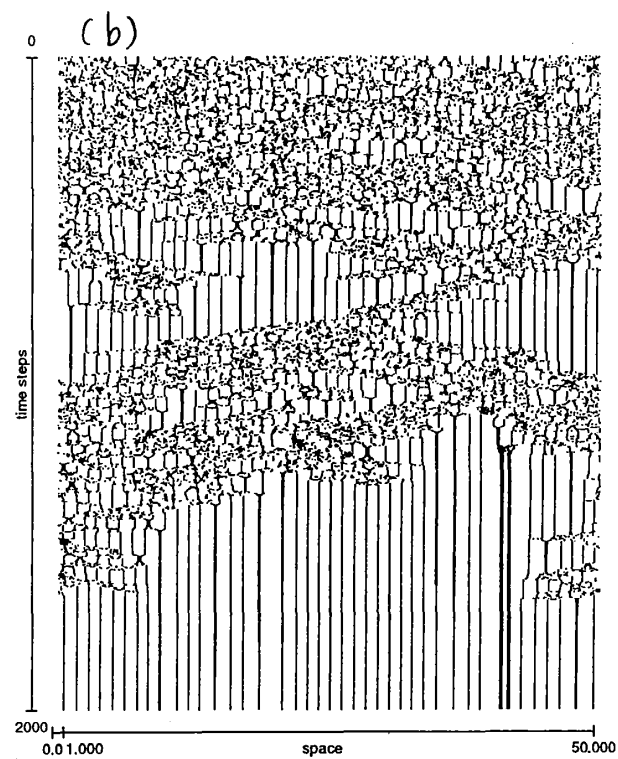
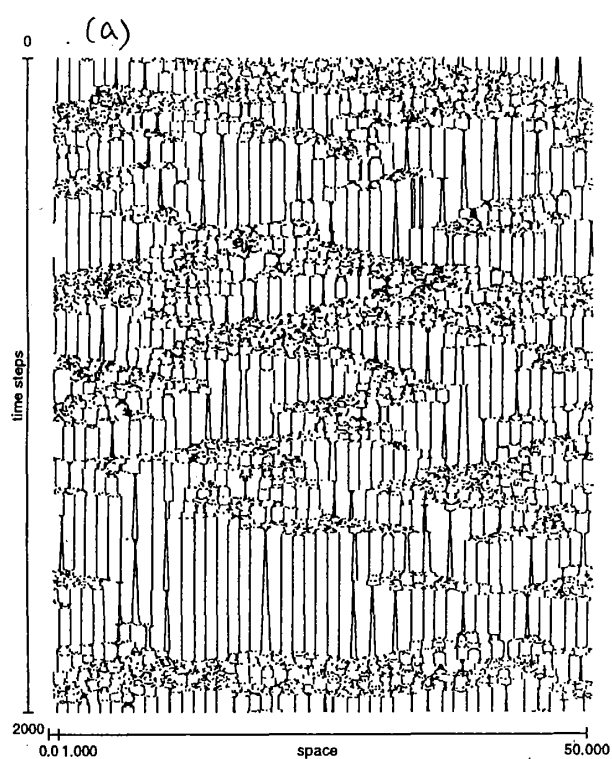


