

Trimicrolocalization functor について

千葉大学 自然科学研究科

渡辺 悟 (Satoru Watanabe)

§0 序

層の超局所解析の理論は [Ks-Sch] に集大成され、線型偏微分方程式系を $\mathcal{D}$ -module として functorial に研究するための基本的手法となっている。中でも microlocalization functor が重要な役割を果たしており、この functor を層 (の複体) に施したときの種々の幾何学的性質を知ることによって、超局所解析を代数的に見通し良く展開することができる。一方、余接バンドルの正則包含的部分多様体に沿ったマイクロ函数を研究するための第二超局所解析の理論が進展中である。この理論は、functorial には microlocalization functor を2度繰り返して適用することにより研究されてきたが、この方法では zero-section における低次の理論との整合性が崩れてしまい、[Ks-Sch] と並行した議論を行う際の難点となっていた。近年、竹内は [Tk] において bimicrolocalization functor を導入し、前述

の難点を解決した形で第二超局所解析の理論を再構成することを試みている。以上のような手法が確立されてみると、更に高次の超局所解析が同様の方針に従って可能なのではないかと考えられる。そこで本稿では、 $[Tk]$ の議論を高次化することにより、第3超局所解析のための基本的な言葉となる $\text{trimicrolocalization functor}$ が、低次のものと整合性を持った形で定式化できたことを報告する。

microlocal microlocalization functor $\mu_{\text{NL}}(\cdot)$ cf. [Ks-Sch]
 2nd microlocal bimicrolocalization functor $\mu_{\text{NNL}}(\cdot)$ cf. [Tk]
 3rd microlocal ?

§ 1 trispecialization functor

$X \supset L \supset M \supset N$ なる関係にある $\mathbb{C}^\infty$ -多様体の4つ組を (X, L, M, N) と書く。これらの多様体から、[Ks-Sch]による normal deformation の操作を、以下のように3度繰り返す。

1回目	$\widetilde{X}_N \supset \widetilde{L}_N \supset \widetilde{M}_N$	$\left[\begin{array}{l} \text{blow-up のパラメータ} \\ t_i \in \mathbb{R} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{左欄のパラメータ} = 0 \text{ の部分} \\ T_{t_i} X \supset T_{t_i} L \supset T_{t_i} M \quad (t_i = 0) \\ T_{t_2} M \times_{\Delta} T_{t_2} X \supset T_{t_2} M \times_{\Delta} T_{t_2} L \quad (t_i = t_2 = 0) \\ T_{t_3} M \times_{\Delta} (T_{t_3} L \times_{\Delta} T_{t_3} X) \quad (t_i = t_2 = t_3 = 0) \end{array} \right.$
2回目	$\widetilde{\widetilde{X}_N \times_{\Delta} \widetilde{M}_N} = \widetilde{X}_{NM} \supset \widetilde{\widetilde{L}_N \times_{\Delta} \widetilde{M}_N} = \widetilde{L}_{NM}$	
3回目	$\widetilde{\widetilde{X}_{NM} \times_{\Delta} \widetilde{L}_{NM}}$	

Def 1.1

$\widetilde{\widetilde{X}_{NM} \times_{\Delta} \widetilde{L}_{NM}}$ を $\widetilde{X}_{NNL}$ と書いて、 X の (L, M, N) に沿った trinormal deformation という。

$X = \{(x', x'', x''', x''')\}$ の中で, $L = \{x' = 0\}$, $M = \{x' = x'' = 0\}$, $N = \{x' = x'' = x''' = 0\}$ と局所座標表示されているとする。この時

$$\begin{array}{ccccc}
 T^*M \times_{\Delta} (T^*L \times_{\Delta} T^*X) & \xrightarrow{\quad s \quad} & \widetilde{X}_{NML} & \xleftarrow{\quad j \quad} & \Omega = \{t_1 > 0, t_2 > 0, t_3 > 0\} \\
 & & (x', x'', x''', x''', t_1, t_2, t_3) & & \\
 \downarrow \tau & & \downarrow p & \nearrow \tilde{p} & \\
 N & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & X & & \\
 & & (t_1, t_2, t_3, x', x'', x''', x''') & &
 \end{array}$$

なる多様体の間の射の可換図式を用いて, 以下のような定義をする。

Def 1.2 $S \subset X$ とする。

$C_{NML}(S) := T^*M \times_{\Delta} (T^*L \times_{\Delta} T^*X) \cap \tilde{p}^{-1}(S)$ とし, これを S の (L, M, N) に沿った trinormal cone という。

