

Minimal Flow の Homological Mixing Property

慶応大・工・石井一平

§1. minimal flow の弱混合性と固有函数

M は 局 多 様 体 と し、 q_t は M 上 の minimal flow と す る。こ
こ に、minimal flow と は、す べ て の 軌 道 が 相 空 間 上 稠 密 で あ る
よ う な flow の こ と で あ る。 $C(M)$ に よ っ て、 M 上 の S^1 -値
連 続 函 数 の 集 合 を 表 わ す。 $(S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\})$

$f \in C(M)$ に 対 し、 $\lambda \in \mathbb{R}$ が 存 在 し、 $f(q_t(m)) = \exp(2\pi i \lambda t) \cdot f(m)$
が 任 意 の $m \in M, t \in \mathbb{R}$ に つ い て 成 り 立 つ と き、 f は q_t の
固有函数 で あ る と い う。

ま た、 q_t が 次 の 性 質 (*) を も つ と き、 q_t は (位 相 的 に) 弱混
合 的 で あ る と い わ れ る。

(*) 任 意 の 三 つ の 開 集 合 U_0, U_1, U_2 に 対 し、あ る $t \in \mathbb{R}$ が 存 在
し、 $q_t(U_0) \cap U_1 \neq \emptyset, q_t(U_0) \cap U_2 \neq \emptyset$ と な る。

[注] 弱混合性は、flow の minimality と は 独 立 な 性 質 で あ る。

minimal flow の弱混合性と固有函数とを関係づける次の結果が知られている。

Theorem ([1]). φ_t が minimal flow であるとき、次の二つの条件は同値である。

- i) φ_t の固有函数は定数に限る。
- ii) φ_t は弱混合的である。

f を φ_t の定数でない固有函数とすると、 $K = \{f = \text{const.}\}$ は φ_t の cross-section になることは容易にわかる。従って、 minimal flow については、上の定理により、

" cross-section をもたないならば弱混合的"

ということが成り立つ。しかし、その逆は成り立たない。それは、弱混合性は flow の time-change によって変わりうる性質であるのに対し、 cross-section の存在は time-change によって変わらない性質であることによる。以上のような考察から " cross-section の非存在" ということから、弱混合性とは異なり、しかも time-change にはよらないある種の混合性が導かれることが予想される。それがここにある $\text{Homological Mixing}$ であり、これを次節に述べる。

§2. homological mixing

[2] に従って 次のような記号, 言葉を用いる。

- (a). $R(M)$ は, $C(M)$ の元 $f(x)$ で, 実数値連続函数 $h(x)$ によって $f(x) = \exp(Fh(x))$ と表わされるものたちの集合とする。
- (b) $f \in C(M)$ に対し, $[f]$ で f の代表する $C(M)/R(M)$ の class を表わす。
- (c) $f \in C(M)$ に対し, $\Delta_{(m,mt)} \arg f$ は $m \in M$ から $mt = \varphi_t(m)$ に至る軌道に沿う $\arg f$ の変化を表わす。
- (d). $A_m(f) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi t} \Delta_{(m,mt)} \arg f$
- (e) $K(CM)$ が $[f] \in C(M)/R(M)$ に属する cross-section であるとは, K が ある $g \in [f]$ によって $K = \{g = \text{const.}\}$ と表わせる cross-section であることという。

[2] では cross-section の存在に関して次の定理が示されている。

Theorem A. ([2]) $f \in C(M)$ とするとき次の二つは同値。

- i) $[f]$ に属する cross-section が存在する。
- ii) $\int_M A_m(f) d\mu > 0$ (or < 0) がすべての有限不変測度 μ に対して成り立つ。

(この定理では, flow は minimal であるとは仮定しない。)

ここで次の定義を与える。即ち、 $f \in C(M)$ とするとき、

$$\begin{cases} N(f) = \{m \in M \mid A_{(m,mt)} \arg f \text{ は } t \rightarrow \infty \text{ のとき下に有界}\} \\ P(f) = \{m \in M \mid A_{(m,mt)} \arg f \text{ は } t \rightarrow \infty \text{ のとき上に有界}\} \end{cases}$$

と定義する。このとき、次の結果が得られる。

Theorem B. q_t が minimal flow で、 $f \in C(M)$, $[f] \neq 0$ とするとき、次の四条件は同値である。

- (1) q_t は $[f]$ に属する cross-section をもたない。
- (2) $A_m(f) = 0$ for a.e. m w.r.t. any finite invariant measure.
- (3) $A_m(f) = 0$ for rare m
- (4) $N(f) \neq \emptyset$ かつ $P(f) \neq \emptyset$ としても、 $N(f), P(f)$ は共に、 σ 1 類集合 (i.e. 可算個の nowhere dense compact sets の和) である。