図 4

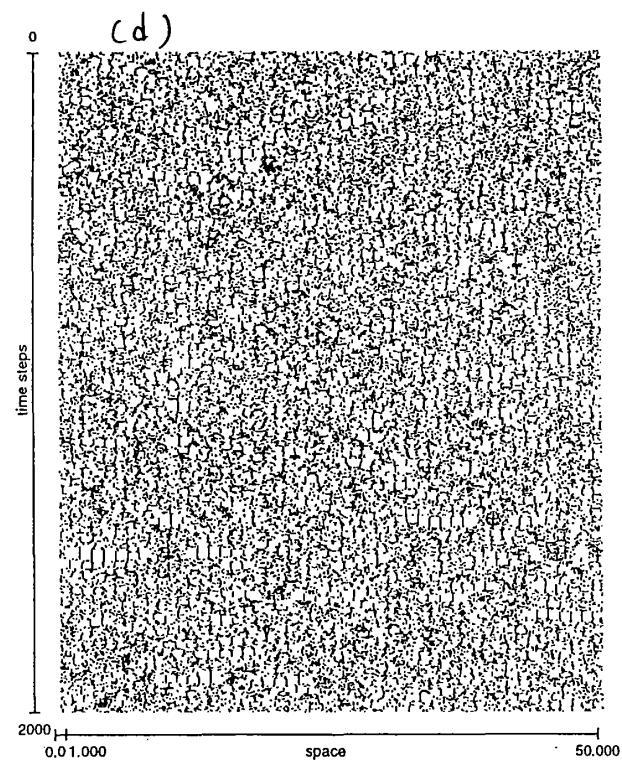
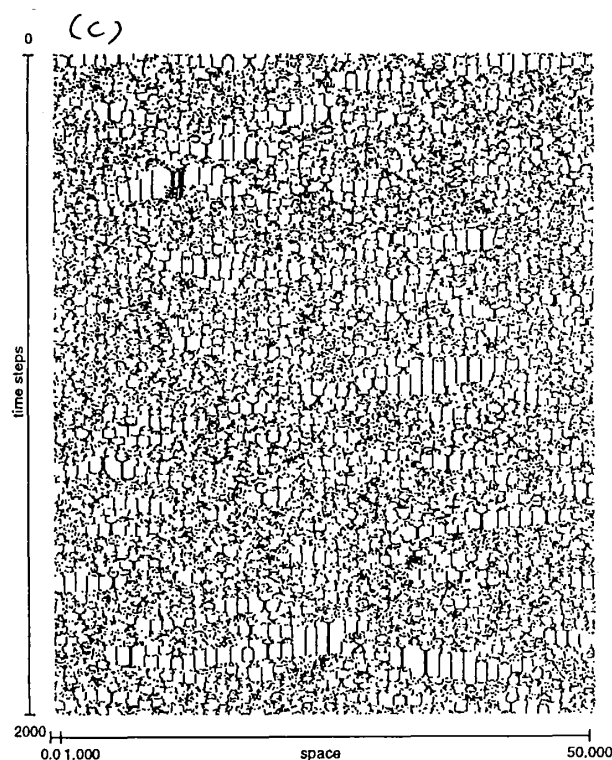


図 4 の (a)(b)(c) は非線形性の強さを表すパラメータ $a = 1.60$ に固定して結合の強さを表すパラメータ ϵ を大きくしてゆく。

図 4(a) では部分的に相互作用のない層流状態になるが他の部分でのバーストのカスケードが伝播し、乱れた状態が全体に広がってゆく。この 2 つの状態を間欠的に繰り返す (Spatiotemporal Intermittency)。

しかし、図 4(b) では Spatiotemporal Intermittency を繰り返しながら、要素は 2 ないし 4 要素間の結合を作り互いに重なることで層流状態を実現する。以後乱流状態になることはない (Laminar 相)。

図 4(c) において、さらに ϵ を大きくしてゆくと系は静的な相流状態を作り出す事が出来ず再び乱れた状態になる。この場合においても、小さな Intermittency が見られる。

また、図 4(c) では空間秩序は見られないが各要素の状態変数の間で空間的に秩序が見られる。その様子は以下の次小節で示す。

以上 $R = 1.0$ の場合について簡単な相図を図 5 に示す。 $a = 1.54..$ より小さい領域では状態変数に空間相関がある (次小節参照)。図 5 において $a = 1.54..$ に引かれた線はそれを表している。一方 $a = 1.54..$ から離れるにつれて状態変数の空間相関は消えてゆく。

$a = 1.54..$ より小さい領域: 図 5 において Pattern Selection では格子が自発的に形成され、CML のようにジグザグのパタンをつくる。 a の値が大きくなるにつれてドメインが形成される。いずれも平衡な状態ではパタンは動かない。さらに a の値が大きくなるとドメインサイズが大きくなるとともに空間上を動きはじめる。別のドメインとぶつかると 1 つのドメインになる。やがて、要素は空間上を Turbulent に動くようになる (Turbulent 1)。

$a = 1.54..$ より大きい領域: ϵ が大きくなるにしたがって、Turbulent 2 $\rightarrow$ STI 1 $\rightarrow$ laminar 2 $\rightarrow$ STI 2 $\rightarrow$ Turbulent 3 のように変化する。Turbulent な相では要素の動きには一見何ら秩序は無いように見える。STI 1, STI 2, Laminar 2 は上で述べた Spatiotemporal Intermittency 相, Laminar 相に対応する。

$a = 1.752..$ 付近に見られる Laminar 3, STI 3 の相は内部状態に空間的に一様な状態と乱れた状態を繰り返す。ロジスティックマップの周期 3 ウィンドウに対応したものである。