Def 1.3 $F \in D^b(X)$ に対し

$\mathcal{V}_{NML}(F) := s^{-1}(\mathbb{R}j_* \tilde{p}^{-1}F)$ と定義し, F の (L, M, N) に沿った trispecialization という。

以下に, この functor の性質をいくつか見よう。

Th 1.4 (i) $\mathcal{V}_{NML}(F)$ は $T^*M \times_{\Delta} (T^*L \times_{\Delta} T^*X)$ 上の triconic object である。

(ii) $T^*M \times_{\Delta} (T^*L \times_{\Delta} T^*X)$ の局所座標系を $(v_{\frac{\partial}{\partial t_1}}, v_{\frac{\partial}{\partial t_2}}, v_{\frac{\partial}{\partial t_3}}, x''')$ とする。

この中の直積型 triconic openset $V = V' \times V'' \times V''' \times V''''$ s.t. $V' \subset X_w$,

$V'' \subset X_w$, $V''' \subset X_{w''}$: conic open, $V'''' \subset X_{w''''}$: open の場合に, $\mathcal{V}_{NML}(F)$

の global section が, 以下のように記述できる。

$$H^j(V, \mathcal{V}_{NML}(F)) = \varinjlim_{C_{NML}(X|U) \cap V = \emptyset} H^j(U, F) \quad \text{for every } j \in \mathbb{Z}$$

また、この functor は以下に見るように zero-section への制限が低次のものと整合的である。

Th. 1.5 以下のような projection をそれぞれ τ_N , ρ_N とする。

$$T_N M_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X) \xrightarrow{\tau_N} N_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)$$

$$T_N L_{\Sigma}^* T_L X \xrightarrow{\rho_N} N_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)$$

この時

$$\begin{cases} R\tau_{N*} \mathcal{U}_{NML}(F) = \mathcal{U}_{NL}(F)|_{N_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)} \\ R\tau_{N!} \mathcal{U}_{NML}(F) = R\rho_{N!} \mathcal{U}_{NL}(F) \end{cases}$$

なる関係が成り立つ。

他の 2 つの zero-section $T_N M_{\Lambda}^* T_L X$, $T_N M_{\Lambda}^* T_M L \wedge$ の projection に関しても同様の性質が成り立つが、ここでは割愛する。

§ 2 trimicrolocalization functor

$$\begin{array}{lcl} D^b(T_N M_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)) & \text{を } T_L X \text{ 上, } T_2 \text{ を } T_M L \text{ 上, } T_3 \text{ を} \\ \downarrow \tau_1 & & \\ D^b(T_N M_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)) & T_N M \text{ 上の Fourier-Sate 変換と} \\ \downarrow \tau_2 & & \\ D^b(T_N M_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)) & \text{する。} ([Ks-Sch] \text{ 参照}) \\ \downarrow \tau_3 & & \\ D^b(T_N^* M_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)) & & \end{array}$$

以下のようにして trimicrolocalization functor を定義する。

Def 2.1 $F \in D^b(X)$ に対し

$$\mathcal{M}_{NML}(F) := \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1 (\mathcal{U}_{NML}(F)) \quad \text{と定義し, } F \text{ の } (L$$

M, N) に沿った trimicrolocalization という。

以下にこの functor の基本的性質をいくつか述べる。

Th. 2.2

(i) $\mathcal{M}_{NML}(F)$ は $T_N^* M_{\Lambda}^*(T_M L_{\Sigma}^* T_L X)$ 上の triconic object。

(ii) 点 $\xi_c = (\xi_c' dx', \xi_c'' dx'', \xi_c''' dx''', 0) \in T_N^* M_X (T_M^* L \times T_L^* X)$ をとると, 全

ての $j \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathcal{M}_{NML}(F)$ の ξ_c での stalk は以下のように与えられる。

$$H^j[\mathcal{M}_{NML}(F)]_{\xi_c} = \varinjlim_{Z \ni \xi_c} H^j(Z \cap U, F)$$

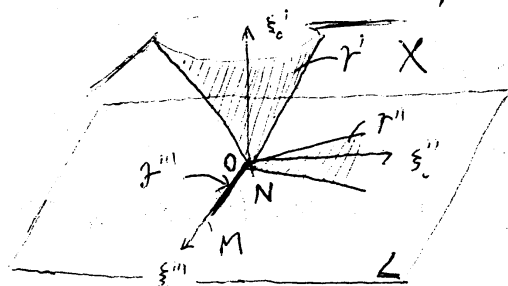
ここで Z は, $Z = \{(\{0\} \times \mathcal{F}') + (\{0\} \times \mathcal{F}'') + \mathcal{F}'''\} \times X_{x'''}^{''''}$, ただし 各 $\mathcal{F}$ は開錐

