

L J に CDN-公理を追加してできる中間論理について

東京理科大学理工学部 佐々木克巳 (Katsumi SASAKI)

CDN-論理式とはただか $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\neg$ の三種類の論理記号だけから成る命題論理の論理式をいう (cf. Hosoi and Ono[1])。直観主義命題論理 L J にこの CDN-論理式を追加してできる中間命題論理に対して、次のことがわかった。

定理 1 L J に CDN-公理を追加してできる中間命題論理の総数は加算無限個であり、それらは集合の包含関係に関して一列に並んでいる。

この定理 1 を証明するために、まず中間論理の列 $L Q_n$ を定義する。

定義2 最小元と n 個の極大元を持つ有限 Kripke model
の集合を M_n とし、

$$LQ_0 = LK,$$

$$LQ_n = \bigcap_{M \in M_n} L(M),$$

$$LQ_\omega = LJ$$

とする。さらに、便宜上、論理式全体から成る論理を LQ_{-1}
とする。

LQ_n の定義から

$$LQ_0 \supseteq LQ_1 \supseteq \dots \supseteq LQ_n \supseteq \dots \supseteq LQ_\omega$$

である。

次に、上の LQ_n を CDN-公理によって公理化する。定義から

$$LQ_0 = LJ + a \vee \neg a$$

である。 $n=1, 2, \dots$ については次のように公理を与える。異なる
命題変数の列

$$a_1, a_2, \dots$$

を用意する。

$$C(m) = \{B_1 \wedge \dots \wedge B_m \mid B_i \in \{a_i, \neg a_i\}\}$$

とし、 $k=1, \dots, 2^m$ に対し、

$$D_k(m) = \{\neg C_1 \vee \dots \vee \neg C_k \mid C_i \in C(m),$$

$$i \neq j \text{ のとき } C_i \neq C_j\}$$

とする。

補題 3 ([2]) $k \geq 1$ のとき、任意の論理式 $A \in D_{k+1}(m)$

$(k+1 \leq 2^m)$ に対し、

$$LQ_k = LJ + A。$$

一方、

$$C^*(m) = \{a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$$

$$D^*(m) = \{C_1 \vee \dots \vee C_k \mid C_i \in C(m),$$

$$i \neq j \text{ のとき } C_i \neq C_j\}$$

とする。

補題 4 A は

$$a_1, \dots, a_m$$

以外の命題変数を含まないCDN-論理式とする。このとき、次の2つの条件(1)と(2)を両方とも満足するような論理式の列

$$A_1, \dots, A_s$$

が存在する：

(1) $A \equiv A_1 \vee \dots \vee A_s \in L, J$ (ここで、 $A \equiv B$ は

$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ の省略形である。)、

(2) $A_i \in \{B, B \wedge \neg C, \neg C \mid B \in C^*(m), C \in D^*(m)\}$ 。

証明 A に含まれる論理記号の数 n についての帰納法で証明する。

$n=0$ のときは自明である。

$n>0$ のとき、論理記号の数が n より小さく

$$a_1, \dots, a_m$$

以外の命題変数を含まない論理式 A' に対して、次の2つの条件(1)'と(2)'を両方とも満足するような論理式の列

$$A'_1, \dots, A'_s$$

が存在すると仮定する：

(1)' $A' \equiv A'_1 \vee \dots \vee A'_s \in L, J$

(2)' $A'_i \in \{B, B \wedge \neg C, \neg C \mid B \in C^*(m), C \in D^*(m)\}$ 。

A の一番外側の論理記号の種類によって場合分けする。

i) $A = \neg B$ のとき : ある論理式 $B' \in D^*(m)$ が存在して、

$$\neg B \equiv \neg B' \in LJ。$$

ii) $A = B \wedge C$ のとき : 帰納法の仮定より、集合

$$\{B, B \wedge \neg C, \neg C \mid B \in C^*(m), C \in D^*(m)\}$$

の元

$$B_1, \dots, B_i, C_1, \dots, C_j$$

が存在して、

$$B \equiv B_1 \vee \dots \vee B_i \in LJ、$$

$$C \equiv C_1 \vee \dots \vee C_j \in LJ。$$

よって、

$$A \equiv (B_1 \wedge C_1) \vee (B_1 \wedge C_2) \vee \dots \vee (B_i \wedge C_j)。$$

$\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(P \vee Q) \in LJ$ より補題が示される。

iii) $A = B \vee C$ のとき : 帰納法の仮定より自明である。

補題 5 A は任意の CDN-論理式とする。このとき

$$A \notin LQ_{n+1} \text{ ならば } LJ + A \supseteq LQ_n \text{ である。}$$

証明 A は

$$a_1, \dots, a_m$$

以外の命題変数を含まないとし、さらに A の形は

$$A_1 \vee \dots \vee A_s \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_t$$

