

乱れたプラズマの線型応答理論

九大教養 南 部 充 宏

§ 1. 序 論

プラズマ物理に於ける乱流理論には、従来種々の試みがあり、それらは成書の形でまとめられている。¹⁾ ここではそれらの理論が静かなプラズマから出発して、ある一つの定常状態に移行するまでを問題としている事実を指摘したい。例えばビームを打ち込んで、ある種の非線形効果により、定常状態に達するまでの現象を調べる事がこれに当てはまる。しかしながら現実のプラズマで重要なのは、先の研究ではないだろうか。すなわち、仮の定常状態と別の定常状態の間の移行に伴って種々の乱流現象が観測されているのではないだろうか。この事実は特にタイムスケールの長い天体プラズマに於て重要になる。²⁾ いずれにしても、この種の理論では、初期値問題は有効でなく別の方法を見つける必要があると思われる。ここでは最近筆者が試みている方法の概要について述べて見よう。

§ 2. 熱平衡からはずれた定常状態の決定

今、従来の乱流理論で研究されている様にプラズマ中にラングミュアー波動（プラズマ振動）が定常的な流れとして実現されている場合を考える。プラズマ振動の振巾を E_H とする。外磁場の存在しないブラゾフプラズマを仮定する。電子分布函数は、定常的な乱れの場合を支える為に次の2つの部分から成る。

$$F_0 = f_0 + f_1, \quad (1)$$

ここで f_0 は、時空平均化された部分、 f_1 は乱れの場合 (E_H) を支える無摂動分布函数である。この場合の基礎方程式は下記になる。

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \cdot \nabla f_1 = \frac{e}{m} E_H \cdot \frac{\partial}{\partial v} E_H \cdot \frac{\partial}{\partial v} (f_0 + f_1) \quad (2)$$

式 (2) を厳密に解くのは難かしいが、ここで線形近似を仮定（唯一の仮定になる）す

ると f_1 のフーリエ成分は

$$f_1(K, \Omega) = \frac{e}{m} \frac{E_H \frac{\partial}{\partial v} f_0}{-i(\Omega - Kv)} , \quad (3)$$

ここで (K, Ω) はプラズマ振動の波数，周波数である。従って我々は，非平衡定常状態を一応決定した事になる。従って次に問題とすべき事は，この定常状態の安定性の理論を創る事である。

§ 3. 乱れたプラズマの線型応答理論³⁾

文献(3)に従って，外部から無限小振巾のイオン波の摂動を与えて見よう。するとプラズマの非線形結合によりプラズマ波の摂動も発生するから(最低次は decay 相互作用)，無限小振巾の電場は次の様にかかる事になる。

$$\delta E = \delta E_L + \delta E_H , \quad (4)$$

ここで δE_L はイオン波， δE_H はプラズマ波を表わしている。

同様の表現で電子分布の摂動部分は

$$\delta f = \delta f_L + \delta f_H , \quad (5)$$

となる。

さて我々の場合 $E_H \gg \delta E$ であるから，乱れたプラズマからの応答を記述する方程式は次の如くなる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f + v \nabla \delta f = \frac{e}{m} E_H \frac{\partial}{\partial v} \delta f + \frac{e}{m} \delta E \frac{\partial}{\partial v} (f_0 + f_1) , \quad (6)$$

我々の目的は(6)式から δf_L と δf_H の従う基礎方程式を導出する事である。さて系の中に2つのタイムスケールがあるので，いわゆる準線形近似の手法を用いると δf_L の従う式は次式になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta f_L + v \nabla \delta f_L &= \frac{e}{m} \langle E_H \frac{\partial}{\partial v} \delta f_H \rangle \\ &+ \frac{e}{m} \delta E_L \frac{\partial}{\partial v} f_0 + \frac{e}{m} \langle \delta E_H \frac{\partial}{\partial v} f_1 \rangle , \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\langle \quad \rangle$ は時間平均を示す。

