

経験曲線効果を考慮した 新製品とリサイクル製品の在庫管理

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理科学専攻

是枝 友樹 (Tomoki Koreeda) 北條 仁志 (Hitoshi Hohjo)

Department of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science

Osaka Prefecture University

1 はじめに

リサイクル製品を取り扱っている業者では、顧客が使用した使用済み製品を回収し、洗浄を行い、製品として販売している。近年ではインターネットを利用して製品を回収、査定、販売する業者も現れている。このような背景の中で業者は、製品が循環しているサプライチェーン、つまり業者は顧客が使った製品を回収し、洗浄などの処理を行い、製品として販売する場合において、自社で生産をした新製品とリサイクル製品の最適な在庫を与え、利益を最大にすることを考えている。

Chen, Bell[1] では、新製品とリサイクル製品が同品質であるモデルが提案された。このモデルは使用済み製品を完全に再生出来る状況では有効であるが、リサイクル製品の品質が新製品に比べ劣る状況では適切ではない。また Takahashi et.al.[4] では、製品の需要がそれぞれ定数である状況について考察された。しかしながら顧客は品質や価格からそれぞれの製品を購入するときの効用を比較し、どちらの製品を購入するのか、または製品を購入しないのかを選択する。したがって需要はその製品や他製品の品質や価格、さらには顧客の製品における嗜好に依存したものとなる。

また他のリサイクル製品の在庫管理の研究では経験曲線効果を考慮したモデルが提案されている。経験曲線効果とは生産回数が増加するたびに、一定の比率で製品単位当たりの段取り費用が減少することである。これは Boston Consulting Group により様々な産業において確認された。Maity et.al.[3]、Jaber et.al.[2] では段取り費用として経験曲線効果を考慮しているが、計画期間での生産回数が決定されているモデルなので、段取り費用が定数となり、解析結果に影響されないものであった。

本稿では「新製品の品質」は「リサイクル製品の品質」以上であると仮定したサプライチェーン在庫管理問題を扱う。これはリサイクル製品が新製品と同品質である場合に加え、新製品よりも品質が劣る場合も考慮している。また顧客がそれぞれの製品を比較して購入するので、より現実的なモデルである。計画期間内で生産回数は定数ではなく、決定変数に依存する。すなわち経験曲線効果を考慮した段取り費用も、決定変数に依存している。

本稿において次節ではモデルの設定を示す。3 節では目的関数や制約条件を示す。4 節で業者の利益を最大にする最適解の導き方を説明する。5 節では数値例と感度分析を実施する。6 節でまとめを述べる。

2 モデル

2.1 製品の設定

本稿では計画期間 T における、新製品とリサイクル製品を販売する 1 つの業者の在庫管理を考察する。本モデルにおいて対象とする製品はゲーム機や書籍など、業者が顧客から回収したものを洗浄することによりリサイクル製品として販売できるものである。業者は回収した製品を洗浄し、販売する。使用済み製品として回収されるのは新製品として購入されたものであり、リサイクル製品として販売されたものは回収されない。新製品の価値や価格はリサイクル製品の価値や価格以上であり、リサイクル製品は同品質である。業者は顧客が新製品を使用したものを単位時間当たり $d(t, p)$ だけ回収する。この $d(t, p)$ は時刻 t と使用済み製品の回収費用 p に対し増加関数であり、本稿では $d(t, p) = (\alpha_0 + \alpha_1 t)D + \beta p$ とする。ここで $\alpha_0, \alpha_1, \beta > 0$ であり、 D は製品に興味を持っている単位時間あたりの顧客数を表す顧客率である。この顧客率には 2.3 節で述べるように製品を購入しない顧客も含まれている。

2.2 業者の設定

業者は新製品の初期在庫 $s(0)$ を持っており、リサイクル製品の初期在庫はない。業者は新製品の不足を許さず、新製品の在庫量が 0 になると量 Q を生産する。本モデルでは生産や洗浄にリードタイムはなく、新製品の生産者が機械を操作するときにかかる段取り費用について経験曲線効果を考慮する。リサイクル製品の需要率より回収率 $d(t, p)$ の方が小さい時刻において、リサイクル製品は在庫切れ状態である。リサイクル製品が在庫切れ状態であるときに、業者はリサイクル製品を購入できない顧客に対し罰金を支払うことはない。一方でリサイクル製品の在庫量が大きくなりすぎるのを防ぐために、業者はリサイクル製品の在庫量が閾値 c に達すると回収を停止し、0 で回収を開始する。また新製品の価格は定数、リサイクル製品の価格は業者が顧客から使用済み製品を回収する費用の定数倍である。

