

Classification of line-soliton solutions in 2+1 dimensional integrable equations

児玉裕治 (Yuji Kodama)^a, 丸野健一 (Ken-ichi Maruno)^b

^a オハイオ州立大学

Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, OH
43210

^b 九州大学

Faculty of Mathematics, Kyushu University,
Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581, Japan

Abstract. DKP 方程式 (Coupled KP 方程式, Pfaff lattice)

$$\begin{cases} (-4D_x D_t D_x^4 + 3D_y^2) \tau_n \cdot \tau_n = 24\tau_{n-1} \tau_{n+1}, \\ (2D_t + D_x^3 \mp 3D_x D_y) \tau_{n\pm 1} \cdot \tau_n = 0. \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

($\tau_0 = 1$) のソリトン相互作用について報告する.

1. DKP 方程式のソリトン解と D 型 Weyl 群

DKP 方程式は神保—三輪により発見され, 後に広田—太田により独立に Coupled KP 方程式として再発見されたものであり, また近年, ランダム行列において Pfaff lattice と呼ばれているものと同一である [7, 3, 1, 8]. 双線形形式は

$$\begin{cases} (-4D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2) \tau_n \cdot \tau_n = 24\tau_{n-1} \tau_{n+1}, \\ (2D_t + D_x^3 \mp 3D_x D_y) \tau_{n\pm 1} \cdot \tau_n = 0 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

で与えられる. ここで $\tau_0 = 1$ であり, D_x, D_y, D_t は広田の双線形作用素である.

変数 $u = 2(\ln \tau_x)_{xx}$ と $v^\pm = \tau_{n\pm 1}/\tau_n$ を導入することにより Coupled KP (cKP) 方程式 [3],

$$\begin{cases} (-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x - 3u_{yy} + 24(v^+v^-)_{xx} = 0, \\ 2v_t^\pm + v_{xxx}^\pm + 3uv_x^\pm \mp 3(v_{xy}^\pm + v^\pm \int^x u_y dx) = 0, \end{cases}$$

が導かれる. 磯島らは Coupled KP 方程式の解を広田の方法を用いて調べ, spider web 構造を示す解が存在することを示している [5, 6].

τ_n -関数は要素 $Q_{i,j}$ ($Q_{j,i} = -Q_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 2n$) を持つ反対称行列 Q_n の Pfaffian で定義される:

$$\tau_n = \text{Pf}(Q_n) = \sum_{\substack{1 = i_1 < \dots < i_n \leq 2n \\ i_k < j_k, k = 1, \dots, n}} \sigma(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) Q_{i_1, j_1} Q_{i_2, j_2} \cdots Q_{i_n, j_n}. \quad (1.2)$$

係数 $\sigma(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n)$ は

$$\sigma := \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_n & j_n \end{pmatrix},$$

で定義される. ここで $Q_{i,j}$ は以下の関係式を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial t_k} Q_{i,j} = Q_{i+k,j} + Q_{i,j+k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

($t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t$ であり, 他は symmetry パラメータである). $Q_{i,j}$ として具体的には以下のようなものを選ぶことができる [3]:

$$Q_{i,j} = \begin{vmatrix} \phi^{(i-1)} & \phi^{(j-1)} \\ \psi^{(i-1)} & \psi^{(j-1)} \end{vmatrix}, \quad \text{for } i < j$$

($\phi^{(k)} = \partial^k \phi / \partial x^k$). ここで関数 ϕ と ψ は以下の式を満たす:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}.$$

例えば, a_m, b_m ($m = 1, \dots, M$) として

$$\phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M a_m E_m(x, y, t), \quad \psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M b_m E_m(x, y, t), \quad (1.3)$$

ととることができる. ここで関数 $E_m(x, y, t)$ は指数関数

$$E_m(x, y, t) := e^{\theta_m} \quad \text{with} \quad \theta_m(x, y, t) = p_m x + p_m^2 y + p_m^3 t + \theta_m^0,$$

である. p_m と θ_m^0 は任意定数である. $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots, p_M)$ は

$$p_1 < p_2 < \dots < p_M, \quad (1.4)$$

と順序づけられているものと仮定する. このとき, 要素 $Q_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 2n$ は

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &= \sum_{1 \leq k < l \leq M} b_{k,l} \begin{vmatrix} E_k^{(i-1)} & E_l^{(j-1)} \\ E_k^{(i-1)} & E_l^{(j-1)} \end{vmatrix}, \\ &= \sum_{1 \leq k < l \leq M} b_{k,l} (p_k p_l)^{i-1} (p_l^{j-i} - p_k^{j-i}) E_{k,l} \end{aligned} \quad (1.5)$$

となる. (今, $b_{k,l} = a_k b_l - a_l b_k$, $E_{k,l} := E_k E_l = \exp(\theta_k + \theta_l)$ とした).

この解は Wronski 型 pfaffian 解と呼ばれているものであるが, DKP 方程式には Gram 型 pfaffian 解と呼ばれる別の解の表示も知られている [3, 9].

では $Q_{i,j}$ を一般化してみよう. $M \times M$ 反対称行列 $B = (b_{k,l})_{1 \leq k, l \leq M}$ を考える. τ -関数 τ_n における $2n \times 2n$ 行列 Q_n は

$$Q_n(x, y, t) = \mathcal{E}_n(x, y, t) B \mathcal{E}_n(x, y, t)^T \quad (1.6)$$

と書くことができる. $\mathcal{E}_n$ は $2n \times M$ 行列, $\mathcal{E}_n^T$ はその転置であり, 以下のようにならされる:

$$\mathcal{E}_n = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1^{(2n-1)} & E_2^{(2n-1)} & \dots & E_M^{(2n-1)} \end{pmatrix}.$$

本稿では, B -matrix を用いて (1.6) の形で与えられるソリトン解の分類について解説する. $M = 2$ の場合は自明な解 $\tau_1 = Q_{1,2} = b_{1,2}(p_2 - p_1)E_1 E_2$, $u = 2(\ln \tau_1)_{xx} = 0$ を与えるので, $M > 2$ について議論する. また $\tau_n \neq 0$ (すなわち $u = 2(\ln \tau_n)_{xx} \neq 0$) のためには $M \geq 2n$ である必要があることに注意しよう.

もし $\tau_{n+1} = 0$ ($v^+ = 0$) ならば, 対応する解は KP 方程式を満たす. この条件は B -matrix から得られる. 例えば $M = 3$ の場合, τ_2 は恒等的に 0 と

なる (pfaffian のサイズは 4×4 となるが独立な exponential は 3 かそれより少なくなる). これは $M = 3$ のとき τ_1 は KP 方程式の解を与えることを示し, それらは KP 1-ソリトン解か共鳴 Y 字型ソリトンのどちらかである: 3×3 B-matrix のとき τ 関数は

$$\tau_1 = Q_{1,2} = b_{1,2}(p_2 - p_1)E_1E_2 + b_{1,3}(p_3 - p_1)E_1E_3 + b_{2,3}(p_3 - p_2)E_2E_3,$$

となる. 函数 $u = 2\partial^2 \ln \tau_1 / \partial x^2$ はある $b_{i,j}$ が 0 で他が正のときに KP 1-ソリトンを与え, すべての $b_{i,j}$ が正のときに Y 字型ソリトン解を与える. 例えば, $b_{1,2} = 0$ とすると, $\tau_1 = (b_{1,3}(p_3 - p_1)E_1 + b_{2,3}(p_3 - p_2)E_2)E_3$ となり, これは

$$w(x, y, t) := \frac{\partial}{\partial x} \ln \tau_1 = p_3 + \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \tanh \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1), \quad (1.7)$$

を与える. w の漸近値は

$$w(x, y, t) \rightarrow \begin{cases} p_1 + p_3, & x \rightarrow -\infty \\ p_2 + p_3, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

である. 1-ソリトンは漸近値 $(1, 3) := p_1 + p_3$ と $(2, 3) := p_2 + p_3$ を交換していることに注意しよう. つまり 1-ソリトンは $(1) \leftrightarrow (2)$ を交換している. KP 方程式の 1-ソリトン解は置換群 W (この場合には $W = S_3$) の要素としてラベルできる. 1-ソリトン解 (1.7) を $[1:2]$ と記し, このタイプのソリトンを A-soliton と呼ぶことにする (“A” は KP 方程式に関連する A 型リー代数からとった). 一般に, 函数 w が $p_i \leftrightarrow p_j$ を交換するときの 1 A-soliton を $[i:j]$ と記すことにする.

