

超流動乱流のエネルギースペクトル

大阪市大院理 荒木恒彦 (Tsunehiko ARAKI)

Department of Physics, Osaka City University

概要

最近, Vinen, Skrbek 達により, 超流動乱流と粘性流体の乱流との類似性が議論されている。本研究においては, 渦糸近似を用いた数値計算により, 超流動乱流のエネルギースペクトルを計算し, Kolmogorov 則との比較を行った。渦が一様で等方的なタングルになるにつれて, 渦間距離よりも長波長の領域では, スペクトルは波数の $-5/3$ 乗に近づく。そして, 空間分解能程度の渦輪を消すことによる短波長のエネルギー散逸率を用いると, 波数依存性だけでなく, 絶対値も Kolmogorov 則と一致する。さらに, 波数空間の統計的性質と渦糸タングルの自己相似性との関係を議論するため, 渦の長さ分布を計算した。一様で等方的なタングルに対しては, 分布は $-4/3$ 乗のスケールリングに従う。簡単な仮定を用いることにより, これが Kolmogorov 則と consistent であることを示す。

1 序論

液体ヘリウムは 2.2K 以下の極低温で超流動状態に移行し, 粘性が消失した超流体成分が出現する。超流動状態は, ミクロなスケールの統治則である量子力学が, 粘性という巨視的な量に劇的な変化をもたらす, 典型的な巨視的量子現象として研究されてきた。この状態の多くの現象は, 二流体モデルと呼ばれる現象論により, 非常によく説明される。二流体モデルによれば, 流体は粘性をもつ常流体成分と非粘性の超流体成分とから構成され, それらの間にエネルギーや運動量のやりとりはなく, 両者は独立である。そのため, 非粘性の超流体成分の流れは, 半永久的に減衰しない。ところが, 超流体速度がある臨界速度を超えると, 超流体の渦が 3 次元的に複雑に絡み合った量子渦糸タングルが発生し, 二流体間に渦を介した相互作用 (相互摩擦力) が現れる。その結果, 超流体の流れは減衰する。従って, 超流動の安定性を議論する上で, 渦糸のタングル状態 (超流動乱流) の研究は大変重要である。

ボース凝縮系に特有な巨視的量子状態の産物である量子渦の問題は, 量子流体の根幹に関わる問題として研究されてきた。この量子渦と粘性流体中の渦との違いとして, 以下の点が挙げられる。第一に, 粘性による渦拡散が存在していないため, 量子渦は非常に安定で definite に存在する。そして, 量子性により渦の周りの速度場の循環が量子化されている。実際には, エネルギーが最も低い, 循環の量子数が 1 の渦のみが安定に存在できるため, 全ての渦が同じ循環を持つ。さらに, 渦芯のサイズが微視的で (ヘリウムの場合は 10^{-8} cm), その領域にのみ渦度が集中している。従って, 超流動中では渦糸近似が非常に現実的なモデルとして成立し, 我々の研究でも渦糸近似を用いた数値計算を行った。この渦糸近似を用いることによる利点は, 渦の全長, 長さ分布等の渦糸タングルを特徴づける物理量を簡単に計算できる点である。

最近、超流動乱流と粘性流体の乱流との類似性が議論されている [1, 2, 3]。Stalp 達は、グリッドを用いて超流動乱流を生成し、その減衰過程における全渦度の時間変化を観測した。そして、エネルギースペクトルが Kolmogorov の $-5/3$ 乗則に従うとし、渦度の時間変化を解析すると、実験結果と非常によく一致することを示した [2]。この結果は、非粘性の超流体成分と、粘性をもつ常流体成分が相互摩擦力により結合し、あたかも粘性流体のように振る舞うためであると解釈されている [1, 4]。この実験で、議論されているのは、1.4K よりも高温の常流体成分が十分に存在している温度領域である。しかしながら、温度を下げるにつれ常流体密度は減少し、mK 温度領域では、全流体密度に対し無視できるほど少なくなる。それでは、常流体密度が無視できる mK 温度領域において、このような類似性は存在するのだろうか。これが本研究の主題である。

本研究においては、渦糸近似を用いた数値計算により、相互摩擦力を無視したときの超流動乱流のエネルギースペクトルを計算し、Kolmogorov 則との比較を行う。さらに、渦糸タングルの自己相似性とエネルギースペクトルのスケージング則との関係を明らかにするため、渦の長さ分布を議論する。まず次節で、渦糸近似における渦のダイナミクスとエネルギースペクトルの数値計算法について述べ、3 節で相互摩擦力を無視したときのエネルギースペクトルの計算結果を Kolmogorov 則と比較し、4 節で渦の長さ分布を議論する。

2 数値計算法

超流動乱流に対しては、渦糸近似は非常に有効である。それは、渦度が集中する渦芯の半径 a_0 が 10^{-8} cm と微視的で、循環が量子性により固定されているためである。本節では、渦糸近似を用いた数値計算法について述べる。

まず、渦のダイナミクスの計算方法を説明する。この方法は、Schwarz により超流動中の量子渦の数値計算に導入された [5]。完全流体中の渦は、その位置の局所的な流れとともに運動するため、渦糸近似を用いると、渦の運動方程式は Biot-Savart の法則により与えられる。

$$\dot{\mathbf{s}}(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int d\xi' \frac{\mathbf{s}'(\xi', t) \times (\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi', t))}{|\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi', t)|^3} \quad (1)$$