2.3 顧客の設定

v_1 を新製品の価値、 v_2 をリサイクル製品の価値とする。本稿では $v_1 \geq v_2$ である。また $x_i \in [0, 1]$ を顧客 i の製品の嗜好とし、すべての顧客の嗜好は $[0, 1]$ 上に一様に分布している。ここで $x_i = 0$ である顧客は新製品を嗜好し、 $x_i = 1$ である顧客はリサイクル製品を嗜好していることを表す。 p_1 を新製品の価格、 p を使用済み製品の回収費用、 α を $\alpha > 1$ である定数、 αp をリサイクル製品の価格、 r を単位距離あたりの移動費用とする。顧客 i が新製品を購入したときの効用 $U(x_i)$ 、リサイクル製品を購入したときの効用 $V(x_i)$ を

$$U(x_i) = v_1 - p_1 - rx_i, \quad V(x_i) = v_2 - \alpha p - r(1 - x_i)$$

で与える。

顧客 i は $0 \leq U(x_i)$ かつ $V(x_i) \leq U(x_i)$ ならば新製品を購入し、 $0 \leq V(x_i)$ かつ $U(x_i) \leq V(x_i)$ かつリサイクル製品の在庫があるならばリサイクル製品を購入する。また

$0 \leq U(x_i)$ かつリサイクル製品の在庫がないならば新製品を購入する。それ以外の顧客はどちらの製品も購入しない。

2.4 仮定

新製品とリサイクル製品の在庫量の推移を図1,2で表す。本稿では図1で表したとおり、計画期間 T において新製品の初期在庫 $s(0)$ が0になる時刻が存在する場合を考える。 T_1 をリサイクル製品の需要率が $d(t, p)$ に等しくなる時刻とする。リサイクル製品を購入したい顧客はリサイクル製品が品切れであるときに新製品の購入をすることはない場合について言及する。すなわち $\frac{v_1 + v_2 - p_1 - r}{\alpha} \leq p$ を仮定する。

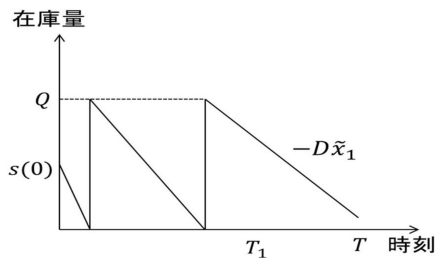


図 1: 新製品の在庫量

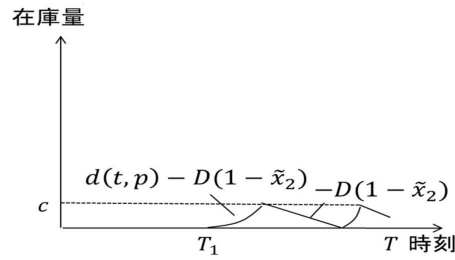


図 2: リサイクル製品の在庫量

3 問題

3.1 表記法

本稿において以下の表記法を用いる。

- C_u : 単位製品当たりの生産費用 ($C_u < p_1$)
- C_p : 単位製品当たりのリサイクル費用 ($C_p < C_u$)
- h : 単位製品単位時間当たりの保管費用
- m : 生産回数
- k : リサイクル回数
- s_1 : 段取り費用の初期値
- s_n : n 回目の生産における段取り費用
- b : 費用弾力性 ($0 < b < 2$)

リサイクル回数とは業者が計画期間 T において、使用済み製品の回収を開始する回数である。例えば図2ではリサイクル回数は2回である。費用弾力性とは習熟率に対応した定数である。上記の表記法を用いると、経験曲線効果から $s_n = s_1 n^{-b}$ となる [2]。

3.2 関数

本節では解析をするために必要な関数を記述する。それぞれの顧客の製品における嗜好に対して、 $[0, \tilde{x}_1]$ の区間内にいる人を新製品を購入したい人、 $[\tilde{x}_2, 1]$ の区間内にいる人をリサイクル製品を購入したい人とする、効用関数と 2.3 節の購買条件から

$$\tilde{x}_1 = \frac{v_1 - p_1}{r}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{-v_2 + \alpha p + r}{r} \quad (1)$$

となり、新製品の需要率は $D\tilde{x}_1$ 、リサイクル製品の需要率は $D(1 - \tilde{x}_2)$ である。

また $D(1 - \tilde{x}_2) = d(t, p)$ となる時刻 T_1 は

$$T_1 = \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{v_2 - \alpha p}{r} - \alpha_0 - \frac{\beta p}{D} \right) \quad (2)$$