DKP 方程式に特有の解は $M \geq 4$ で得られる. 特に, $M = 4$ の場合において, B-matrix が上三角部分に 2 つの非零の要素を持つときに 1-ソリトン解を得る. 例えば, $b_{1,2} = 1, b_{3,4} = 1$ で他が $b_{i,j} = 0$ ($i < j$) である B-matrix を考えよう. このとき

$$\tau_1 = Q_{1,2} = (p_2 - p_1)E_1E_2 + (p_4 - p_3)E_3E_4,$$

であり

$$w(x, y, t) := \frac{\partial}{\partial x} \ln \tau_1$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 p_k + \frac{1}{2} (p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \tanh \frac{1}{2} (\theta_{34} - \theta_{12}) \quad (1.8)$$

($\theta_{ij} = \theta_i + \theta_j + \ln |p_i - p_j|$) となる. $x \rightarrow \pm\infty$ において, τ -函数の指数函数の1つがドミナントとなる. (1.8) の例では,

$$w(x, y, t) \rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2, & x \rightarrow -\infty, \\ p_3 + p_4, & x \rightarrow \infty, \end{cases}$$

となる. この 1-soliton は w の漸近値 $(1, 2) \leftrightarrow (3, 4)$ を交換する (ここで $(i, j) := (p_i + p_j)$ である). これは D 型 Weyl 群作用を示す, 例えば $w_{1,2} \in W^D$ について, D 型 Weyl 群は次の通りである:

$$w_{1,2} \cdot (i_1, i_2 : j_1, j_2) = (i_2, i_1 : j_2, j_1), \quad i_1 = 1, i_2 = 3, j_1 = 2, j_2 = 4.$$

これを D-soliton と呼び, $[1, 2 : 3, 4]$ と記す. $[1, 2 : 3, 4]$ をペアの置換 $(1, 2) \leftrightarrow (3, 4)$ と同一視すると, 関係 $[1, 2 : 3, 4] = [1 : 3] \cdot [2 : 4] = [1 : 4] \cdot [2 : 3]$ を得る. ここに $[i : j]$ は A-soliton の置換 $(i) \leftrightarrow (j)$ である. この関係は 1 D-soliton から 2 A-soliton への共鳴的な分岐を与える. 1 D-soliton は 4 つの p_i -パラメータを持っているので, N D-soliton を記述するためには $M = 4N$ 個のパラメータが必要である.

2. DKP 方程式の τ -函数

石川-若山による pfaffian の和公式を用いて τ 函数は以下のように書くことができる [4]:

Lemma 2.1. (1.6) によって与えられる τ -函数 (1.2) は以下のように書くことができる:

$$\tau_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2n} \leq M} \text{Pf}(B(i_1, \dots, i_{2n})) \text{Det}(E(i_1, \dots, i_{2n}))$$

ここで

- $E(i_1, \dots, i_{2n})$ は $2n \times M$ 行列 $\mathcal{E}_n$ の $2n \times 2n$ 部分行列,

$$E(i_1, \dots, i_{2n}) := \begin{pmatrix} E_{i_1} & \cdots & E_{i_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{i_1}^{(2n-1)} & \cdots & E_{i_{2n}}^{(2n-1)} \end{pmatrix}$$

- $B(i_1, \dots, i_{2n})$ は $M \times M$ 行列 B の $2n \times 2n$ 反対称部分行列,

$$B(i_1, \dots, i_{2n}) = \begin{pmatrix} 0 & b_{i_1, i_2} & \cdots & \cdots & b_{i_1, i_{2n}} \\ & 0 & \cdots & \cdots & b_{i_2, i_{2n}} \\ & & & \cdots & \vdots \\ & & & 0 & b_{i_{2n-1}, i_{2n}} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ここで $\text{Det}(E)$ は Wronskian,

$$\text{Det}(E(i_1, \dots, i_{2n})) := \text{Wr}(E_{i_1}, \dots, E_{i_{2n}}) = \prod_{m < n} (p_{i_n} - p_{i_m}) \exp \left(\sum_{j=1}^{2n} \theta_{i_j} \right) > 0,$$

で与えられる (符号は順序 (1.4) による).

$n = 2$ の場合に, pfaffian $\text{Pf}(B(i_1, \dots, i_4))$ は

$$\text{Pf}(B(i_1, \dots, i_4)) = b_{1,2}b_{3,4} - b_{1,3}b_{2,4} + b_{1,4}b_{2,3},$$

である. 各項のインデックスが部分的に交差 (partial overlap) するときに, 符号がマイナスとなっていることに注意しよう. 例えば $(1, 3)$ と $(2, 4)$ がそうである. これは 4-soliton の分類のキーとなる.

Lemma 2.1 により, (1.2) の τ_n における各項は n 個の exponential E_k の積で与えられることがわかる, すなわち

$$\prod_{j=1}^{2n} E_{i_j} = \prod_{k=1}^n E_{i_k, j_k}.$$

ここでインデックスは $\{i_j | i_k < i_l \text{ if } k < l, j = 1, \dots, 2n\} = \{i_k, j_k | i_k < j_k, k = 1, \dots, n\}$ であり, これらのインデックスは B -matrix の要素 (b_{i_k, j_k}) のインデックスと同じである.

2.1. *B-matrix*

generic な $4N \times 4N$ 反対称行列 B ($B \in \mathfrak{so}(4N)$) において, skew-Borel 分解と呼ばれるものがある [1]:

$$B = \mathcal{N} J_0 \mathcal{N}^T,$$

ここで $\mathcal{N} \in \mathcal{G}$ であり, $\mathcal{G}$ は

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & a_n & 0 \\ * & * & * & * & 0 & a_n \end{pmatrix} \right\}.$$

行列 J_0 は, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる 2×2 対角ブロックを持ち他が 0 となる $4N \times 4N$ 反対称行列

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

である. $\mathfrak{so}(4N)$ の non-generic な要素は置換行列 $w \in S_{4N}$ ($w^{-1} = w^T$) によって与えられる (すなわち $w \in O(4N)$):

$$B = w \mathcal{N} J_0 \mathcal{N}^T w^{-1} = (w \mathcal{N}) J_0 (w \mathcal{N})^T.$$

ここで $\mathcal{N}$ は $\mathcal{G}$ の generic な要素ではないとする.