大域的位相秩序の形成と崩壊

TYPE II, $R = 1$ の時、パラメータによって状態変数 (位相) の秩序が形成される。その様子を調べるために時空で定義されて相互情報量 (Mutual Information) によって時空の相関をみる。空間相互情報量 $I^s(x, y)$ は以下のように定義される。

$$I^s(r) = \int du_0 du_r P_r(u_0, u_r) \log \left(\frac{P_r(u_0, u_r)}{P(u_0)P(u_r)} \right).$$

ここで、 $P_r(u_0, u_r)$ はある位置の要素が u_0 の値を取り、そこから r だけ離れた位置にある要素が u_r の値を取る確率、 $P(u)$ は、要素が u の値を取る確率を表し、それぞれ数値的に計算して求める。相関が小さい程、相互情報量の値は小さくなる。 $I \geq 0$ である。

図 5 : TYPE II $R = 1.0$ の場合の相図。STI=Spatiotemporal Intermittency. この図はパラメータを $R = 1.0, C = 1.0$ に固定して、 a, ϵ を変えた時の様子を概念的に示したものである。縦軸 ϵ , 横軸 a 。

数値計算結果は図 6 に示す。図 6(a) において相互情報量は距離が長くなるに従って減ることはなく一定値に保つ。これは状態変数が空間的に強い相関を持っていることを示している。パラメータがこの値においては、要素間の相互作用が局所的にも拘らず、大域的な秩序が形成されている。

非線形性の強さを表すパラメータ a の値いを大きくしていくと相関は消えてゆく。相関距離は結合の幅 R よりも大きいものの、徐々に短くなってゆき大域的秩序がなくなっていく様子がわかる (図 6(b)(c))。図では相互情報量は 0 より大きい値 (~ 0.001) を持っているが、これはサイズ効果と思われ、今のところ $R = 1.0$ を保ったままシステムサイズを大きくしていけば、相互情報量の値は 0 にしていくものと考えている。すなわち、この領域において大数の法則の破れは見出されていない。

4 運動量をもつ CMG

要素を“粒子”という視点から見る事が出来る。つまり、内部自由度を持った粒子が他の粒子と相互作用をしながら移動する。ただし、相互作用は位置の関数であると同時に作用する粒子の内部自由度の関数として定義されている。

各要素に運動量を導入したモデルを考える。今までの位置の移動量

$$\sum_{j \in R(i)} \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} F(u_{n+1}^i, u_{n+1}^j)$$

は、運動量の変化としてみる事が出来る。これによって、 F はランダム力として見る事が出来る。モデルは以下の通り。

$$\begin{aligned} u_{n+1}^i &= (1 - \epsilon) f(u_n^i) + \frac{\epsilon}{N_n^i} \sum_{j \in R(i)} f(u_n^j), \\ p_{n+1}^i &= \gamma p_n^i + C \sum_{j \in R(i)} \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} F(u_{n+1}^i, u_{n+1}^j), \\ x_{n+1}^i &= x_n^i + p_{n+1}^i \pmod{L}. \end{aligned}$$

p_n^i は要素 i の時刻 n での運動量。 γ は減衰の係数。

1. LogisticMap-type

$$\begin{aligned} f(u) &= 1 - au^2 \\ F(u^i, u^j) &= u^i u^j. \end{aligned}$$

2. CircleMap-type

$$\begin{aligned} f(u) &= u + w + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi u) \pmod{1} \\ F(u^i, u^j) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(u^i - u^j)\right). \end{aligned}$$

図 6: TYPE II $R=1.0$ における空間相互情報量。縦軸は相互情報量。横軸は距離。 $R = 1.0, C = 1.0$ 。(a) 大域的に相関が見られる。パラメータは図中に示したとおり。(b) 下から a の値が大きくなるに従って相関距離が短くなっていく様子がわかる。(c) 相関距離は短くなっている。この領域において大数の法則の破れのような隠れた秩序は見つかっていない。

