

A generalization of Magnus' Theorem

阪大理 中井 喜和

$f(x, y), g(x, y)$ を整係数の 2 変数多項式とする。もしその関数行列式 $\Delta(f, g)/\Delta(x, y)$ の値が 1 であるなら、 x, y が逆に f, g の整係数多項式として表わせるかという問題がある。これは 1939 年 O. H. Keller ([1]) によって提出されたものである。爾来多くの人々が係数環を複素数体まで許すことにより、その証明を試みたが、まだ完全な証明は発見されていない。一方 A. Magnus は [2] において、別の観点よりこの問題をとりあげ、 f, g の次数 m, n がそれぞれ 1 より大きいときは、 m と n とは必ず共通因子を持つことを証明した。この結果より、 m, n のいずれか一方が素数であれば Keller の予想は正しいことが証明される。然し Magnus の証明に使用する漸化式は複雑でその導出は面倒である。本稿では Magnus の定理の簡単な別証明と、それをや、一般化した結果を紹介する。その結果は Keller の予想に対する貢献は多くはないが、その完全な解決にいた

るまでの一里塚としての意義は認めて頂けるものと思う。

1. 擬斉次多項式 $f(x, y)$ を複素係数の2変数多項式とするとき, $S(f)$ で f の台, すなわち $f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$ とするとき $a_{ij} \neq 0$ である様な格子点 (i, j) の集合を表わすことにする. $S(f)$ が $\mathbb{R}^2$ の一つの直線に含まれているとき, f を擬斉次多項式とよぶ. とくにその方程式が $Y + \alpha X = \lambda$ と表わす直線に $S(f)$ が含まれるとき, f を (α) -斉次といい, λ をその次数 (あるいは α -次数) とよぶ. 単に斉次多項式というときは通常の意味の斉次, すなわち我々の定義によれば, (1) -斉次多項式のことをいうこととしよう. さて α を任意の実数とし A_α で次数が α である (α) -斉次多項式の集合とすると, $A = \mathbb{C}[x, y]$ は $A = \bigoplus A_\alpha$ と表わす. これによって次数付きの環になる. このよう次数付きを α -grading とよぶことにしよう. 擬斉次多項式の概念が Keller の問題とかがわりももつのは次の2つの補題による. 証明は易しいから省く.

補題 1. $f(x, y), g(x, y)$ を (α) -斉次多項式とし, その次数を共に $\lambda (> 0), \mu (> 0)$ とする. 且つ関数行列式 $\partial(f, g)/\partial(x, y) = 0$ と仮定する. このとき次のことが成り立つ

(i) $f(x, y) = cx^i y^j, g(x, y) = dx^k y^l$ が共に単項式であれば

$il - jk = 0$ となければならない。

(ii) α が無理数であれば, f, g は共に単項式でなければならぬ。

(iii) α が有理数で, $\alpha = q/p$ とする。 k, l に $p > 0$ で $p \nmid k$ かつ互に素な整数とする。 $\therefore \text{GCD}(p\lambda, p\mu) = d, m' = p\lambda/d, n' = p\mu/d$ とすると, (α) -斉次多項式 h で, $f = e_1 h^{m'}, g = e_2 h^{n'}$ となるようなものが存在する。

補題 2. $f(x, y), g(x, y)$ を 2 変数多項式で $\partial(f, g)/\partial(x, y)$ が定数 (必ずしも 0 でないことを要求しない) であるようなものとする。 α を任意の実数, $f = \bigoplus f_\lambda, g = \bigoplus g_\mu$ をそれぞれ α -grading による直和分解とすると

$$\sum_{\lambda+\mu=S} \frac{\partial(f_\lambda, g_\mu)}{\partial(x, y)} = 0$$

が成り立つ。但し $S \neq 1 + \alpha$ なる実数で, 和は $\lambda + \mu = S$ とする (λ, μ) 全ての整数の組にわたるものとする。