Example 2.1. $N = 1$ (4×4 B -matrix) の場合を考えよう. generic な要素 B は $B = \mathcal{N}J_0\mathcal{N}^T$ で表現される. ここで

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & d & f & 0 \\ c & e & 0 & f \end{pmatrix} \in \mathcal{G}.$$

このとき, B は

$$B = \mathcal{N}J_0\mathcal{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & ad & ae \\ & 0 & -ab & -ac \\ & & 0 & -cd + be + f^2 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

となる. もし $b_{1,2} = 0$ で他が非零ならば, その行列 (B_1 とする) はこの形に表すことはできない. この場合, $B = s_{2,3}\mathcal{N}J_0\mathcal{N}^T s_{2,3}^{-1}$

$$s_{2,3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & d & f & 0 \\ 0 & e & 0 & f \end{pmatrix},$$

と表される. つまり B_1 は

$$B_1 = s_{2,3}\mathcal{N}J_0\mathcal{N}^T s_{2,3}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & ae \\ & 0 & ab & be + f^2 \\ & & 0 & -ad \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

となる. 特に, $\mathcal{N} = Id$ で,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} := J_1. \quad (2.4)$$

B -matrix のもう一つの non-generic な要素 (B_2 とする) は $b_{1,2} = b_{1,3} = 0$ で他の成分が非零であるものであり, それは $B_2 = s_{2,4} \mathcal{N} J_0 \mathcal{N}^T s_{2,4}^{-1}$,

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2 \\ & 0 & f^2 & ac \\ & & 0 & -ab \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

with

$$w = s_{2,4} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & f & 0 \\ c & 0 & 0 & f \end{pmatrix},$$

と表される. 特に, $\mathcal{N} = Id$ で

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} := J_2, \quad (2.6)$$

となる. これら J_0, J_1, J_2 が 1 D-soliton 解のすべてを定義することを次節で述べる.

一般に, τ -函数 $\tau_n = \text{Pf}(Q_n)$ を定義するのに J_0 からはじめることができる. そして, J_0 を $J_w := w J_0 w^{-1}$ ($w \in S_{4N} \cap O(4N)$) に置きかえることにより Q_n matrix の一般化を考えることができる. w の役割は $\mathcal{E}_n$ における列ベクトルの順序交換, つまり

$$\mathcal{E}_n w := (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{4N}) w = (\pm \mathbf{E}_{w(1)}, \pm \mathbf{E}_{w(2)}, \dots, \pm \mathbf{E}_{w(4N)}),$$

と理解できる. ここで列ベクトルは $\mathbf{E}_k := (E_k, E_k^{(1)}, \dots, E_k^{(2n-1)})^T$ であり, $w(k)$ は置換 $k \rightarrow w(k)$ を示す. w の符号は τ -函数 $\tau'_n = (\mathcal{E}_n w) J_0 (\mathcal{E}_n w)^T$ が non-singular なように適当に選ばれるものとする.

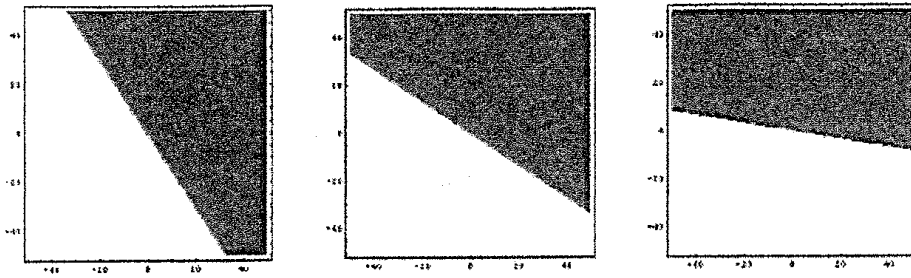


Figure 1. 1 D-solitons. 左が $[1, 2 : 3, 4]$, 中央が $[1, 3 : 2, 4]$, そして右が $[1, 4 : 2, 3]$. パラメータは $p_1 = -2, p_2 = -1, p_3 = 0, p_4 = 3$ とした

3. 1 D-SOLITON と 2 A-SOLITON

4×4 反対称行列 B の場合を考えよう. この場合は 1 D-soliton と 2 A-soliton を含んでいる.

3.1. D-solitons

第 1 節において, 1 D-soliton (1.8) の例を示した. τ -関数は $\tau_1 = \text{Pf}(\mathcal{E}_1 J_0 \mathcal{E}_1^T)$ で与えられた. (ここで J_0 は (2.1) において, $\mathcal{E}_1$ は Lemma 2.1 において定義されたものである). この D-soliton は $[1, 2 : 3, 4]$ と記される. 1 D-soliton の一般形は $[i_1, j_1 : i_2, j_2]$ と記される (ここで $i_1 < i_2, i_k < j_k$ である). 1 D-soliton は全部で以下の 3 通りある:

$$[1, 2 : 3, 4], \quad [1, 3 : 2, 4], \quad [1, 4 : 2, 3].$$

ここでラベル $[i, j : k, l]$ は B -matrix の非零要素を示している (すなわち $b_{i,j}$ と $b_{k,l}$ が非零要素である) (図 1). 上三角部分に (i_1, j_1) と (i_2, j_2) に 1 を持つ J_k -matrix を考えると, τ -関数は

$$\tau_1 = Q_{1,2} = (p_{j_1} - p_{i_1})E_{i_1}E_{j_1} + (p_{j_2} - p_{i_2})E_{i_2}E_{j_2}, \quad (3.1)$$

となる. このとき関数 $w = (\ln \tau_1)_x$ は

$$w(x, y, t) := \frac{\partial}{\partial x} \ln \tau_1$$

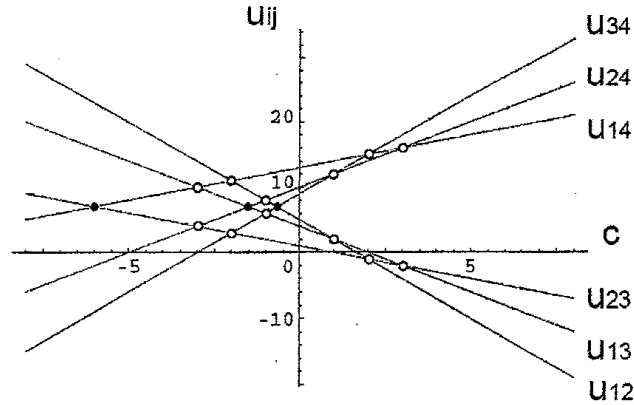


Figure 2. 1 D-soliton の速度. u_{ij} と u_{kl} の交点は D-soliton $[i, j : k, l]$ の速度を与える. 黒丸は D-solitons の速度を与え, 白丸は A-solitons の速度を与える. $[1, 2]$ -soliton の速度は $u_{14} = u_{24}$ または $u_{13} = u_{23}$ で与えられる $c = -(p_1 + p_2)$ である.

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 p_k + \frac{1}{2} (p_{i_2} + p_{j_2} - p_{i_1} - p_{j_1}) \tanh \frac{1}{2} (\theta_{i_2, j_2} - \theta_{i_1, j_1}) \quad (3.2)$$

で与えられる ($\theta_{i,j} = \theta_i + \theta_j + \ln |p_i - p_j|$). $x \rightarrow \pm\infty$ で, τ -函数 (3.1) の指数函数項の一つがドミナントになり

$$w(x, y, t) \rightarrow \begin{cases} p_{i_1} + p_{j_1}, & x \rightarrow -\infty, \\ p_{i_2} + p_{j_2}, & x \rightarrow \infty, \end{cases}$$

となる. だから, 1 D-soliton は D 型 Weyl 群の要素として $(i_1, j_1) \leftrightarrow (i_2, j_2)$ を交換することがわかり, 1 D-soliton は $[i_1, j_1 : i_2, j_2]$ と記される.