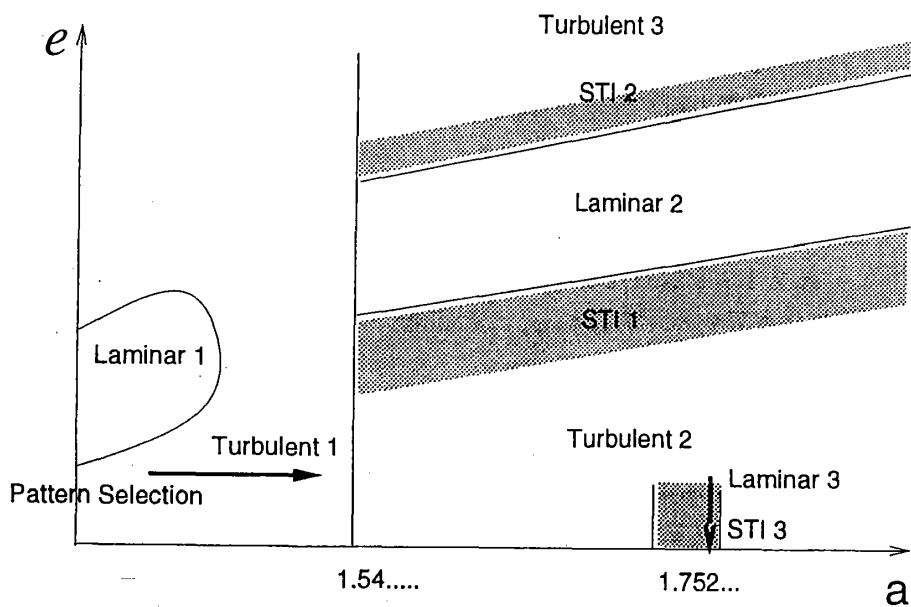


図 5

Mutaul Information

$R=1.0$ $n=100$ $L=100.0$

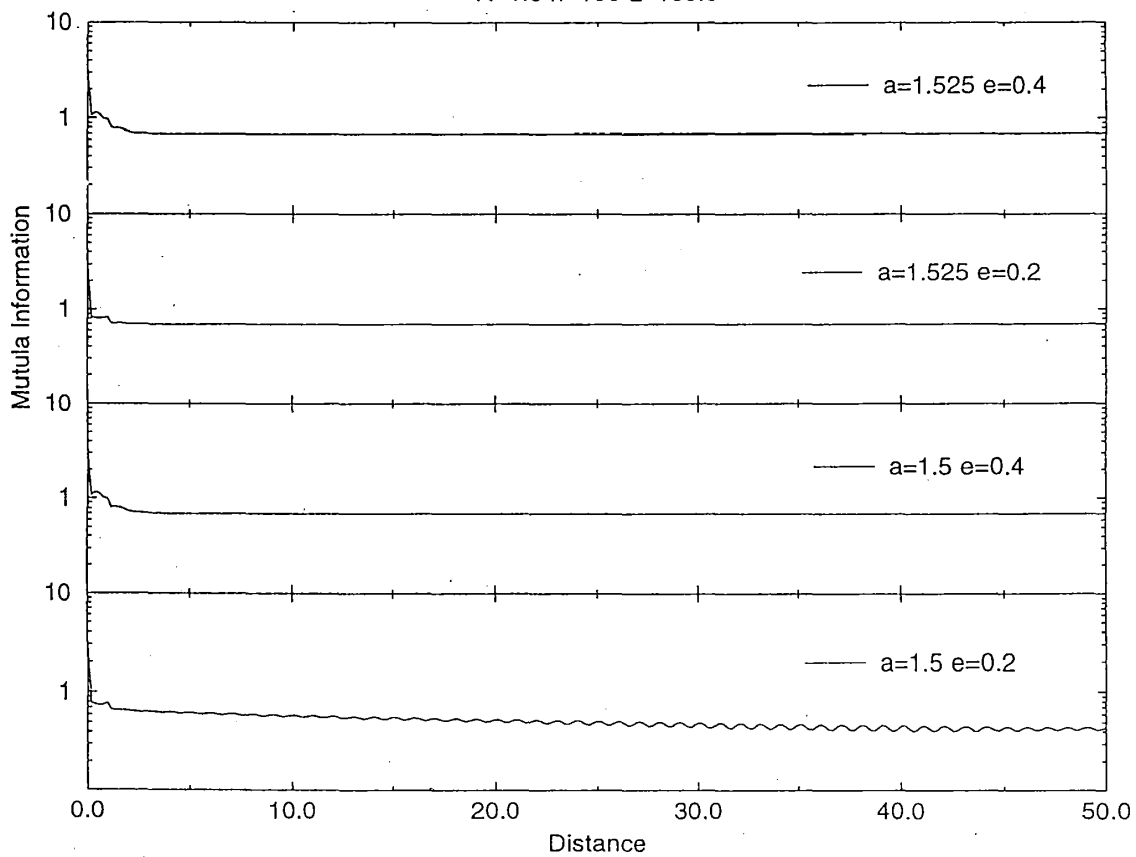


図 6 (a)