原式との差を取りモード間結合を無視すると δf_H の従う式として我々は次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f_H + v \nabla \delta f_H = \frac{e}{m} E_H \frac{\partial}{\partial v} \delta f_L + \frac{e}{m} \delta E_L \frac{\partial}{\partial v} + \frac{e}{m} \delta E_H \frac{\partial}{\partial v} f_0, \quad (8)$$

(7), (8) 式が我々の基礎方程式になる。ここで δf_L と δf_H がカップルしている事に注意したい。

両式を夫々フーリエ分解してポアソン方程式に代入すると、イオン波の誘電率として

$$\begin{aligned} \epsilon_L(k, \omega) = & 1 - \left(\frac{\omega_{pi}}{k} \right)^2 \int \frac{k \frac{\partial}{\partial v} f_i}{\omega - kv} dv - \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \int \mathcal{L}_{k, \omega}^{-1} k \frac{\partial}{\partial v} f_0 dv \\ & + \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \sum_{\Omega} [\mathcal{L}_{k, \omega}^{-1} \times E_H(K, \Omega) \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{[\omega - \Omega - (k-K)v]} \\ & \times k \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_H(-K, -\Omega)}{[Kv - \Omega]} \frac{\partial}{\partial v} f_0] dv, \end{aligned} \quad (9)$$

ここでオペレーター $\mathcal{L}_{k, \omega}$ は次式で定義される。

$$\mathcal{L}_{k, \omega} = \omega - kv + \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_{\Omega} \frac{\partial}{\partial v} \frac{|E_H(K, \Omega)|^2}{\omega - \Omega - (k-K)v} \frac{\partial}{\partial v}, \quad (10)$$

(k, ω) は夫々イオン波の波数、振動数を示している。

f_i はイオン分布函数、 ω_{pe} , ω_{pi} は夫々電子及びイオンのプラズマ振動数を表現する。

式(10)の最後の項は、電子とイオン波の相互作用は線形のそれとは異っているという事実を示している。この部分は、電子軌道がプラズマ波乱流の作るポンダラモーチヴカによってゆがめられているという事実を示している。この部分を作る項の虚部からはイオン波の安定性を支配する新しい効果があらわれる。そこで以下でそれについて述べよう。

§ 4. 定常状態の安定性

イオン波の誘電率(9)は近似的に下記のように2つの部分に分解して見ると判り易い。

$$\epsilon_L(k, \omega) = \epsilon_O(k, \omega) + \epsilon_N(k, \omega), \quad (11)$$

ここで ϵ_O は静かなプラズマからの線形応答を示し, ϵ_N は乱れたプラズマからのそれ
を示す。

$$\epsilon_O(k, \omega) = 1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \int \frac{k \frac{\partial}{\partial v} f_0}{\omega - kv} dv - \left(\frac{\omega_{pi}}{k} \right)^2 \int \frac{k \frac{\partial}{\partial v} f_i}{\omega - kv} dv \quad (12)$$

並びに

$$\begin{aligned} \epsilon_N(k, \omega) = & \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \frac{1}{(\omega - kv)} \times \left\{ \sum_{\Omega} \frac{\partial}{\partial v} |E_H(K, \Omega)|^2 \right. \\ & \times \frac{1}{\omega - \Omega - (k - K)v} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{(\omega - kv)} k \frac{\partial}{\partial v} f_0 \left. \right\} dv \\ & + \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \frac{1}{(\omega - kv)} \left\{ \sum_{\Omega} \frac{\partial}{\partial v} |E_H(K, \Omega)|^2 \right. \\ & \times \frac{1}{\omega - \Omega - (k - K)v} \times \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{Kv - \Omega} k \frac{\partial}{\partial v} f_0 \left. \right\} dv, \end{aligned} \quad (13)$$