1-soliton 解 $u = 2\partial w / \partial x$ は

$$u(x, y, t) = \phi(k_x x + k_y y - \omega t),$$

の形をしている平面波である. (3.2) の波数 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ と周波数 ω を $\mathbf{k}[i_1, j_1 : i_2, j_2]$ と $\omega[i_1, j_1 : i_2, j_2]$, すなわち

$$\begin{cases} \mathbf{k}[i_1, j_1 : i_2, j_2] = (p_{i_2} + p_{j_2} - p_{i_1} - p_{j_1}, p_{i_2}^2 + p_{j_2}^2 - p_{i_1}^2 - p_{j_1}^2), \\ \omega[i_1, j_1 : i_2, j_2] = -(p_{i_2}^3 + p_{j_2}^3 - p_{i_1}^3 - p_{j_1}^3), \end{cases}$$

により記述しよう. x - y 平面におけるソリトンの傾き (速度) は $c := dx/dy = -k_y/k_x = -(p_{i_2}^2 + p_{j_2}^2 - p_{i_1}^2 - p_{j_1}^2)/(p_{i_2} + p_{j_2} - p_{i_1} - p_{j_1})$ で与

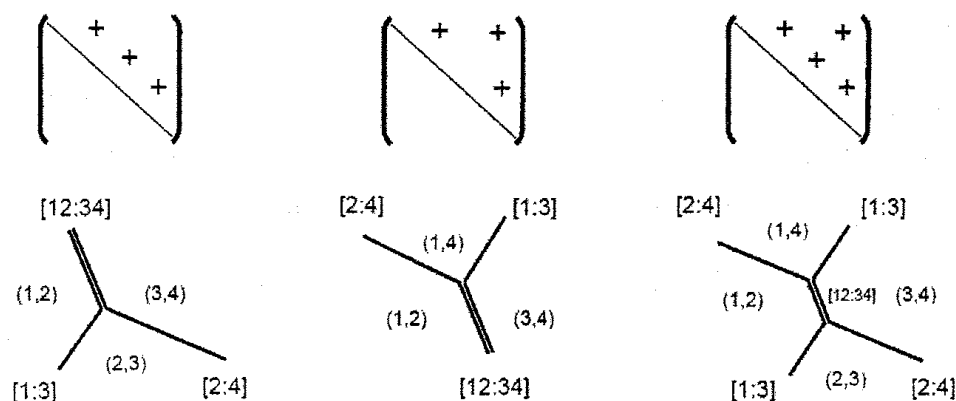


Figure 3. D-soliton $[1, 2 : 3, 4]$ の共鳴的な分岐. それぞれの領域 (i, j) は要素 $b_{i,j}$ に対応するドミナントな指数函数に対応する. 例えば, $b_{2,3} \neq 0$ では, $[1, 2 : 3, 4]$ -D-soliton は $y \rightarrow -\infty$ で $[1 : 3]$, $[2 : 4]$ A-solitons に分岐する (上図). これらのソリトンは図2から見つけることができる.

えられる.

また, 1 D-soliton の速度 c を以下のように定義する:

$$u_{i,j} := (p_i + p_j)c + p_i^2 + p_j^2.$$

$[i, j : k, l]$ D-soliton の速度 c は, u_{ij} と u_{kl} の交点 $u_{ij}(c) = u_{kl}(c)$ により決定される. 図2において, パラメータは $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_4) = (-2, -1, 0, 3)$ とした. 黒丸は1 D-soliton の速度を与え, 白丸は1 A-soliton の速度を与える. 例えば $u_{12} = u_{13}$ の点は $[2 : 3]$ -soliton の速度を与える. これは次のことを与える: もし $b_{1,2}$ と $b_{1,3}$ が B -matrix における唯一の非零要素ならば, τ_1 は1 A-soliton $[2 : 3]$ を与え, $\tau_1 = (b_{1,2}(p_2 - p_1)E_2 + b_{1,3}(p_3 - p_1)E_3)E_1$ となる. 図2は $|y| \rightarrow \infty$ でのソリトンを決めるのにも使うことができる. 例えば, もし $b_{i,j} > 0$ ($1 \leq i < j \leq 4$) ならば, τ_1 は6項 $E_i E_j$ ($i < j$) すべてを含む. このとき図2から, T-type の2 A-soliton $[1, 3]$ と $[2, 4]$ が現れる.

3.2. Two A-solitons

1 D-soliton は 2 A-solitons の退化したものとして現れる. 1 D-soliton $[i, j : k, l]$ は 2 A-solitons $[i, k], [j, l]$ または $[i, l], [j : k]$ の積 (すなわち $[i, j : k, l] = [i : k] \cdot [j : l] = [i : l] \cdot [j : k]$) と考えられる. このとき, 2 A-soliton 解は指数函数項を新たに付加することで得られる. もし 1 項だけ加えると, Y 字型共鳴解が得られる. 例えば, 上三角部分に 2 つの非零成分 b_{i_1, j_1} と b_{i_2, j_2} がある B -matrix を考えたとき, (i_1, j_2) か (i_2, j_1) を非零にしたとき, 共鳴 Y 字型解を得る:

$$\begin{cases} k[i_1, i_2] + k[j_1, j_2] = k[i_1, j_1 : i_2, j_2], \\ \omega[i_1, i_2] + \omega[j_1, j_2] = \omega[i_1, j_1 : i_2, j_2]. \end{cases}$$

ここで波数 $k[i : j]$ と周波数 $\omega[i : j]$ は KP 方程式の 1 soliton 解のものである:

$$k[i_1, i_2] = (p_{i_1} - p_{i_2}, p_{i_1}^2 - p_{i_2}^2), \quad \omega[i_1, i_2] = p_{i_1}^3 - p_{i_2}^3.$$

図 3 において, $[1, 2 : 3, 4]$ -soliton の 2 A-solitons $[1 : 3], [2 : 4]$ への共鳴的な分岐を示す. これらのソリトン は図 2 から見つけられる: 例えば, 図 3 の左図において, u_{12}, u_{34}, u_{23} がある. 3 つの交点は 1 D-soliton (黒丸) と 2 A-solitons (白丸) を与える. 図 2 は, 黒丸は $y \rightarrow \infty$ での $[1, 2 : 3, 4]$ -soliton のドミナントな指数函数のペア $(E_{1,2}, E_{3,4})$ を示し, 白丸は $y \rightarrow -\infty$ での $[1, 3]$ -soliton のドミナントな指数函数のペア $(E_{1,2}, E_{2,3})$ と $[2, 4]$ -soliton のドミナントな指数函数のペア $(E_{2,3}, E_{3,4})$ を示す.