Mutual Information

R=1.0 N=100 L=100.0

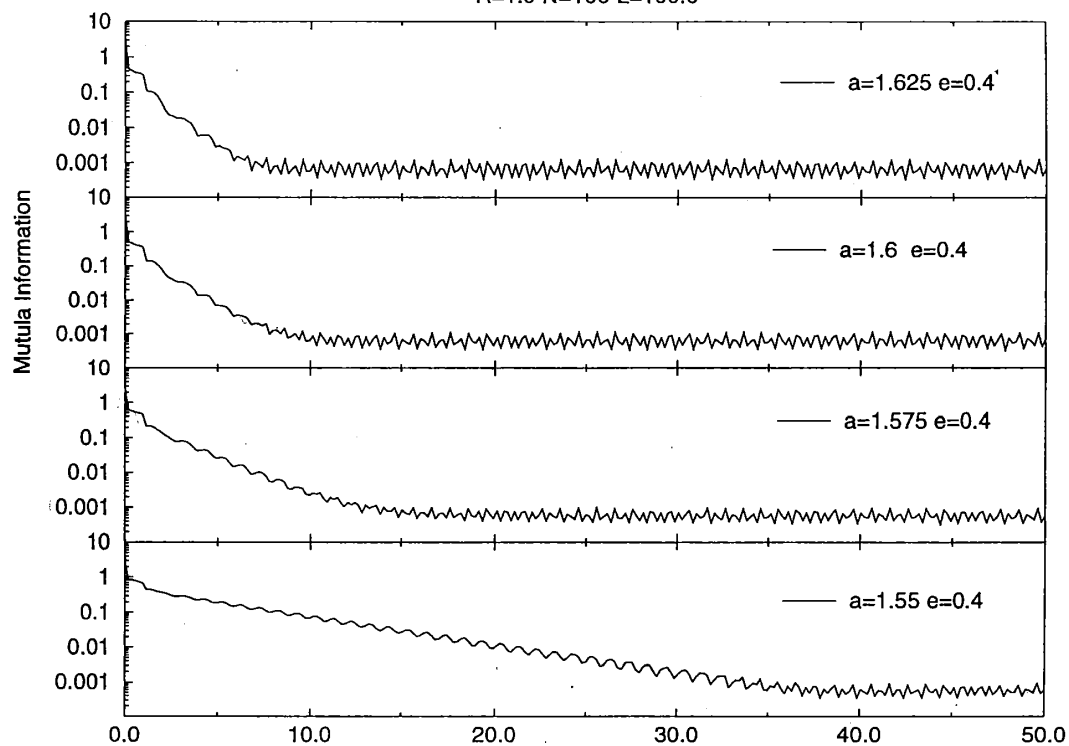


圖 6 (b)