となる。リサイクル製品の需要率は時刻 t に対し定数であり、使用済み製品の供給関数は時刻 t に対し増加関数である。従って時刻 T_1 まではリサイクル製品の在庫量は 0 で、時刻 T_1 以降に在庫が蓄積される。

$\tilde{t}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) を i 回目の生産における生産時刻、 $t_1 = T_1$ とし、 t_i ($i = 2, 3, \dots, k$)、 $\check{t}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ または k) をそれぞれ i 回目の使用済み製品の購入を開始する時刻と停止する時刻とする。 $u = \frac{1}{2}\alpha_1 D$, $v = \alpha_0 D + \beta p - D(1 - \tilde{x}_2)$ とおくと

$$\tilde{t}_i = \frac{s(0)}{D\tilde{x}_1} + \frac{Q(i-1)}{D\tilde{x}_1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (3)$$

$$\check{t}_i = \frac{-v + \{v^2 + 4u(ut_i^2 + vt_i + c)\}^{\frac{1}{2}}}{2u} + T_1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k-1 \text{ または } k) \quad (4)$$

$$t_i = \frac{-v + \{v^2 + 4u(ut_{i-1}^2 + vt_{i-1} + c)\}^{\frac{1}{2}}}{2u} + \frac{c}{D(1 - \tilde{x}_2)} + T_1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k) \quad (5)$$

と表せる。

購入を停止する回数は業者が使用済み製品を購入している間に計画期間が終わるとき $k-1$ 回、購入を停止している間に計画期間が終わるとき k 回である。

3.3 目的関数

目的関数 $PR(Q, p)$ は計画期間 T における新製品とリサイクル製品を販売する業者の利益である。よって我々の問題は生産量 Q 、および業者が顧客から使用済み製品を回収する回収費用 p を決定変数とする最大化問題として定式化される。

目的関数 = 売り上げ - 生産費用 - 使用済み製品の回収費用 - リサイクル費用 - 保管費用 - 段取り費用

リサイクル費用とは回収した使用済み製品を洗浄などの処理を行い、リサイクル製品として販売できる状態にするために要する費用である。

目的関数の各項を数式で表すと以下ようになる。

売り上げ

$$p_1 D \tilde{x}_1 T + \alpha p \{ (\alpha_0 T_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 T_1^2) D + \beta p T_1 \} + \alpha p D (1 - \tilde{x}_2) (T - T_1) \quad (6)$$

生産費用

$$m C_u Q \quad (7)$$

使用済み製品の回収費用 + リサイクル費用

$t_k < T \leq \check{t}_k$ のとき、

$$(p + C_p) \{ (\alpha_0 T_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 T_1^2) D + \beta p T_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{\check{t}_i} ((\alpha_0 + \alpha_1 t) D + \beta p) dt + \int_{t_k}^T ((\alpha_0 + \alpha_1 t) D + \beta p) dt \} \quad (8)$$

$\check{t}_k < T \leq t_{k+1}$ のとき、

$$(p + C_p) \{ (\alpha_0 T_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 T_1^2) D + \beta p T_1 + \sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{\check{t}_i} ((\alpha_0 + \alpha_1 t) D + \beta p) dt \} \quad (9)$$

保管費用

$t_k < T \leq \check{t}_k$ のとき、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\check{t}_1} h(s(0) - D \tilde{x}_1 t) dt + \frac{1}{2} h(m-1) \frac{Q^2}{D \tilde{x}_1} + \int_{\check{t}_m}^T h\{Q - D \tilde{x}_1(t - \check{t}_m)\} dt \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{\check{t}_i} h\{(\alpha_0(t - t_i) + \alpha_1 \frac{t^2 - t_i^2}{2}) D + \beta p(t - t_i) - D(1 - \tilde{x}_2)(t - t_i)\} dt \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\check{t}_i}^{t_{i+1}} h D(1 - \tilde{x}_2)(t_{i+1} - t) dt \\ & + \int_{\check{t}_k}^T h\{(\alpha_0(t - t_k) + \alpha_1 \frac{t^2 - t_k^2}{2}) D + \beta p(t - t_k) - D(1 - \tilde{x}_2)(t - t_k)\} dt \quad (10) \end{aligned}$$