2-soliton によって分けられる領域は少なくとも 4 つであるので, 少なくとも 2 つ非零要素を付け加える必要がある. 図 3 は 1 D-soliton の two A-solitons への共鳴的な分岐を示す. この図における 2-ソリトン解は new T-type (TD-type と呼ぶ) であり, これは DKP 方程式にのみ存在する解である. KP 方程式の T-type の解は例えば以下の B -matrix によって得られる:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

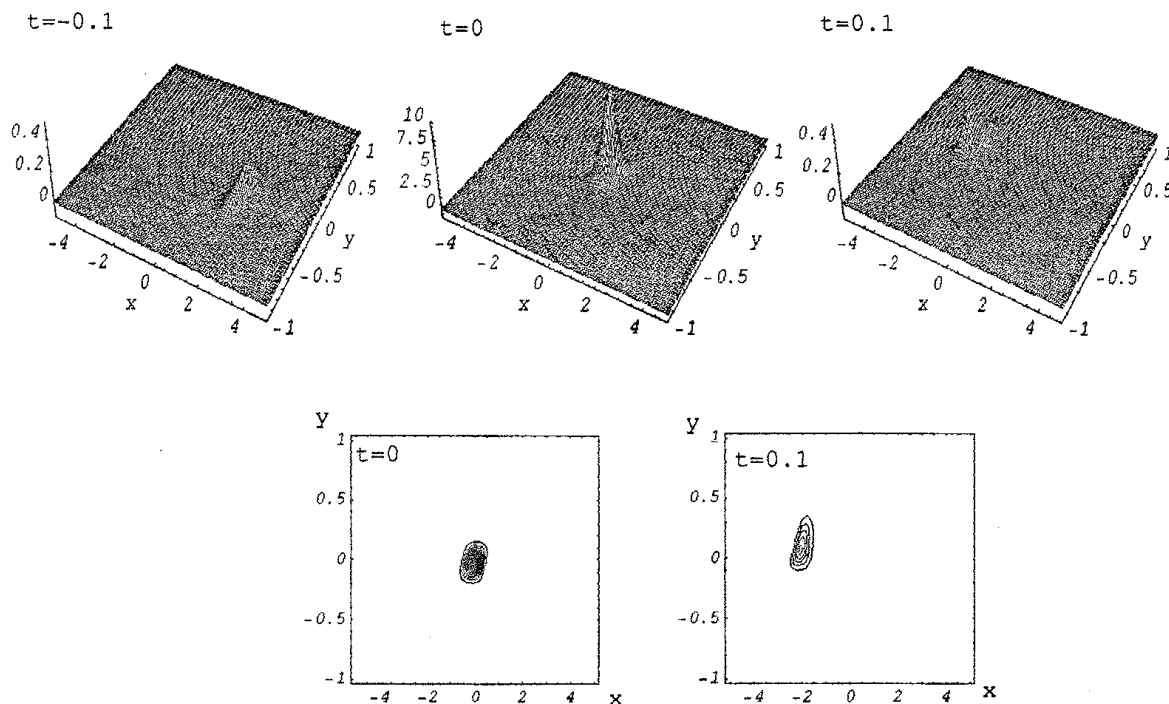


Figure 4. v^+v^- の図. 下は v^+v^- の等高線図.

この場合には $\tau_2 = 0$ ($v^+ = 0$) であることに注意しよう. generic な B -matrix ($\text{Det}(B) \neq 0$) は穴のある T-type の 2 soliton 解を与え, これは KP 方程式の解にはならない ($\tau_2 \neq 0$). 図 4 において,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

の場合の v^+v^- の時間発展の様子を示した. インスタント的なパルスが現れているのがわかる. KP 方程式と DKP 方程式の T-type の 2 soliton 解はどちらも 6 つの独立な指数関数を持つ ($E_{i,j}$, ($1 \leq i < j \leq 4$)). これが T-type の 2 A-solitons をつくる鍵である ([2, 10] を参照せよ).

Example 3.1. (1, 2), (3, 4) に非零成分を持つ B -matrix (つまり (2.1) における $B = J_0$) に対応する [1, 2 : 3, 4]-D-soliton を考えよう:

a) (1, 4) と (2, 3) に +1 を置くことにより [1 : 3]-A-solitons と [2 : 4]-A-

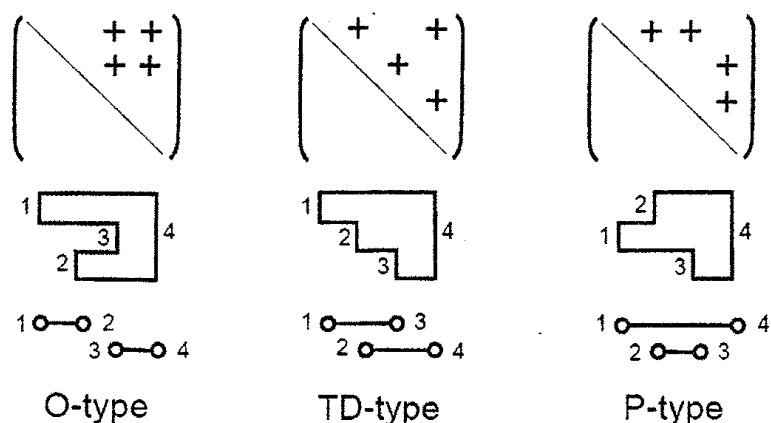


Figure 5. D-solitons から得られる 2 A-solitons の 3 つの基本的な場合. ダイアグラムは B -matrix と対応する 2 solitons の関係を与える. つまり, 組 (i, j) が直接つながっているときに $b_{i,j} \neq 0$ であり, $[k : l]$ -soliton は (k, l) は直接つながっていないことを示す.

solitons (TD-type) が得られる.

- b) $(1, 3)$ と $(2, 4)$ に $+1$ を置くことにより $[1 : 4]$ -A-solitons と $[2 : 3]$ -A-solitons (P-type) が得られる.

a) における TD-type は AKP-soliton のものとは違い共鳴がない. もとの T-type 2 A-solitons はすべて非零成分で $\text{Det}(B) = 0$ である B -matrix によって得られる. DKP 方程式の 2 A-solitons も 3 種類ある. これらの種類は分類問題において重要な役割をする. 図 5 は 3 種類の 2 A-solitons のダイアグラムである. 8-gon のダイアグラムは B -matrices とソリトンの種類と関係づける: もし, 組 (i, j) がダイアグラムにおいてつながっていれば $b_{i,j}$ は非零となり, 対応する $[k : l]$ の A-soliton はダイアグラムにおいてつながっていない組 (k, l) により与えられる. また, O-type に対応する B -matrix は generic なものではなく (2.3) である. 図 6 は 2 A-solitons のタイプを示す. これらは KP 方程式のものと同一である. (すべてのタイプにおいて $\tau_2 = 0$ となるようにすると, τ_1 は KP 方程式の解となる). パラメータは $\mathbf{p} = (-2, -1, 0, 3)$ と選び, ソリトンの速度は図 2 からわかる.

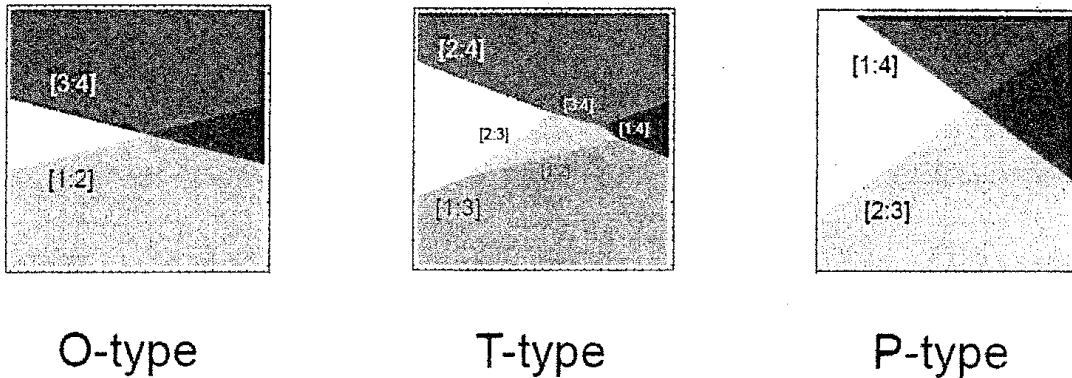


Figure 6.2 A-solitons の3つの基本的な種類.