で, $\mathcal{F}' \subset X_{x'}' \times X_{x''}'' \times X_{x'''}^{'''}$, $\mathcal{F}'' \subset X_{x''}'' \times X_{x'''}^{'''}$, $\mathcal{F}''' \subset X_{x'''}^{'''}$,

$(\mathcal{F}' \setminus \{0\}) \subset \{(x', x'', x''') ; \langle x', \xi_c' \rangle > 0\}$, $(\mathcal{F}'' \setminus \{0\}) \subset \{(x'', x''') ; \langle x'', \xi_c'' \rangle > 0\}$,

$(\mathcal{F}''' \setminus \{0\}) \subset \{x'''; \langle x''', \xi_c''' \rangle > 0\}$ を満たすもの,

U は $0 \in X$ の開近傍, として帰納極限をとる。



Z は左図の 3 つの cones をとしたもの。

Th 2.3 $\pi_N: T_N^* M_X (T_M^* L \times T_L^* X) \rightarrow N_X (T_M^* L \times T_L^* X)$ とすると

$$\begin{cases} R\pi_{N*} \mathcal{M}_{NML}(F) = \mathcal{M}_{ML}(F) |_{N_X(T_M^* L \times T_L^* X)} \\ R\pi_{N!} \mathcal{M}_{NML}(F) = \mathcal{M}_{ML}(F) |_{N_X(T_M^* L \times T_L^* X)} \otimes \omega_{N/M} \end{cases} \text{ が成り立つ。}$$

§ 3 third microfunction

ここで, 第 3 超局所解析の基本的対象となる third microfunction の sheaf が, 以上の結果を用いることにより, [Ks-Sch], [Th] と並行した議論に従って得られることを見よう。

(X, L, M, N) の 4 つ組として $X = \mathbb{C}_z^n$, $L = \mathbb{C}_z^{d_1} \times \mathbb{C}_z^{d_2} \times \mathbb{R}_{x''}^{n-(d_1+d_2)}$,

$M = \mathbb{C}_z^{d_1} \times \mathbb{R}_{x''}^{d_2} \times \mathbb{R}_{x'''}^{n-(d_1+d_2)}$, $N = \mathbb{R}_x^n$ の場合を考える。

$\mathcal{O}_X$ を X 上の正則関数のなす sheaf とする。

Def 3.1 $C_{NML} = \mathcal{M}_{NML}(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_N[n]$ と定義し、これを (L, M)

に沿った third microfunction の sheaf という。(Th 2.2 と 相原の abstract edge of wedge th.1 により、0 次集中していることがわかる。)

佐藤の triangle $R\pi_{W!} \rightarrow R\pi_{N*} \rightarrow R\pi_{N*} \xrightarrow{+1}$ を sheaf C_{NML} に適用すると、Th 2.3 により、次の定理を得る。

Th 3.2 $\Lambda = N_{\Lambda}(T^*L \times T^*X)$ 上で、以下の完全系列が成り立つ。

$$0 \rightarrow C^2\mathcal{O}|_{\Lambda} \rightarrow C_{NL}|_{\Lambda} \rightarrow {}^{\mathbb{R}}\pi_{N*} C_{NML} \rightarrow 0$$

ここで、sheaf C_{NL} は、bimicrolocalization functor を用いて構成される $T^*L \times T^*X$ 上の second microfunction の sheaf $\mathcal{M}_{NL}(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_N[n]$ である。([Tk] 参照。) また、 $C^2\mathcal{O}$ は、 $T^*L \times T^*X$ 上の、 λ を正則パラメーターに持つ、second microfunction の sheaf である。この完全系列により、sheaf C_{NML} は、sheaf C_{NL} の Λ 上の特異性を $T^*M_{\Lambda}(T^*L \times T^*X)$ 上に分解するものであることがわかる。

§4 最後に

偏微分方程式論への応用のためには、上で得られた $\mathcal{M}_{NML}(F)$ の micro-support を $T^*M_{\Lambda}(T^*L \times T^*X)$ の trisymplectic 構造との関係で評価することが必要で、これについては現在研究中である。この結果がうまく得られれば、第2超局所解析まででは扱えなかつた型の triple characteristics を持つ擬微分方程式系の解の

構造の研究に有用であうう。と期待している。なお、本稿の議論の詳細については、[Wt]を参照のこと。

文献表

- [Ks-Sch] : M. Kashiwara and P. Schapira : Sheaves on manifolds
Grundlehren der math. wiss. 292. Springer-Verlag
(1990)
- [Tk] : Kiyoshi Takeuchi : Binormal deformation and bimicro-
localization.
(to appear)
- [Wt] : 第三超局所解析について. 千葉大修論
(1995)