証明は後で与えることにして、先ず (4) の条件が一種の混合性を表わすことを説明する。

U を可縮な連結開集合とする。 $\arg f(q_t(m))$ は (ある (t, m) で値を指定して) $\mathbb{R} \times U$ の連続函数である。今、

$$V(f, U; t) = \{ \arg f(q_t(m)) \mid m \in U \}$$

とおくと、条件 (4) の仮定のもとに、任意の開集合 U に対し、

$$(**) \bigcap_{T > 0} \left(\bigcup_{t > T} V(f, U; t) \right) = \mathbb{R}$$

であることが容易に示される。これは、 q_t によって U が

f の表わす homological な空間に $t \rightarrow \infty$ のとき限りなく引き延ばされることを示している。

[注意]

1. $[f]$ に属する cross-section が存在すれば

$$\bigcap_{T>0} \left(\bigcup_{t>T} V(f, U; t) \right) = \emptyset$$

である。

2. $[f]$ の中に、固有函数が存在しなければ

$$(***) \quad \left[\sup V(f, U; t) - \inf V(f, U; t) \right] \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。しかし、性質 (***) は、必ずしも time-chane によって不変ではない。(**) と (***) の違いは、被覆面を考えればよくわかる。

以下に Theorem B の証明の概略を述べる。

$\Sigma(CM)$ を flow に接しない $(n-1)$ -次元開球とする。($n = \dim M$)
このとき、次の性質をもつ minimal flow $(\tilde{M}, \zeta_t)$ が構成される。
([3]) :

(i) 相空間 $\tilde{M}$ は compact metric space.

(ii) 連続写像 $p: \tilde{M} \rightarrow M$ が存在して $p \circ \zeta_t = \zeta_t \circ p$.

(iii) $\overline{p^{-1}(\Sigma)}$ は ζ_t の cross-section

(iv) $\dim \overline{p^{-1}(\Sigma)} = 0$

(v) 任意の ζ_t の finite invariant measure に対し、ほとんどいっぺん $T=3$ とこ
ろの m に対し、 $p^{-1}(m)$ は singleton.

以下 $(\tilde{M}, \zeta_t)$ を上のように構成された *minimal flow* とする。

さて、 $f \in C(M)$ は与えられたものとし、 Σ を上の (M, ζ_t) の構成に表われる $(n-1)$ -次元の *flow* に接する球体とする。 $x \in \Sigma$ に対し、 $T(x) = \inf\{t > 0 \mid \zeta_t(x) \in \bar{\Sigma}\}$ とおく。そして、 $\gamma'_x = \{\zeta_t(x) \mid 0 \leq t \leq T(x)\}$ 、 γ''_x は $\zeta_{T(x)}(x)$ と x とを Σ の中で結ぶ道とし、

閉曲線 γ_x を $\gamma_x = \gamma'_x + \gamma''_x$ と定める。さらに、 D_j は集合 $\{x \in \Sigma \mid \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_x} \arg f = j\}$ の Σ における内点のみを集合とする。但しここで $\Delta_{\gamma_x} \arg f$ は $\arg f$ の γ_x に沿う変化である。

このとき、 $\tilde{D}_j = \overline{p^{-1}(D_j)}$ は $(\tilde{M}, \zeta_t)$ の *cross-section* とする。さらに、 $\tilde{D}_j^*$, $\tilde{\Sigma}_0^1$, $\tilde{\Sigma}_0^2$ を

$$\begin{aligned} \tilde{D}_0^* &= \emptyset, \quad \tilde{D}_j^* = \bigcup_{k=0}^{|j|-1} \zeta_{k\delta}(\tilde{D}_j) \quad (j = \pm 1, \pm 2, \dots, \delta \text{ は } \pi \text{ 分の正数}) \\ \tilde{\Sigma}_0^1 &= \bigcup_{j>0} \tilde{D}_j^*, \quad \tilde{\Sigma}_0^2 = \bigcup_{j<0} \tilde{D}_j^* \end{aligned}$$

と定義する。 $\tilde{\Sigma}_0^1, \tilde{\Sigma}_0^2$ は ζ_t の *cross-section* であり、 $\tilde{\Sigma}_0^1 \cap \tilde{\Sigma}_0^2 = \emptyset$

としてよい。そこで $\tilde{f}_j : \tilde{M} \rightarrow S^1$ ($j=1, 2$) を、

$$\tilde{f}_j(x) = \exp(2\pi i F(t_j(x)/T_j(x)))$$

$$\begin{cases} t_j(x) = -\sup\{t \leq 0 \mid \zeta_t(x) \in \tilde{\Sigma}_0^j\} \\ T_j(x) = \inf\{t > 0 \mid \zeta_t(\zeta_{-t_j(x)}(x)) \in \tilde{\Sigma}_0^j\} \end{cases}$$

と定めると、 $\tilde{f}_j$ は連続函数で $\tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \equiv f \cdot p \pmod{R(M)}$ となる。