$(A_i \in \{B, B \wedge \neg C \mid B \in C^*(m), C \in D^*(m)\},$

$B_i \in D^*(m), s+t \geq 1)$

としても一般性は失わない。

i) $t=0$ のとき: A に含まれるすべての命題変数に $a \wedge \neg a$ を代入してできる論理式を A' とすると

$$A' \rightarrow a \wedge \neg a \in LJ。$$

よって、 $LJ + A$ は $LQ_{\neg}$ である。

ii) $t > 0$ のとき: $A \notin LQ_{n+1}$ より、ある Kripke model $M \in M_{n+1}$ が存在して

$$A \notin L(M)$$

である。 M の極大元を $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ 、最小元を β とすると、ある付値 W が存在して、

$$W(A, \beta) = f。$$

故に、

$$W(\neg B_i, \beta) = f \quad (i=1, \dots, t)。$$

よって、ある α_j が存在して、

$$W(\neg B_i, \alpha_j) = f。$$

このような j の最小を $f(i)$ とする。

$$W(B_i, \alpha_{f(i)}) = t \cdots (*)$$

一方、各 α_j に対して、唯一の $C_j \in C(m)$ が存在して、

$$W(C_j, \alpha_j) = t。$$

$$C_j = C_{j,1} \wedge \dots \wedge C_{j,m}$$

とする。 $(*)$ より、ある $B_i^* \in D^*(m) \cup \{a \wedge \neg a\}$ が存在して、

$$B_i \equiv C_{f(i)} \vee B_i^* \in L_J。$$

よって、

$$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_t$$

$$\equiv (\neg C_{f(1)} \wedge \neg B_1^*) \vee \dots \vee (\neg C_{f(t)} \wedge \neg B_t^*) \in L_J。$$

さらに、2つの場合に分ける。

ii-i) $f(1) = \dots = f(t)$ のとき：

$$A \equiv A_1 \vee \dots \vee A_s \vee (\neg C_{f(1)} \wedge (\neg B_1^* \vee \dots \vee \neg B_t^*))$$

$$\in L_J$$

だから、 A の中に各 a_i に対して、 $C_{f(i),i}$ を代入してできる論理式を A' とし、さらに、 A' のすべての命題変数に a を代入してできる論理式を A'' とすると、

$$A'' \rightarrow a \vee \neg a \in L_J。$$

よって、 $LJ + A \supseteq LQ_0$ 。

ii-ii) $f(i) \neq f(j)$ を満たす (i, j) が存在するとき：

集合 $\{a_1, \dots, a_m\}$ を次のように S_1, S_2, S_3 に分ける。

$C_{f(1), i} = \dots = C_{f(t), i} = \neg a_i$ のとき $a_1 \in S_1$ 、

$C_{f(1), i} = \dots = C_{f(t), i} = a_i$ のとき $a_2 \in S_2$ 、

$\{a_1, \dots, a_m\} - S_1 - S_2 = S_3$ 。

論理式 C^* を次のように決める。

$$C^*_{f(i)} = \bigwedge_{j \in S_3} C_{f(i), j} \text{、}$$

$$C^* = \neg C^*_{f(1)} \vee \dots \vee \neg C^*_{f(t)}$$

A に含まれる S_1 の元に $a \wedge \neg a$ 、 S_2 の元に C^* を代入してできる論理式を A' とすると

$$A' \rightarrow C^* \in LJ。$$

$\{1, \dots, n+1\} \supseteq \{f(1), \dots, f(t)\}$ と補題4より、 C^* は $LQ_{n'}$ ($n' \leq n$) の公理になっている。故に、

$$LJ + A \supseteq LQ_n。$$

補題6 A は任意の CDN-論理式とする。このとき

$A \notin LQ_{n+1}$ ならば

$$LJ + A \in \{LQ_k \mid k = -1, 0, \dots, n\}。$$

証明 n についての帰納法で証明する。

$n=0$ のとき：補題 5 より $LJ + A \supseteq LQ_0$ だから $LJ + A$ は LQ_0 または LQ_{-1} を表す。

$n>0$ のとき： n より小さい n' に対して、

$A \not\vdash LQ_{n'+1}$ ならば

$$LJ + A \in \{LQ_k \mid k=-1, 0, \dots, n'\}$$

が成り立つと仮定する。補題 5 より

$$LJ + A \supseteq LQ_n$$

である。 $LJ + A = LQ_n$ のとき、補題は成り立つ。

$LJ + A \supsetneq LQ_n$ のとき、 $A \not\vdash LQ_n$ だから帰納法の仮定より

$LJ + A \in \{LQ_k \mid k=-1, 0, \dots, n\}$ である。

補題 7

$\{L \mid L = LJ + A, A \text{ は CDN-公理}\}$

$$= \{LQ_n \mid n=-1, 0, \dots, \omega\}$$

証明 A があらゆる有限 Kripke model で valid であるとき $LJ + A = LJ$ である。 $A \not\vdash L(M)$ をみたす有限 Kripke model M が存在するとき補題 6 より示される。

$$LQ_0 \supseteq LQ_1 \supseteq \dots \supseteq LQ_n \supseteq \dots \supseteq LQ_\omega$$

と補題 7 から定理 1 が証明される。

参考文献

- [1] T. Hosoi and H. Ono: Intermediate propositional logics (A survey), J. Tsuda College, 5 (1973), 67-82.
- [2] K. Sasaki: Axiomatization of the intersection of Kripke models with finite maximals, to appear.