4. 多ソリトン解

次に B -matrix が 8×8 の場合を議論しよう.

それぞれの D-soliton は4つの位相を持つので, 2 D-soliton 解を記述するには8つの位相が必要である. τ_2 -関数は

$$\tau_2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_4 \leq 8} \text{Pf}(B(i_1, \dots, i_4)) \Delta(i_1, \dots, i_4) \exp \left(\sum_{k=1}^4 \theta_{i_k} \right),$$

で与えられる. ただし $\Delta(i_1, \dots, i_4) = \prod_{1 \leq j < k \leq 4} (p_{i_j} - p_{i_k}) > 0$ であり, pfaffian は

$$\text{Pf}(B(i_1, \dots, i_4)) = b_{i_1, i_2} b_{i_3, i_4} - b_{i_1, i_3} b_{i_2, i_4} + b_{i_1, i_4} b_{i_2, i_3},$$

と計算される.

上三角部分に4つの非零成分を持つ2 D-soliton 解を持つ B -matrices を構築しよう. これは, 以下のステップをたどることで可能である.

- 1) 集合 $\{1, \dots, 8\}$ から4つの組 (i_k, j_k) , $k = 1, \dots, 4$ ($i_k < j_k$) を取れ. つまり

$$1 = i_1 < i_2 < \dots < i_4, \quad j_k \neq j_l, (k \neq l).$$

これは全部で $(2 \times 4 - 1)!! = 105$ 通りある. これら4つの組は B -matrix の4つの非零要素を与える (すなわち $(i_k, j_k) \equiv b_{i_k, j_k}$ ($k = 1, \dots, 4$)).

2) τ_2 を展開してでてくるすべての pfaffian の符号が同じになるように, 組 (i_k, j_k) の符号を決定せよ. i_k, j_k はすべて異なるので, それぞれの pfaffian は 1 つの項 $\text{Pf}((i, j), (k, l)) = \pm b_{i,j} b_{k,l}$ となる. ここで符号は組の overlap に依存している. 例えば

$$\text{Pf}((1, 3), (5, 7)) = b_{1,3} b_{5,7}, \quad \text{Pf}((2, 6), (4, 8)) = -b_{2,6} b_{4,8},$$

である.

pfaffian $\text{Pf}((i, j), (k, l)) = \pm b_{i,j} b_{k,l}$ の符号を決定するために, 以下を定義しよう:

Definition 4.1. 組 (i_j, i_k) と組 (i_l, i_m) ($i_j < i_l$) は $i_j < i_l < i_k < i_m$ であるとき partial overlap (部分的交差) を持つ, ということにしよう. 他の場合は, 組は non-partial overlap (非部分的交差) を持つ, ということにする. (つまり total overlap (完全交差) または no overlap (無交差) を持つ).

(i_k, j_k) と (i_l, j_l) の間の overlap の符号を導入する:

$$\sigma_{kl} = \begin{cases} - & \text{if } i_k < i_l < j_k < j_l \text{ (partial overlap),} \\ + & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき $\text{Pf}((i_k, j_k), (i_l, j_l)) = \sigma_{kl} b_{i_k, j_k} b_{i_l, j_l}$ となる.

以下のことが成り立つ.

Lemma 4.1. 符号 σ_{kl} は

$$\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14} = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{24} = \sigma_{13}\sigma_{23}\sigma_{34} = \sigma_{14}\sigma_{24}\sigma_{34},$$

を満たすと仮定する. このとき τ -関数 τ_2 は sign-definite になる, すなわちすべての $\text{Pf}(B(i_1, \dots, i_4))$ は同じ符号を取る.

この Lemma を用いると, 以下のことがわかる:

Proposition 4.1. $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_4)$ と $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_4)$ を考えよ. このとき sign-definite な τ 関数は 33 通りある:

a) $\mathbf{i} = (1, 2, 3, 4)$ に対して, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_4)$ は 8 通りある;

$$(5, 6, 7, 8), (5, 8, 7, 6), (6, 5, 8, 7), (6, 7, 8, 5),$$

$$(7, 8, 5, 6), (7, 6, 5, 8), (8, 5, 6, 7), (8, 7, 6, 5).$$

- b) $i = (1, 2, 3, 5)$ に対して, 4 通り, $(4, 7, 6, 8), (4, 7, 8, 6), (6, 7, 4, 8), (8, 7, 4, 6)$.
- c) $i = (1, 2, 3, 6)$ に対して, 4 通り, $(4, 5, 8, 7), (5, 4, 7, 8), (7, 4, 5, 8), (8, 5, 4, 7)$.
- d) $i = (1, 2, 4, 5)$ に対して, 4 通り, $(3, 8, 6, 7), (3, 6, 8, 7), (6, 3, 7, 8), (8, 3, 7, 6)$.
- e) $i = (1, 2, 4, 6)$ に対して, 1 通り, $(8, 3, 5, 7)$.
- f) $i = (1, 2, 3, 7)$ に対して, 2 通り, $(4, 5, 6, 8), (6, 5, 4, 8)$.
- g) $i = (1, 3, 4, 5)$ に対して, 2 通り, $(2, 6, 7, 8), (2, 8, 7, 6)$.
- h) $i = (1, 2, 4, 7)$ に対して, 1 通り, $(6, 3, 5, 8)$.
- i) $i = (1, 3, 4, 6)$ に対して, 1 通り, $(2, 8, 5, 7)$.
- j) $i = (1, 2, 5, 6)$ に対して, 2 通り, $(3, 4, 7, 8), (4, 3, 8, 7)$.
- k) $i = (1, 2, 5, 7)$ に対して, 1 通り, $(4, 3, 6, 8)$.
- l) $i = (1, 3, 5, 6)$ に対して, 1 通り, $(2, 4, 8, 7)$.
- m) $i = (1, 3, 4, 7)$ に対して, 1 通り, $(2, 6, 5, 8)$.
- n) $i = (1, 3, 5, 7)$ に対して, 1 通り, $(2, 4, 6, 8)$.

n) の場合は (2.2) で定義された B -matrix $B = J_0$ に対応する. 他の場合の B -matrices は要素に適当な符号をつけた $w \in S_8$ を用いて $B = J_w := wJ_0w^T$ と表される. その符号は τ -関数が non-singular になるように決定される.

Proposition 4.1 で得られた B -matrices に対応する τ -関数で与えられる D-soliton を分類しよう.

Theorem 4.1. $(i_1, j_1) < (i_2, j_2) < (i_3, j_3) < (i_4, j_4)$ を仮定しよう ($(i_k, j_k) := p_{i_k} + p_{j_k}$). このとき, generic な状況で, DKP 方程式の解は以下の二つの場合になることがわかる (図 7 参照):

- a) $[i_1, j_1 : i_3, j_3], [i_2, j_2 : i_4, j_4]$ または $[i_1, j_1 : i_4, j_4], [i_2, j_2 : i_3, j_3]$ の 2 D-solitons,
- b) ある $\alpha \in \{2, \dots, 4\}$ について, $[i_k, j_k : i_\alpha, j_\alpha], [i_l, j_l : i_\alpha, j_\alpha], [i_m, j_m : i_\alpha, j_\alpha]$ の 3 D-solitons (α, k, l, m はすべて異なるとする).