Mutual Information

R=1.0 N=100 L=100.0

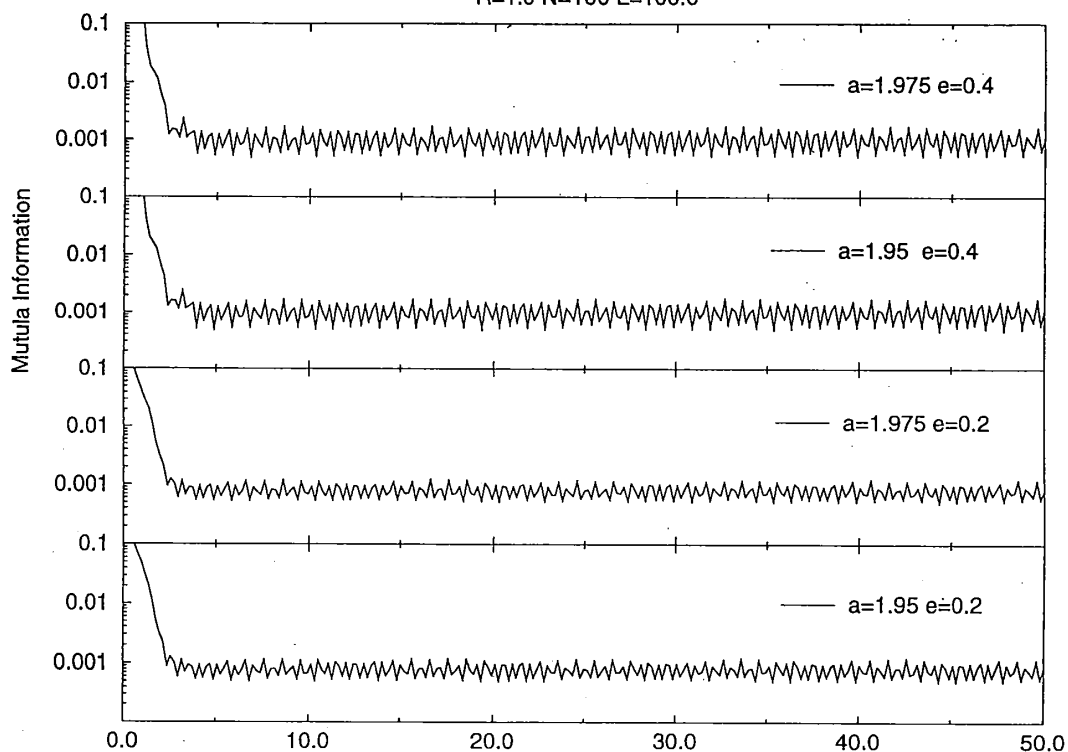


圖 6 (c)

図 7 は 上 の LogisticMap-type について、各要素の軌道の様子を示す。

運動量のないときと同様クラスターを作る。しかし、運動量のないとき比べ、各クラスター間の間隔は結合の幅 R をはるかに越えている。クラスターは生成、分裂、結合を繰り返す。周囲のクラスターから飛翔してきた要素が集まって自発的に生成されることもある。要素は運動量を持っているために結合の幅 R を越えて動くことが出来る。また、運動量を持つために 2,3 の少数の要素が近付くとクルクルと入れ替わる回転運動が見られる。

5 2 次元

上の全てのモデルについて、2 次元、3 次元への拡張は容易である。実際 2 次元の系では、クラスターのダイナミックな生成、消滅、結合、分裂が見られる。

6 むすび

TYPE II のモデルの $R = 1.0$ においては、CML の格子が崩れていき、その後の動力学は如何なるものかという、“動く Coupled Map” といった視点で見ることが出来る。このモデルを導入した当初の動機はそのようなものであった。Lattice から Gas へ!

Introduction では内部自由度を持つ要素の動力学として、あえて具体的な対象を定めず、そのような系の抽象的なモデルとして CMG を導入した。CML ないし GCM に、動的に変化する位置を導入しただけのこのモデルは、軌道図で示したとおり、パラメータによって様々な違った様子を見せる。

一体このモデルにどんな意味があるのか、具体的な対象について説明はしないが、しかし、対象となるような現象は自然に多く潜んでいる筈である。ポテンシャルの中で受動的に動く粒子の集まり、という見方だけが自然をよりよく理解する形式だとは思われない。そして、“内部自由度を持つ要素の動力学” なる新たな領域が開かれれば幸いである。

参考文献

- [1] K. Kaneko, “Simulating Physics with Coupled Map Lattice”, volume 1 of Formation, Dynamics and Statistics of Patterns. World Scientific, 1990.
- [2] K. Kaneko, Physica D 41(1990)137

図 7: 運動量を導入したモデルにおける各要素の軌道の時間変化を描いたもの。すべて、LogisticMap-type. 図の説明については図 2 の説明文を参照のこと. (a) $R = 5.0, N = 50, a = 1.6, \epsilon = 0.1, C = 0.1, L = 50.0, \gamma = 0.95$. (b) $R = 5.0, N = 50, a = 1.6, \epsilon = 0.2, C = 0.1, L = 50.0, \gamma = 0.95$. (c) $R = 5.0, N = 50, a = 1.6, \epsilon = 0.3, C = 0.1, L = 50.0, \gamma = 0.95$. (d) $R = 5.0, N = 50, a = 1.8, \epsilon = 0.3, C = 0.1, L = 50.0, \gamma = 0.95$. (e) $R = 1.0, N = 50, a = 1.8, \epsilon = 0.3, C = 0.1, L = 50.0, \gamma = 0.95$. (f) $R = 5.0, N = 50, a = 1.85, \epsilon = 0.3, C = 0.02, L = 50.0, \gamma = 0.95$.