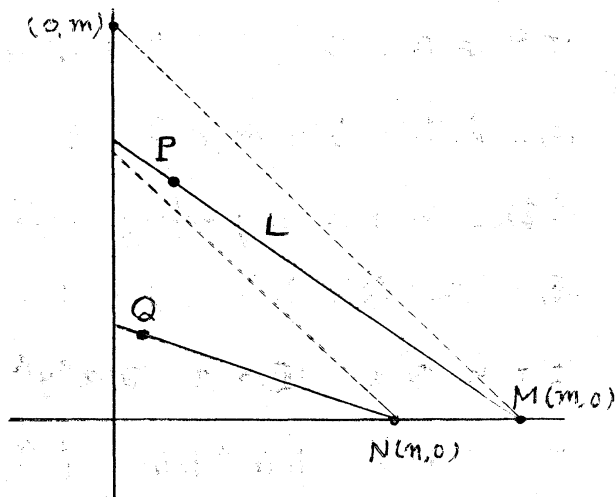
2. Magnus の定理. Magnus の定理の元の形とは異なるが本質的には同一である次の定理を証明する。

定理 1. $f(x, y), g(x, y)$ を複素係数の多項式とし, そ

の次数をそれぞれ m 及び n とする。また関数行列式 $\partial(f, g)/\partial(x, y)$ は 0 でない定数と仮定する。そのとき次の事が成り立つ。

(M₁): $\text{Min}(m, n) > 1$ であれば $\text{GCD}(m, n) > 1$ である。

証明 f_m, g_n をそれぞれ f, g の m 次, n 次の有次部分とする。 $\partial(f_m, g_n)/\partial(x, y) = 0$ となるから(補題 2), 補題 1 より $\text{GCD}(m, n) = 1$ とする。
 1) $f_m = \varepsilon_1 l^m, g_n = \varepsilon_2 l^n$ となるような一次式 l 及び定数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が存在する。一般性を失なうことなく $l = x, \varepsilon_1 = 1$ と仮定してよい。
 $M = (m, 0), N = (n, 0)$ とおく。次に $S(f)$ の点より次の条件を満たす点 P をとり出す。点 M を中心として、 M を通る直線 $X + Y = m$ を時計の針と逆の方向に回転し、はじめて $S(f)$ の点と交わる位置まで移動しそこで止める。その直線をたとえば L とする。 L 上にあつた $S(f)$ の点の中、 X -座標の最小のものを P とする。点 P の座標を (p_1, p_2) とする。同様な方法で $S(g)$ の点 $Q = (q_1, q_2)$ を撰定する。はじめに P あるいは Q のいずれかは X -軸上にないと仮定する。すなわち、たとえば $p_2 > 0$ と仮定する。そのときには



(1) $MP \times NQ$ であるか?

(2) $OP \times OQ$

の何れかが成り立つ。何とすれば、もし (1), (2) の何れも成立し
ないとするれば $p_2/m - p_1 = q_2/n - q_1$, $p_1 q_2 = p_2 q_1$ の何れも成立す。

したがって $p_2 n = q_2 m$. 仮定により $p_2 > 0$ であるから q_2 も
 > 0 . また仮定より $(n, m) = 1$ であるから $m | p_2$, $n | q_2$ でな
ければならない。これは $m > p_2 > 0$ に矛盾する。さていま

(1) が成り立つとし、直線 MP , NQ の方程式をそれぞれ

$$Y + aX = am, \quad Y + bX = bn \quad \text{とすると仮定より } a \neq b \text{ であ}$$

る。いま $a > b$ とし、 $a > \delta > b$ をみける実数を δ とし、 δ -
grading を考えると、 $S(g)$ の中では、 x^n が最大の δ -grade を

もつ。またさき δ を十分 a に近くとれば点 P に対応する

f の項 ~~$x^{p_1} y^{p_2}$~~ とならず $x^{p_1} y^{p_2}$ が最大の δ -grade をもつこと

にたす。従って補題 2 より $\partial(x^n, x^{p_1} y^{p_2}) / \partial(x, y) = n p_2 = 0$ でな

ければならない。これは矛盾である。次に (1) を否定すると、

(2) が成立しなくてはならない。このときは a より少し小さい

実数 δ による δ -grading を考えると、 f の中では $x^{p_1} y^{p_2}$ が最

高の δ -次数をもち、 g の中では $x^{q_1} y^{q_2}$ が最高の δ -次数をもつ

ことにたす。従って $\partial(x^{p_1} y^{p_2}, x^{q_1} y^{q_2}) = 0$ でなければなら

ない。これは $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$ と矛盾する。このように (1), (2) の何れと