$\check{t}_k < T \leq t_{k+1}$ のとき、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\check{t}_1} h(s(0) - D \tilde{x}_1 t) dt + \frac{1}{2} h(m-1) \frac{Q^2}{D \tilde{x}_1} + \int_{\check{t}_m}^T h\{Q - D \tilde{x}_1(t - \check{t}_m)\} dt \\ & + \sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{\check{t}_i} h\{(\alpha_0(t - t_i) + \alpha_1 \frac{t^2 - t_i^2}{2}) D + \beta p(t - t_i) - D(1 - \tilde{x}_2)(t - t_i)\} dt \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\check{t}_i}^{t_{i+1}} h D(1 - \tilde{x}_2)(t_{i+1} - t) dt + \int_{\check{t}_k}^T h D(1 - \tilde{x}_2)(t_{k+1} - t) dt \quad (11) \end{aligned}$$

段取り費用

$$\sum_{i=1}^m s_1 i^{-b} \quad (12)$$

3.4 制約条件

本モデルにおける制約条件を記述する。使用済み製品の回収費用と単位当たりのリサイクル費用の和はリサイクル製品の販売価格よりも小さいことを制約とする。もしこの制約がなければ業者はリサイクル製品を販売することにより損益を生じる。またリサイクル製品の価格は新製品の価格、リサイクル製品の価値よりも小さいものとする。この制約は顧客がリサイクル製品を購入することを考慮に入れることを表している。さらに1回目の生産における段取り費用と生産費用の和は1回目の生産における新製品の売り上げよりも小さいとする。これらの制約条件は以下のように与えられる。

$$\frac{C_p}{\alpha-1} \leq p \leq \min\{\frac{p_1}{\alpha}, \frac{v_2}{\alpha}\}, \quad \frac{s_1}{p_1-C_u} \leq Q$$

4 解析結果と解法

4.1 解析

数学的な解析結果を記述する。目的関数 $PR(Q, p)$ の Q に関する1階および2階の偏導関数は

$$\frac{\partial PR(Q, P)}{\partial Q} = -mC_u - h\{m(T - \tilde{t}_m)\} < 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 PR(Q, P)}{\partial Q^2} = mh \frac{m-1}{D\tilde{x}_1} > 0 \quad (14)$$

である。式(13)、(14)から $PR(Q, p)$ は Q に対し減少凸関数である。

生産回数 m を固定すると、新製品の生産量と需要の関係から $\frac{Dx_1T-s(0)}{m} \leq Q \leq \frac{Dx_1T-s(0)}{m-1}$ であり、

$$Q^* = \frac{D\tilde{x}_1T-s(0)}{m}, \quad \tilde{t}_m^* = \frac{s(0)}{D\tilde{x}_1} + \frac{m-1}{mD\tilde{x}_1}(D\tilde{x}_1T-s(0)) \quad (15)$$

となる。

また生産回数 m における目的関数を $PR_m(Q, p)$ と表記すると次の結果が成立する。

$$PR_m(Q, p) - PR_{m-1}(Q, p) \geq 0 \iff m^{-b+1}(m-1) \leq \frac{h}{2s_1D\tilde{x}_1(D\tilde{x}_1T-s(0))^2} \quad (16)$$

$m^{-b+1}(m-1)$ は m について増加関数であるので、 m を増加させていき、 $m^{-b+1}(m-1) \leq \frac{h}{2s_1D\tilde{x}_1(D\tilde{x}_1T-s(0))^2}$ を満たさなければ $m^* = m-1$ である。

4.2 解法

本問題を解決するためのアルゴリズムを提案する。

Q, m を決定するアルゴリズム

Step1 $m = 2$ とする。

Step2 $m > \frac{(p_1-C_u)(D\tilde{x}_1T-s(0))}{s_1}$ を満たせば $m^* = m-1, Q^* = \frac{D\tilde{x}_1T-s(0)}{m^*}$ として終了する。

Step3 $m^{-b+1}(m-1) > \frac{h}{2s_1 D \tilde{x}_1} (D \tilde{x}_1 T - s(0))^2$ を満たせば $m^* = m - 1, Q^* = \frac{D \tilde{x}_1 T - s(0)}{m^*}$ と
して終了する。満たさなければ $m = m + 1$ として Step2 に戻る。

Step2 は Q に対する制約条件から導かれる m の制約条件を満たしているかを確認している。もし m の制約条件を満たさなくなれば、制約条件の中での最適解は $m^* = m - 1$ となる。

p を決定するアルゴリズム

Step1 $k = 1$ とする。

Step2 $t_k < T \leq \check{t}_k$ を満たす p において最適値を決定する。

Step3 $\check{t}_k < T \leq t_{k+1}$ を満たす p において最適値を決定する。

Step4 制約条件を満たすすべての p を調べるまで $k = k + 1$ として Step2 に戻る。

Step5 それぞれの最適値での目的関数を比較し、最大となるときの p の値を最適解とする。

本稿では二段階法による解法を与える。本問題の解法はまず Q, m を決定するアルゴリズムにおいて Q^*, m^* を決定する。その Q^*, m^* を目的関数 $PR(Q, p)$ に代入し、 p を決定するアルゴリズムにおいて p^*, k^* を決定する。