Proposition 4.1 におけるすべての場合は 2 D-soliton 解を持つが, いく

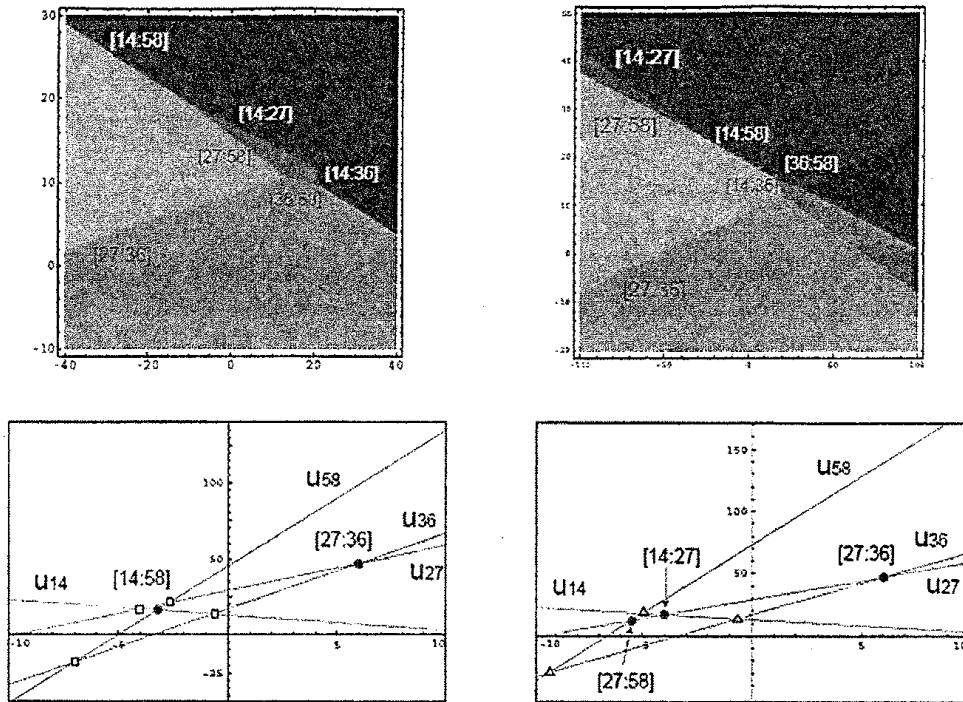


Figure 7. $\mathbf{i} = (1, 2, 3, 5)$, $\mathbf{j} = (4, 7, 6, 8)$ に関連する 2 D-solitons と 3 D-solitons. 左図は $\mathbf{p} = (-3, -2, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ の時の 2 D-solitons. 右図は $p_8 = 8$ を除いて同じパラメータ. 下図は速度 c に対しての支配的な要素(グラフでの黒丸)を示す. 四角は共鳴四角形に対する D-solitons に対応し, 三角は 3 つのソリトンの組からなる共鳴ソリトンに対応している.

つかの場合に 3 D-soliton 解を持たないことに注意しよう. 特に以下のことが成り立つ:

Proposition 4.2. Proposition 4.1 における $\mathbf{n}$ の場合には, 2 D-soliton 解 $[1, 2 : 5, 6]$ と $[3, 4 : 7, 8]$ を持つのみである.

また以下のことが成り立つ:

Proposition 4.3. Proposition 4.1 における $\mathbf{a}$ の場合 $\mathbf{j} = (8, 7, 6, 5)$ は 2 D-solitons, 3 D-solitons の両方の場合がある.

Proof. 例を示す.

a) 2 D-solitons において, $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots, p_8) = (-5, -4, -2, -1, 0, 3, 7/2, 7)$

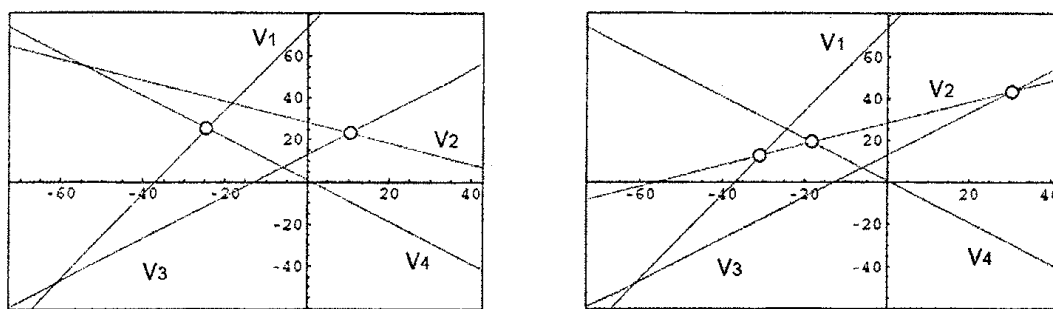


Figure 8. グラフ $v_k(c) = (p_k + p_{9-k})c + p_k^2 + p_{9-k}^2$ ($k = 1, \dots, 4$). 左図は $\mathbf{p} = (-5, -4, -2, -1, 0, 3, 7/2, 7)$ における $[1, 8 : 4, 5]$ と $[2, 7 : 3, 6]$ の 2 D-soliton solutions, 右図は $\mathbf{p} = (-5, -7/2, -2, -1, 0, 3, 4, 7)$ における $[1, 8 : 2, 7]$, $[2, 7 : 3, 6]$, $[2, 7 : 4, 5]$ の 3 D-solitons を示す. v_2 だけが変えられている.

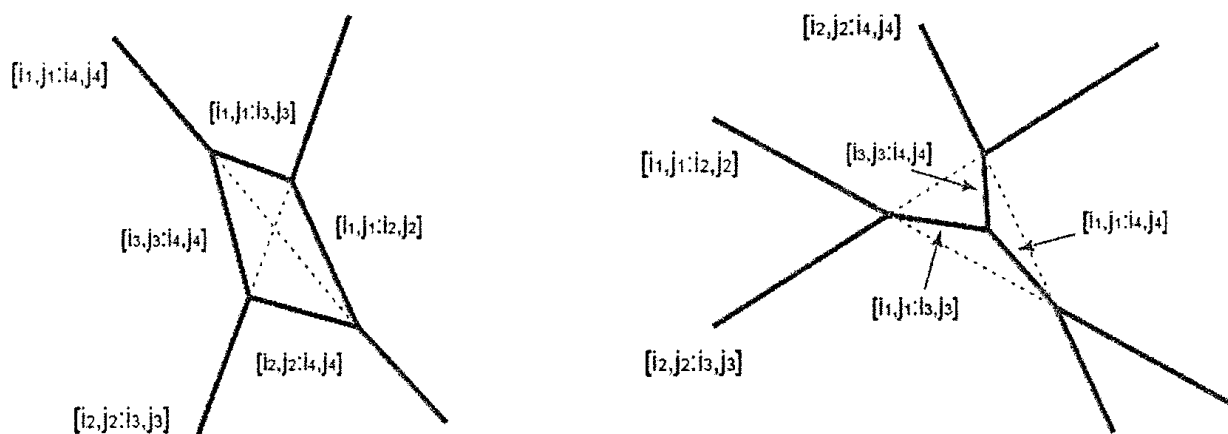


Figure 9. 図 8 における 2 D-solitons と 3 D-solitons の相互作用パターン. 函数 $w = (\ln \tau_2)_x$ は, $x \rightarrow -\infty$ で $w \rightarrow (i_1, j_1, i_2, j_2)$, $x \rightarrow \infty$ で $w \rightarrow (i_3, j_3, i_4, j_4)$ をとる. 図におけるすべての D-solitons は図 8 における v_k の交点と同一視できる.

