

幾何学的ローレンツアトラクタを生成する退化特異性について

Limburgs Univ. F. デュモルティエ (F. Dumortier)

京大理 国府寛司 (Hiroshi Kokubu)

龍谷大理工 岡宏枝 (Hiroe Oka)

ベクトル場の非双曲型平衡点を退化特異性と呼ぶ。退化特異性からはその退化の度合いに応じて様々な力学系的挙動が分岐する。たとえば Hopf 分岐により周期軌道が、Bogdanov-Takens 分岐により homoclinic 軌道が出現する。また不変トーラスやカオスの軌道が分岐することも知られるようになった。ここでは更に複雑なものとしていわゆる幾何学的ローレンツアトラクタが退化特異性から出現することを示す。

定理

$$3\text{-jet} \quad y \frac{\partial}{\partial x} - x^3 \frac{\partial}{\partial y} + x^2 \frac{\partial}{\partial z}$$

で与えられる R^3 上のベクトル場の退化特異性の開折で幾何学的ローレンツアトラクタを持つものが存在する。

この特異性は[Ushiki-Oka-Kokubu]でローレンツ方程式との関係が示唆された。

幾何学的ローレンツアトラクタを含む開折としては次のものがとれる。

$$(U) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 + Ay + Bxz + Cyz \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases} + O(4)$$

ここで α, γ, A, B, C はパラメータである。

(証明の概要)

(1) Rychlikの定理

上の定理の証明に次のRychlikの定理を用いる。この定理はある種のhomoclinic分岐において幾何学的ローレンツアトラクタが出現することを示している。

定理(Rychlik)

次を満たす R^3 上の(ローレンツ方程式と同じ対称性を持つ) ベクトル場を考える。

1) 1組の対称なcritically-twisted homoclinic loopを持つ。

2) homoclinic loopに対応した固定点での3つの固有値 $\lambda_{ss}, \lambda_s, \lambda_u$ が

$$0 < \frac{1}{2}\lambda_u < -\lambda_s < \lambda_u < -\lambda_{ss} \text{ 。$$

このベクトル場のgenericな2-パラメータの開折は幾何学的ローレンツアトラクタを持つ。

(2) 開折のblowing up

開折(U)を次のようにスケール変換する。

$$\begin{cases} x = r\bar{x}, & y = r^2\bar{y}, & z = r\bar{z} \\ \alpha = r^2\bar{\alpha}, & \gamma = r\bar{\gamma} \\ A = r\bar{A}, & B = r\bar{B}, & C = r^0\bar{C} \\ t = r^{-1}\bar{t} \end{cases}$$

新しい変数で(U)は（但し、 $\bar{\cdot}$ は省略して）

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 + Ay + Bxz + Cyz \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases} + O(r)$$

となる。 $r=0$ としたものがlimit system(L)である。

$$(L) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 + Ay + Bxz + Cyz \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases}$$

3) critically-twisted homoclinic loopの存在について

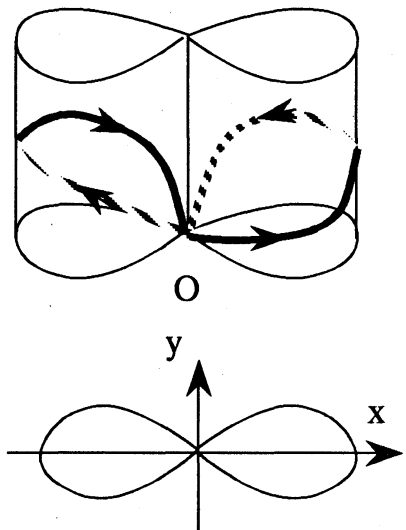
パラメータについて次のように仮定する。

$$0 < \frac{\sqrt{\alpha}}{2} < -\gamma < \sqrt{\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

A, B, C : small

$A = B = C = 0$ のとき、(L)は

$$(R) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases}$$



となり、1組のcritically-twisted homoclinic loopを持つことが容易にわかる。

(R)に対するRychlikの定理の固有値についての条件は

$$0 < \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \frac{1}{2}\lambda_u < -\lambda_s = -\gamma < \lambda_u = -\lambda_{ss} = \sqrt{\alpha}$$

であるから満たされていない。そこで (A, B, C) を $(0, 0, 0)$ から critically-twisted homoclinic loop をたもちつつ動かして、固有値の条件を満たすようにする。

4) Melnikov型積分の方法

critically-twisted homoclinic loopの存続に関して次が成り立つ。

命題 (R)の任意の摂動系

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases} + f(x, y, z, \mu) \quad \mu \in R^k \ (k \geq 3)$$

に対し、次の2つのベクトル

$$M_H = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}(t) \frac{\partial f}{\partial \mu}(h(t), 0) dt, \quad M_c = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}(t) \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(h(t), 0) e(t) dt$$

が1次独立であれば、上の摂動系は、 $\mu = 0$ において M_H, M_c に直交する μ -空間のcurveにそって、critically-twisted homoclinic loopを持つ。

但し、 $h(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $e(t) = (0, 0, e^{\gamma t})$, $\hat{b}(t) = (\dot{y}(t), \dot{x}(t), 0)$ である。

5) Complition of the proof

limit system(L) については、

$$M_H = (m_A, m_B, m_C) = - \int_{-\infty}^{\infty} (y(t)^2, x(t)y(t)z(t), y(t)^2 z(t)) dt$$

$$M_C = (0, n_B, n_C) = - \int_{-\infty}^{\infty} (0, x(t)y(t)e^{\gamma t}, y(t)^2 e^{\gamma t}) dt$$

となる。 $m_A \neq 0$, $n_C \neq 0$ であることから、 M_H, M_C は 1 次独立である。更に $(A, B, C) = (0, 0, 0)$ における曲線 C の接線方向 (d_A, d_B, d_C) は

$$d_A = m_B n_C - m_C n_B, \quad d_B = -m_A n_C, \quad d_C = m_A n_B$$

で与えられる、

補題

$$d_A \neq 0$$

が成り立つことから、曲線 C に沿って、 $A < 0$ とでき、(L) のにおける線形部分は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & A & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

であるから、このとき固有値の条件

も満たされることがわかる。

参考文献

Rychlik Lorenz attractors through Silnikov-type bifurcation. Part I,
Erg.Th.and Dynam. Sys. 10(1989),793-821

Ushiki, Oka and Kokubu Existence d'attracteurs étranges dans le
déploiement d'une singularité d'un champ de vecteurs invariant
par translation, Comptes Rendus l'Académie des Sciences,
Paris, t. 298, Serie I, no 3, 1984, pp. 39-42