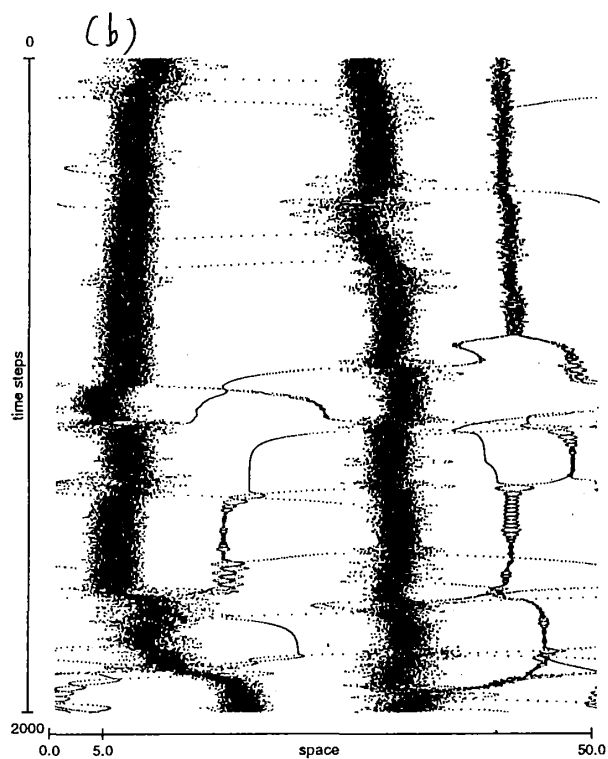
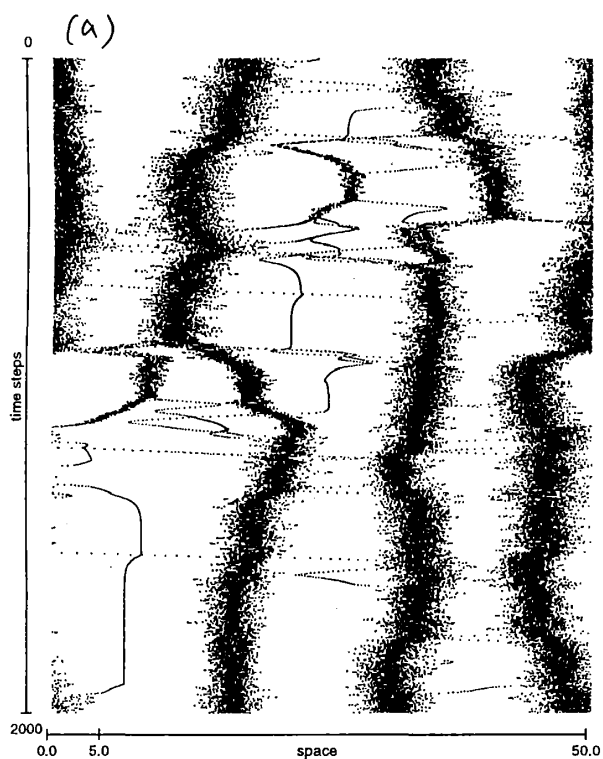
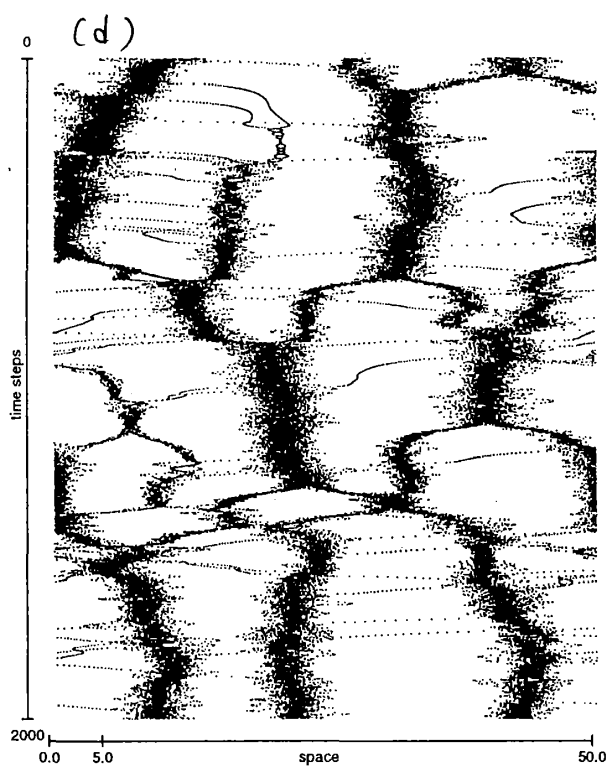
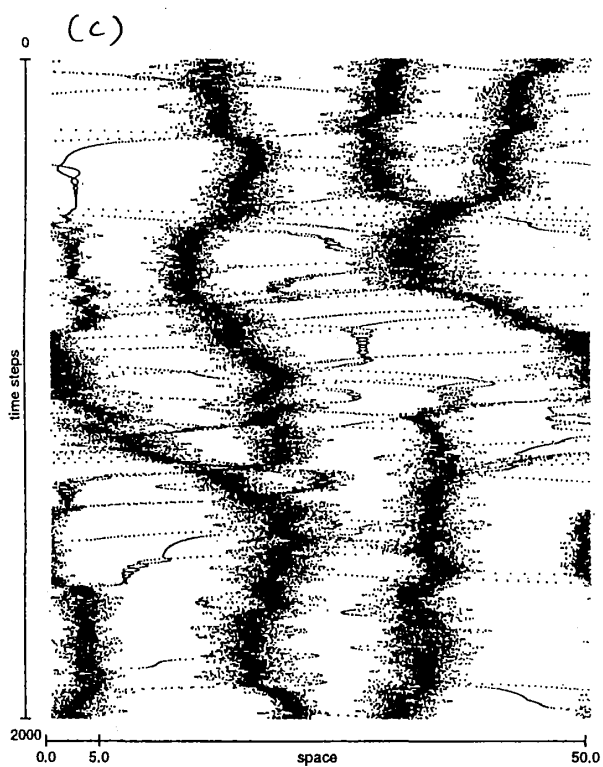