仮定しても矛盾が生ずる。ゆえに P, Q 共に X -軸上に存在し

なくてはならないことにたす。 P, Q の選定方法より、これは

f, g 共に x だけの多項式であることの意味する。従って

$\partial(f, g)/\partial(x, y) = 0$ でなければならぬ。これは定理の大前提
 $\partial(f, g)/\partial(x, y) \in \mathbb{C}^*$ に矛盾する。ゆえに $\text{GCD}(m, n) > 1$ である。

3. 定理 2. $f(x, y), g(x, y)$ は定理 1 におけると同様
 とする。このとき次の事実が成立する

M_2 : もし $\text{Min}(m, n) > 2$ であれば, $\text{GCD}(m, n) > 2$ である

証明 $\text{Min}(m, n) > 2$ で $\text{GCD}(m, n) = 2$ とする。すなわち同
 様の考察により次の 2 つの場合に分けられることが直ちにわ
 かる。

$$(I) \quad f_m(x, y) = (xy)^{\frac{m}{2}}, \quad g_n(x, y) = (xy)^{\frac{n}{2}}$$

$$(II) \quad f_m(x, y) = x^m, \quad g_n(x, y) = x^n$$

(I) の場合、定理 1 の場合と

同様に $1 \leq S(f), S(g)$ とそれぞれ
 $\gamma \leq \frac{m}{2}, \gamma \leq \frac{n}{2}$ という領域
 に含まれていることがわかる。

そのとき (0)-grading を考えると

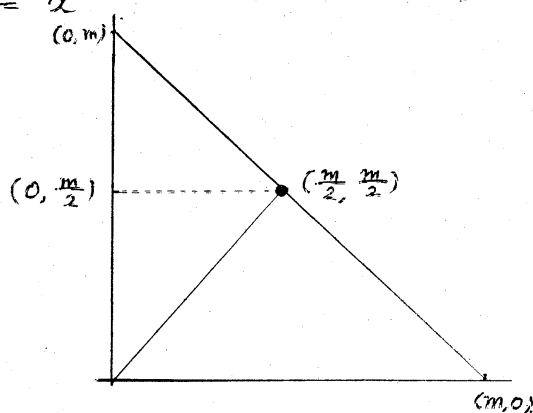
$$f = y^{\frac{m}{2}} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}}) + (\gamma \text{ に変化する次数} < \frac{m}{2} \text{ の項})$$

$$g = y^{\frac{n}{2}} (b_0 + b_1 x + \cdots + b_{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}) + (\gamma \text{ に変化する次数} < \frac{n}{2} \text{ の項})$$

となり、更に補題 1, 2 より $(a_{\frac{m}{2}} = b_{\frac{n}{2}} = 1)$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}} = (c+x)^{\frac{m}{2}}, \quad b_0 + b_1 x + \cdots + b_{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} = (c+x)^{\frac{n}{2}}$$

とある $c \in \mathbb{C}$ が存在することが結論される。このとき、



$$x_1 = c + x, \quad y_1 = y$$

として変数変換を行な ~~い~~ (x, y) に関する多項式とみよ
 f の位 $S(f)$ は $Y < \frac{m}{2}$ に後退し、 g の位 $S(g)$ は $Y < \frac{m}{2}$ に後退する。そうすると定理 1 の証明に使用したのと同様の論法で $S_1(f)$ は $X \geq Y$ とする半平面に、 $S_1(g)$ も同じ様な半平面に含み取られる事になる。即ち f, g の一次部分に f, g の項が存在しない事になる。これは明らかに $\alpha(f, g)/\alpha(x, y) \in \mathbb{C}^*$ に矛盾する。

(II) の場合、すでに示さ
 くり返した論法によって、 f
 の位 $S(f)$ は 半平面

$$Y + \frac{m}{2}X \leq \frac{m}{2}$$

に、 g の位 $S(g)$ も $Y + \frac{m}{2}X \leq \frac{m}{2}$

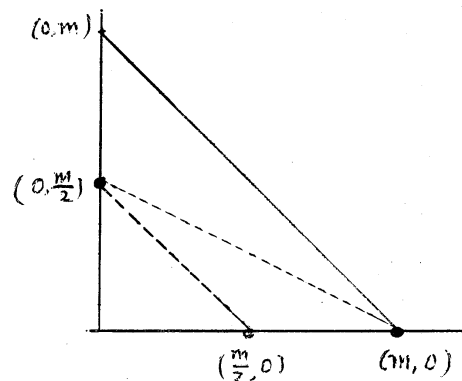
に含み取られていることが確かめられる。ついで $(\frac{1}{2})$ -grading によ
 って、 f, g を整頓すればそれぞれ