ととる. このとき, 図 8 における左図の白丸は $[1, 8 : 4, 5]$, $[2, 7 : 3, 6]$ D-solitons に対応する.

- b) 3 D-solitons において, $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots, p_8) = (-5, -7/2, -2, -1, 0, 3, 4, 7)$ ととる. このとき, 図 8 における右図の白丸は $[1, 8 : 2, 7]$, $[2, 7 : 3, 6]$,

[2, 7 : 4, 5] D-solitons に対応する.

図9は, これらの場合の相互作用パターンを示す. □

すでに述べたように, これらの D-soliton は D 型 Weyl 群 W^D の要素と同一視することができる. 2 D-solitons の場合に, 例えば, $w_{1,3} : (i_1, j_1) \leftrightarrow (i_3, j_3)$ と $w_{2,4} : (i_2, j_2) \leftrightarrow (i_4, j_4)$ が現れる. これらの要素によって生成される群は W^D の可換部分群であり, (i_1, j_1, i_2, j_2) の軌道はソリトンにより分割される漸近的な領域を示す (つまり (i_1, j_1, i_2, j_2) , (i_1, j_1, i_4, j_4) , (i_2, j_2, i_3, j_3) , (i_3, j_3, i_4, j_4) である). 分割された領域は τ -函数におけるドミナントな指数函数に対応する $(\hat{E}_1 \hat{E}_2, \hat{E}_1 \hat{E}_4, \hat{E}_2 \hat{E}_3, \hat{E}_3 \hat{E}_4)$. τ -函数は, (i_1, j_1, i_3, j_3) と (i_2, j_2, i_4, j_4) でラベルされる 2 つの項が余計にある (つまり $\hat{E}_1 \hat{E}_3$ と $\hat{E}_2 \hat{E}_4$ である). これらの項は, T-type の 2 A-solitons の場合のときのように共鳴四角形の点でドミナントになる. つまり, 共鳴 2 D-soliton が作られる. 共鳴条件は例えば以下のように与えられる:

$$\begin{cases} k[i_1, j_1 : i_3, j_3] + k[i_3, j_3 : i_4, j_4] = k[i_1, j_1 : i_4, j_4] \\ \omega[i_1, j_1 : i_3, j_3] + \omega[i_3, j_3 : i_4, j_4] = \omega[i_1, j_1 : i_4, j_4] \end{cases}$$

3 D-soliton の場合 (例えば $[i_1, j_1 : i_2, j_2]$, $[i_2, j_2, i_3, j_3]$, $[i_2, j_2 : i_4, j_4]$ としよう), 部分群の要素として $w_{1,2}$, $w_{2,3}$, $w_{2,4}$ がある. このとき, 部分群は $w_{1,3}$, $w_{1,4}$, $w_{3,4}$ を含み, これらはペアの共鳴によって生成される D-soliton である. つまり $w_{k,l}$ は $[i_k, j_k : i_l, j_l]$ の D-soliton を示す. それぞれの共鳴関係は積 $w_{i,2} \cdot w_{2,j} = w_{i,j}$ で表される. 図9は, 図8に現れている 2 D-soliton と 3 D-soliton の相互作用パターンを示す.

Proposition 4.1 における 2 D-soliton 解に対して, 以下のことが成り立つ:

Proposition 4.4. 上で作られた 2 D-solitons は, 交点で穴が 1 つ生じるという意味で, すべて共鳴ソリトンである. つまり, すべて 1 つ穴のある T-type である.

Proposition 4.1 における 3 D-soliton に対して, 以下のことが成り立つ:

Proposition 4.5. 上で作られた 3 D-soliton の任意のペアは Y 字を作る. こ

の3 D-soliton 解は共鳴による穴を持たず, 4つの共鳴Y字型ソリトンの頂点を成す.

最後に, 一般的な場合 $M = 4N$ を考えよう. 上三角部分に $2N$ 個の非零成分 b_{i_k, j_k} ($k = 1, \dots, N, 1 = i_1 < \dots < i_N, i_k < j_k$) を持つ B -matrix を考える.

Proposition 4.6. 行列 J_0 (2.1) で与えられる $4N \times 4N$ B -matrix から作られる τ_N -函数 (1.2) は generic な状況で N D-solitons のみを持つ.

他の場合は B -matrix $B = J_w$ に対応する. ここで J_w は $J_w := wJ_0w^T$ ($w \in S_{4N}$ は $w = [2 : 4N] \cdot [4 : 4N - 2] \cdots [2N : 2N + 2]$ で与えられる置換) で定義される:

$$J_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Proposition 4.7. 行列 J_w (4.1) で与えられる $4N \times 4N$ B -matrix から作られる τ_N -函数 (1.2) で生成される D-solitons の数は N から $2N - 1$ の任意の数である.

5. まとめ

DKP 方程式の pfaffian で書かれる解を調べ, ソリトン相互作用に Weyl 群が関係していることを明らかにした. ソリトンの分類を行うにあたって, 石川-若山の pfaffian の和公式が重要な役割を果たした. D 型 Weyl 群の働きによって, DKP 方程式のソリトン相互作用は KP 方程式のそれに比べて非常に複雑になることがわかった. KP 方程式の場合には, ソリトン相互作用は Grassmannian との関係がよく理解できているが, DKP 方程式の場合

にはまだその辺りが理解できておらずこれを解明することが今後の課題である.

- [1] Adler M, Horozov E and van Moerbeke P, 1999 The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials, *Int. Math. Res. Notice* **5**, 69–88
- [2] Biondini G and Kodama Y 2003 On a family of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation which also satisfy the Toda lattice hierarchy, *J. Phys. A* **36**, 10519–10536
- [3] Hirota R and Ohta Y 1991 Hierarchies of Coupled Soliton Equations. I, *J. Phys. Soc. Japan* **60**, 798–809
- [4] Ishikawa M and Wakayama M, 1995 Minor Summation Formula of Pfaffians, *Linear and Multilinear Algebra* **39**, 285–305
- [5] Isojima S, Willox R and Satsuma J 2002 On various solution of the coupled KP equation, *J. Phys. A, Math. Gen.* **35**, 6893–6909
- [6] Isojima S, Willox R and Satsuma J 2003 Spider-web solution of the coupled KP equation, *J. Phys. A, Math. Gen.* **36**, 9533–9552
- [7] Jimbo M and Miwa T 1983 Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **19**, 943–1001
- [8] Kac V G and van de Leur J W 1998 The geometry of spinors and the multicomponent BKP and DKP hierarchies, *The Bispectral Problem*. CRM Proc. Lecture Notes **14**, AMS, Providence, 159–202
- [9] Kakei S 2000 Dressing method and the coupled KP hierarchy, *Phys. Lett. A* **264**, 449–458
- [10] Kodama Y 2004 Young diagrams and N -soliton solutions of the KP equation, *J. Phys. A* **37**, 11169–11190