ここで ϵ_N はポンダラモーティブカによる電子軌道の変化を表現している。

次に ϵ_N を変形すると, 最低次として下記の様な Fokker-Planck 型の衝突項を得る。

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \frac{k^2}{(\omega - kv)^4} \sum_{\Omega} \frac{|E_H|^2}{(Kv - \Omega)} \times \left(1 - \frac{3k}{K} \right) k \frac{\partial}{\partial v} f_0 dv \\ & - \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int \frac{k}{(\omega - kv)^3} \sum_{\Omega} \frac{|E_H|^2}{(Kv - \Omega)} \times k \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_0 dv. \end{aligned} \quad (14)$$

もしも f_0 と f_i に夫々マックスウェル分布を仮定すると, イオン波の成長率は次の様
にかける。

$$r = r_0 + r_N, \quad (15)$$

ここで r_0 はランダウ減衰を示し

$$r_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_k^3}{k^3 \omega_{pi}^2} \left\{ \frac{k_e^2 \omega_k}{(T_e/m)^{1/2}} + \frac{k_i^2 \omega_k}{(T_i/M)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\omega_k^2}{2k^2 T_i/M}\right) \right\} < 0, \quad (16)$$

一方 r_N はプラズマ波乱流からイオン波へのエネルギーの流れを示し、

$$r_N = \frac{|\omega_k|^3}{\omega_{pi}^2} \pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{k}\right)^2 \left(\frac{m}{T_e}\right) \left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{1/2} \times \\ \sum_{\Omega} \left(\frac{K}{\Omega}\right)^3 \frac{|E_H|^2}{kK} \left\{ \frac{m}{T_e} \left(\frac{\Omega}{K}\right)^2 + \frac{3k}{K} \right\} \times \exp\left[-\frac{m}{2T_e} \left(\frac{\Omega}{K}\right)^2\right] > 0, \quad (17)$$

但し $\omega_k = \pm (T_e/M)^{1/2} k$, k_i と k_e は夫々イオンと電子のデバイ波数を示し, T_e と T_i は夫々電子とイオンの温度を表している。又 m , M は夫々の質量を示している。

$r_N > 0$ に注目すると、我々はプラズマ波からのエネルギー流入とイオンのランダウ減衰の効果により (15) 式を零と置けば乱れの定常状態を決める事ができ、それに必要な条件は

$$\frac{\sum_{\Omega} |E_H|^2}{4\pi N \kappa T_e} = 1.5 \times \left(\frac{k}{k_e}\right) \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}\right), \quad (18)$$