図7



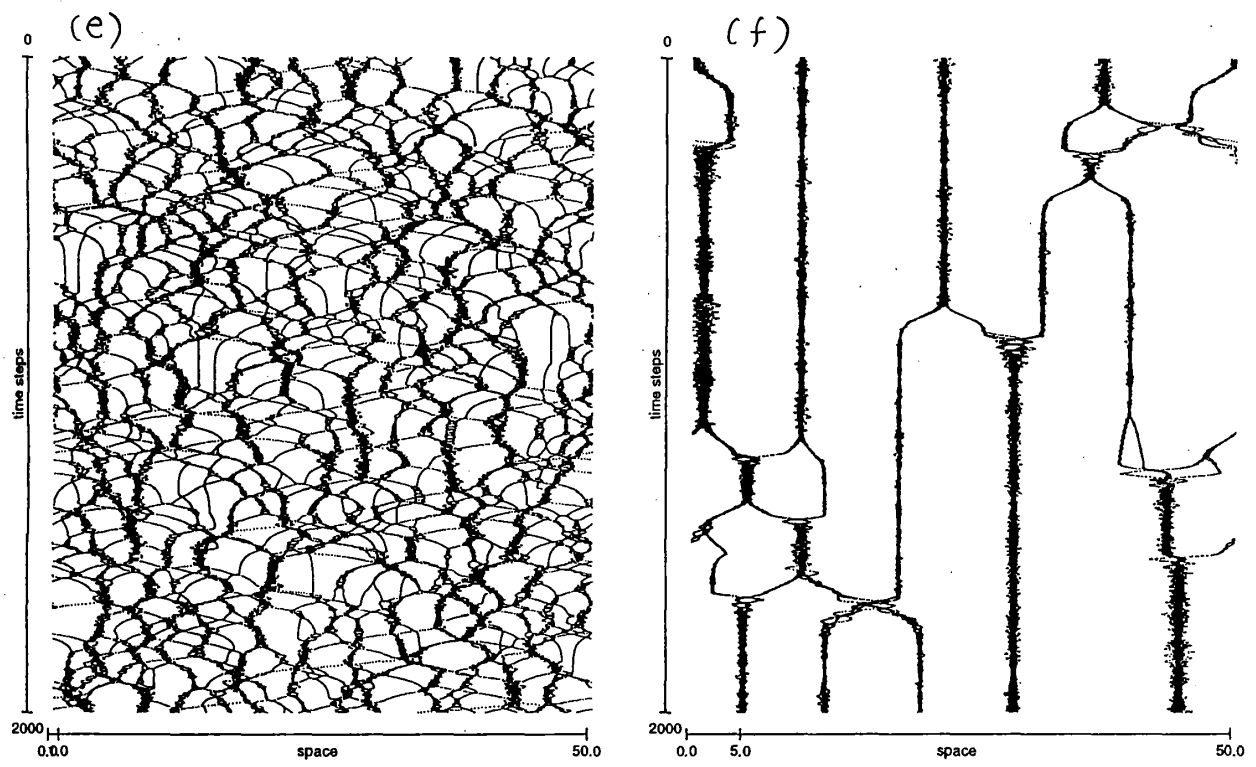


図 7