$$f(x, y) = (ay + x^2)^{\frac{m}{2}} + ((\frac{1}{2})\text{-次数} < \frac{m}{2} \text{ の項})$$

$$g(x, y) = (ay + x^2)^{\frac{m}{2}} + ((\frac{1}{2})\text{-次数} < \frac{m}{2} \text{ の項})$$

このとき $a=0$ なら、この論法を繰り返すので、 f, g
 共に x だけの多項式であることが帰論で矛盾に達する。 a
 $\neq 0$ のときは次の Jonqui re 変換

$$ay + x^2 = y_1, \quad x = x_1$$



を施す. $f_1(x_1, y_1) = f(x_1, a^T(y_1 - x_1^2))$, $g_1(x_1, y_1) = g(x_1, a^T(y_1 - x_1^2))$ と
 ずくと $\partial(f_1, g_1)/\partial(x_1, y_1) = a^T \partial(f, g)/\partial(x, y)$ である. 一方容易にた
 いがめられるように $S(f_1)$ は $Y + \frac{1}{2}X \leq \frac{m}{2}$ に, $S(g_1)$ は $Y + \frac{1}{2}X$
 $\leq \frac{n}{2}$ に含まれる. 再び定理 1 の証明に使用したのと同じ原
 理を適用すると実は $f_1(x_1, y_1)$ の次数は $\frac{m}{2}$ であり $g_1(x_1, y_1)$
 の次数は $\frac{n}{2}$ に等しいことがたがめられる. すなわち (II)
 場合には定理 1 で否定された場合 $\gcd(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}) = 1$, $\text{Min}(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}) > 1$
 でしかも $\partial(f_1, g_1)/\partial(x_1, y_1) \in \mathbb{C}^*$ に帰着される. かくして (II)
 の場合もおこることはできない. すなわち $\gcd(m, n) = 2$ は
 矛盾を生ずるから $\gcd(m, n) > 2$ である.

4. Keller の問題への応用

定理 3 $f(x, y), g(x, y)$ を次数がそれぞれ m, n の複
 素係数多項式で $\partial(f, g)/\partial(x, y) \in \mathbb{C}^*$ とする. もし m, n が次
 の条件の何れかをみたせば $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[f, g]$ が成り立つ.

- (1) m または n は素数である.
- (2) m または n が 4 に等しい.
- (3) $m = 2p$ (p は奇素数) で $m > n$ のとき.

証明. 簡単のため $m \geq n$ とする. 定理 1, 2 より, 何れ
 の場合も n は m の約数になることがわかる. そうすると, 補

題1より $f_m = \varepsilon g_n^{\frac{m}{n}}$ とする定数 ε が存在する. $f_1 = f - (\varepsilon^{\frac{n}{n}} g)^{\frac{n}{n}}$ は次数が $< m$ で, $\partial(f_1, g)/\partial(x, y) \in \mathbb{C}^*$. ゆえに 次数 $m+n$ に関する帰納法が使え. ゆえに $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[f, g] = \mathbb{C}[f, g]$

注意 $f(x, y), g(x, y)$ は定理1と同様の仮定をみたすとき M_d で次の命題を表わすことにする

$M_d: \text{Min}(m, n) > d \text{ なり } \text{GCD}(m, n) > d \text{ である}$

M_d が任意の d について成り立つことか" Keller の問題が肯定的に与えられたことを意味するとはみやすい. 本論文では

M_1, M_2 を証明したわけであるが, $d \geq 3$ をみたす d について

M_d を証明することは, このような方法で可能であるかどうか ^{について}

は, 著者はや、懐疑的である.

参考文献

- [1] O.H. Keller, Ganze Cremona-Transformationen, Monatshefte für Math. und Phys., 47(1939), 299-306.
- [2] A. Magnus, On polynomial solution of a differential equation, Math. Scand. 3(1955), 255-260
- [3] Y. Nafar and K. Baba, A generalization of Magnus' Theorem, to appear.