5 数値例

数値例として以下のパラメーターを用いる。

$T = 20, d = 10, s(0) = 0.2, p_1 = 3.3, \alpha = 1.5, \alpha_0 = 0.2, \alpha_1 = 0.1, \beta = 1, C_u = 2, C_p = 0.1, h = 0.05, s_1 = 3, b = 0.7, v_1 = 3.5, v_2 = 2.8, r = 0.5, c = 10$

4.3 節の Q, m を決定するアルゴリズムにより最適解は $m^* = 8, Q^* = 9.975$ となり、 p の制約条件は $1.667 \leq p \leq 1.740$ となる。また 4.3 節の p を決定するアルゴリズムにより最適解は $k^* = 4, p^* = 1.740, PR(Q^*, p^*) = 90.7516$ となる。

リサイクル製品の利益率 α 、リサイクル製品の価値 v_2 について上述の数値例を基準として、変化率 $-20\%, -10\%, 10\%, 20\%$ における感度分析を行う。その結果を表 1, 2 に与える。

表 1: 利益率 α に関する感度分析

	m^*	Q^*	p の制約条件	k^*	p^*	PR	$+PR[\%]$
-20%	8	9.975	[2.083, 2.158]	5	2.158	41.7274	-54.0202
-10%	8	9.975	[1.852, 1.927]	5	1.927	83.3049	-8.2056
10%	8	9.975	[1.515, 1.587]	4	1.587	97.0398	6.9290
20%	8	9.975	[1.389, 1.458]	4	1.458	102.530	12.9785

表 1 を参照すると、特に α の -20% の結果について、目的関数が 50% 以下になっていることが見て取れる。従ってリサイクル製品の利益率をうまく定めることで、業者はより大きな利益を得ることができる。一方で表 2 の 20% を参照すると、 p が制約条件の内点である解も存在した。

表 2: 価値 v_2 に関する感度分析

	m^*	Q^*	p の制約条件	k^*	p^*	PR	$+PR[\%]$
-20%	8	9.975	[1.293, 1.379]	4	1.379	67.6024	-25.5083
-10%	8	9.975	[1.480, 1.560]	4	1.560	77.9648	-14.0899
10%	8	9.975	[1.853, 1.921]	4	1.921	105.9480	16.7445
20%	8	9.975	[2.040, 2.102]	5	2.089	92.4974	1.9237

6 まとめ

本稿では、業者が新製品とリサイクル製品を販売している場合の利益の最大化問題を扱い、生産量と使用済み製品の回収費用を決定した。本モデルでは、顧客はそれぞれの製品を購入したときの効用を比べ、製品を購入すると仮定した。顧客が実際に製品を購入をするときには、新製品とリサイクル製品を比較して購入するので、より現実的なモデルを提案したと考えている。また経験曲線効果を考慮した段取り費用が決定変数に依存している場合についても配慮した。本稿においてはリサイクル製品を購入したい顧客はリサイクル製品が品切れであるときに、新製品の購入をすることはない場合について解析することができた。今後の課題としてはリサイクル製品が在庫切れであるときに、リサイクル製品を購入したい顧客は新製品の購入をすることがある場合についての解析が残っている。

参考文献

- [1] Chen, J., Bell, P.C., The impact of customer returns on pricing and order decisions, *European Journal of Operational Research*, Volume 195 (2009), 280-295
- [2] Jaber, M.Y., El Saadany, A.M.A., An economic production and remanufacturing model with learning effects, *International Journal of Production Economics*, Volume 131 (2011), 115-127
- [3] Maity, A.K., Maity, K., Mondal, S.K., Maiti, M., A production-recycling-inventory model with learning effect, *Optimization and Engineering*, Volume 10 (2009), 427-438
- [4] Takahashi, K., Doi, Y., Hirotani, D., Morikawa, K., An adaptive pull strategy for re-manufacturing systems, *Journal of Intelligent Manufacturing*, Volume 25 (2014), 629-645
- [5] Xiao, T., Shi, K., Yang, D., Coordination of a supply chain with consumer return under demand uncertainty, *International Journal of Production Economics*, Volume 124 (2010), 171-180
- [6] 株式会社 SPI, “マーケティング・コミュニケーションの最適化に向けて”, www.spi-consultants.com