しかも、 $[f] \neq 0$ ならば $[f \cdot p] \neq 0$ である (B) を参照)。

次に $\tilde{\Sigma}_k^j$ ($j=1,2, k=1,2,3,\dots$) を次のように定める。先ず $\tilde{\Sigma}_0 = \tilde{\Sigma}_0^1 \cup \tilde{\Sigma}_0^2$ とし, $P_0: \tilde{\Sigma}_0 \rightarrow \Sigma_0$ は Poincaré-map とする。そして

$$\begin{cases} \tilde{\Sigma}_1^1 = \{x \in \tilde{\Sigma}_0^1 \mid P_0^{-1}(x) \in \tilde{\Sigma}_0^1\} \\ \tilde{\Sigma}_1^2 = \{x \in \tilde{\Sigma}_0^2 \mid P_0^{-1}(x) \in \tilde{\Sigma}_0^2\} \end{cases}$$

とおき, $\tilde{\Sigma}_1 = \tilde{\Sigma}_1^1 \cup \tilde{\Sigma}_1^2$ とすると, $\tilde{\Sigma}_1^j, \tilde{\Sigma}_1$ はやはり cross-section となる。以下同様に

$$\begin{cases} \tilde{\Sigma}_k^1 = \{x \in \tilde{\Sigma}_{k-1}^1 \mid P_{k-1}^{-1}(x) \in \tilde{\Sigma}_{k-1}^1\} \\ \tilde{\Sigma}_k^2 = \{x \in \tilde{\Sigma}_{k-1}^2 \mid P_{k-1}^{-1}(x) \in \tilde{\Sigma}_{k-1}^2\} \\ \tilde{\Sigma}_k = \tilde{\Sigma}_k^1 \cup \tilde{\Sigma}_k^2 \\ P_k: \tilde{\Sigma}_k \rightarrow \tilde{\Sigma}_k \text{ は Poincaré-map} \end{cases}$$

と定義する。 $\tilde{\Sigma}_k^j$ は cross-section であり, $\tilde{\Sigma}_0^j$ の compact から open な部分集合となる。こう定義すると次の補題が成立する。

LEMMA 1. $f_1 \circ f_2 \equiv 1 \pmod{R(\tilde{M})}$ となるのは, ある自然数 n に対し, $\tilde{\Sigma}_n^1 \cap \tilde{\Sigma}_n^2 = \emptyset$ となるときであり, かつそのときに限る。

この補題を用いると, さらに次のことが言える。

LEMMA 2. $[f] \neq 0$ かつ $A_{\tilde{M}}(f_1 \circ f_2) = 0$ かつある $\tilde{m} \in \tilde{M}$

についてあり立てば、任意の n に對し、 $\tilde{\Sigma}_n^1 \neq \emptyset$, $\tilde{\Sigma}_n^2 \neq \emptyset$ である。しかもこのとき、 $\bigcap_{k \geq 0} \tilde{\Sigma}_n^k$ は $\tilde{\Sigma}_0^j$ の nowhere-dense compact subset である。

この補題により、Theorem B の (2), (3), (4) の同値性が得られる。また (1) と (2) の同値性は、Theorem A と $(\tilde{M}, \xi_t)$ の性質 (V) とから導かれる。

§3. Example.

horocycle flow などが $A_m(t) = 0$ なる flow の例であるが、ここでは、 $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ 上の flow を例に挙げる。

ξ_t を $\mathbb{T}^3$ 上の flow で $\frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial z}$ なる vector-field で生成されるものとする。 $(g(x+1, y) = g(x, y+1) = g(x, y))$ 。
($\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
この flow に関して、次のことが知られている。

Proposition. $g(x, y) = \sum a_{m,n} \exp(2\pi F(m\gamma + ny))$ で

$$(*) \quad \sum_{(m,n) \neq (0,0)} |a_{m,n}| / |1 - \exp(2\pi F(m + n\gamma))|$$

が発散するとき、 ξ_t は minimal flow である。

以下では (*) が発散する場合を考える。 f_1, f_2, f_3 を

$C(\mathbb{T}^3)$ の元で $C(\mathbb{T}^3)/R(\mathbb{T}^3)$ の base になるものとする。

このとき、(必要ならば $g(x, y)$ のかわりに $c + g(x, y)$ ($c \in \mathbb{R}$) を考え

2). $A_m(f_j)$ ($j=1, 2, 3$) は $\mathbb{Q}$ 上独立でないような minimal flow ξ_t が存在することがわかる。従ってこのような ξ_t についてはある $f \in C(\mathbb{T}^3)$ に対し $[f] \neq 0$ でかつ $A_m(f) = 0$ となる。
 Theorem B によれば、このとき ξ_t は f の表わす方向への "homological mixing property" をもつことがわかる。

REFERENCES

- [1] H.B. Keynes, The structure of weakly mixing minimal transformation groups, Illinois J. Math. vol 15 (1971) 475-489.
- [2] S. Schwartzman, Asymptotic cycles, Am. Math. vol 66 (1957) 270-284.
- [3] I. Ishii, On the first cohomology group of a minimal flow, Tokyo J. Math, vol 1 (1978) 41-56.