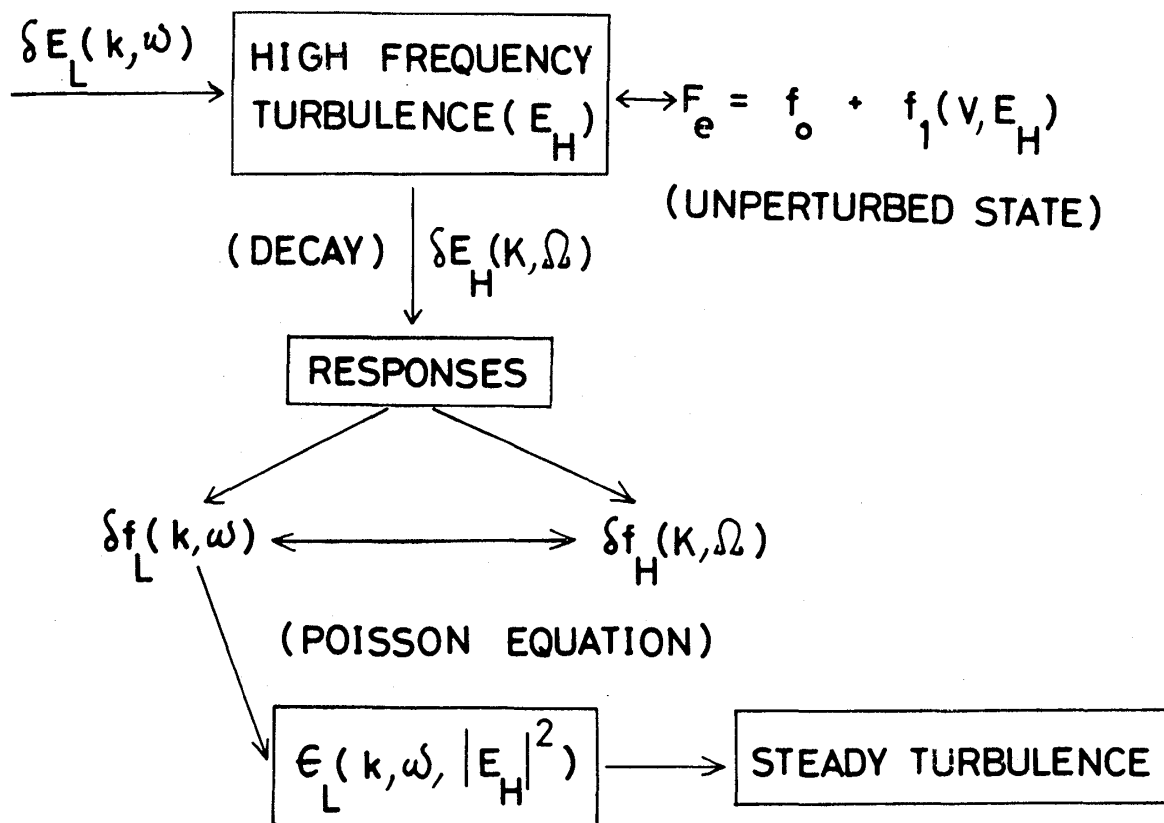
となる。ここで $K = k_e$, $\Omega/K = 1.58 v_e$ (電子の熱速度) とした。 κ はボルツマン定数を示す。(18) 式で決まる値は通常のパラメトリック不安定性理論⁴⁾の予言するしきい値より低くなっている。その理由はモード結合が起き易くなっている為であると考えられる。我々の場合は無限個のポンプ場(プラズマ波)が存在する。

§ 5. 結 論

我々の定式化の要は図の様にまとめる事ができる。

f_1 を決める方法は検討を要すると思われる。我々の方法と従来の乱流理論との比較検討⁵⁾は文献(3)を参照されたい。

現在のところ、ここで述べた方向の研究は外磁場のない場合³⁾, 外磁場を含む場合⁶⁾の定式化が実施されている。この方法がいかなる方向へ発展するかは筆者にも見当がつ



LINEAR RESPONSE THEORY OF A TURBULENT PLASMA

かないが、従来の乱流理論の少くともいくつかの点⁷⁾は再検討を必要とする事は確実である。尚、天体プラズマ現象への応用例⁸⁾に於て興味ある事が判っている。

参考文献

1. 例えば R. C. Davidson, Methods in Nonlinear Plasma Theory, (Academic, New York, 1972).
2. M. Nambu, J. Atmos. terr. phys., to be published.
3. M. Nambu, Phys. Fluids, to be published.
4. 例えば K. Nishikawa, J. Phys. Soc. Jap. 24, 916 (1968), and 24, 1152 (1968).
5. T. H. Dupree, Phys. Fluids 9, 1773 (1966) ;
Y. H. Ichikawa, Phys. Fluids 9, 1454 (1966) ;

- S. Ichimaru, Phys. Fluids 13, 1560 (1970) .
6. M. Nambu, to be published .
7. A. A. Vedenov and L. I. Rudakov, Sov. Phys. Dokl. 9, 1073 (1965) ;
J. Sakai, J. Satsuma, and N. Yajima, J. Phys. Soc. Jap. 36, 1148
(1974) ;
V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP. 35, 908 (1972) .
8. M. Nambu, Phys. Rev. Lett. 34, 387 (1975) .