ここで、 κ は渦糸の循環、 $\mathbf{s}(\xi, t)$ は時刻 t における渦糸の位置ベクトル、 ξ は渦上に沿って測られる長さ、 $\mathbf{s}' \equiv \partial \mathbf{s} / \partial \xi$ は接線方向の単位ベクトルであり、積分は全ての渦に関して行う。次に、 $\xi' \rightarrow \xi$ での $\dot{\mathbf{s}}(\xi, t)$ の発散を回避するため、 ξ' に関する積分を $-R < \xi' - \xi < R$ の範囲の積分（局所的寄与 $\dot{\mathbf{s}}^{\text{loc}}(\xi, t)$ ）とそれ以外の部分（非局所的寄与 $\dot{\mathbf{s}}^{\text{non}}(\xi, t)$ ）とに分割し、渦芯のサイズ a_0 でカットオフを入れる。ここで R は渦糸の曲率半径である。以上の操作を行うと、渦の運動方程式は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{s}}(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \left(\frac{R}{a_0} \right) + \frac{\kappa}{4\pi} \int' d\xi' \frac{\mathbf{s}'(\xi', t) \times (\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi', t))}{|\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi', t)|^3} \quad (2)$$

右辺第 1 項が局所的寄与で、右辺第 2 項が非局所的寄与である。ここで ξ' の積分は $-R < \xi' - \xi < R$ 以外の範囲で行う。通常、計算時間の短縮化のため、 $\dot{\mathbf{s}}^{\text{non}}(\xi, t)$ が $\dot{\mathbf{s}}^{\text{loc}}(\xi, t)$ に比べ十分小さいとして無視する、局所誘導近似を用いるが、本研究では非局所的寄与も含めた計算を行った。

次に、再結合の導入について述べる。粘性流体では、渦同士が局所的に反平行に近づき繋ぎ換えを起こす、再結合の存在が知られている。そのことから、Schwarz が渦糸近似を用いた計算に

再結合を導入した [5]。粘性流体では、再結合は粘性により起こることが知られているが、非粘性の超流体の渦も再結合することが、その後の非線形シュレディンガー方程式の解析により示された [6, 7]。従って、本研究においても渦同士が渦を構成する点の間隔（空間刻み $\Delta\xi = 1.83 \times 10^{-2}$ cm）よりも近づいた場合、再結合したと仮定し繋ぎ換える。境界と渦が近づいた場合も同様である。また、計算の時間刻みは $\Delta t = 4.0 \times 10^{-3}$ sec で、境界は一辺が 1.0 cm の立方体とし、境界条件は固体壁を想定したもので、法線方向の速度場が 0 となるように image vortex を考慮した。

従来の計算法では、得られた渦の配置から 3 次元の速度場を計算し、エネルギースペクトルを計算していた [8]。この方法では、渦系タングルの密度が高くなると膨大な計算時間が必要となる。本研究では、以下で導出する式を用いることにより、渦系の配置から直接エネルギースペクトルを計算している。その結果、高密度な渦系タングルに対しても、エネルギースペクトルを計算することが可能となった。Parseval の定理 $\int d\mathbf{k} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})|^2 = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{r} |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2$, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{r})$ を用いると、単位体積当たりの運動エネルギーは次のようになる。

$$E = \frac{\rho_s}{2} \int d\mathbf{r} |\mathbf{v}_s(\mathbf{r})|^2 = \frac{\rho_s}{2} (2\pi)^3 \int d\mathbf{k} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})|^2 \quad (3)$$

ここで ρ_s は超流体の密度、 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は渦系による速度場である。さらに波数空間での速度場と渦度との関係式 $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k})/|\mathbf{k}|^2$ を用いると

$$E = \frac{\rho_s}{2} (2\pi)^3 \int d\mathbf{k} \frac{|\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|^2} \quad (4)$$

と書ける。渦系近似では、渦度は $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \kappa \int d\xi \mathbf{s}'(\xi) \delta(\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{r})$ と定義できるので、 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k})$ は

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int d\xi e^{-i\mathbf{s}(\xi) \cdot \mathbf{k}} \mathbf{s}'(\xi) \quad (5)$$

となる。エネルギースペクトルを $E = \int_0^\infty dk E(k)$ と定義し、(5) 式を (4) 式に代入すると、渦系近似のもとでのエネルギースペクトルの式が得られる [9]。

$$E(k) = \frac{\rho_s \kappa^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d\Omega_k}{|\mathbf{k}|^2} \int \int d\xi_1 d\xi_2 \mathbf{s}'(\xi_1) \cdot \mathbf{s}'(\xi_2) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2))} \quad (6)$$

ここで $d\Omega_k$ は、球座標の体積要素 $k^2 \sin \theta_k d\theta_k d\phi_k$ である。本研究では、(2) 式を用いた渦のダイナミクスの計算で得られた渦の配置 $\mathbf{s}(\xi, t)$ から、(6) 式により直接エネルギースペクトルを計算する。

3 超流動乱流のエネルギースペクトル

本節では、相互摩擦力を無視したときの超流動乱流のエネルギースペクトルを計算し、Kolmogorov 則との比較を行う。

図 1 は、相互摩擦力を無視したときの渦系タングルの減衰の様子である [10]。初期配置には、192 本の Taylor-Green vortex を用いた (図 1 (a))。初期配置では、渦の向きがそろっているが、非常に多くの再結合過程を含む複雑なダイナミクスの結果、渦は一様で等方的な渦系タングルになる (図 1 (b), (c), (d))。

まず、エネルギースペクトルの波数依存性の時間変化を議論する。図 1 のそれぞれの渦の配置から計算したエネルギースペクトルを図 2 に示す。平均渦間距離に相当する波数 $2\pi/l$ で、波数

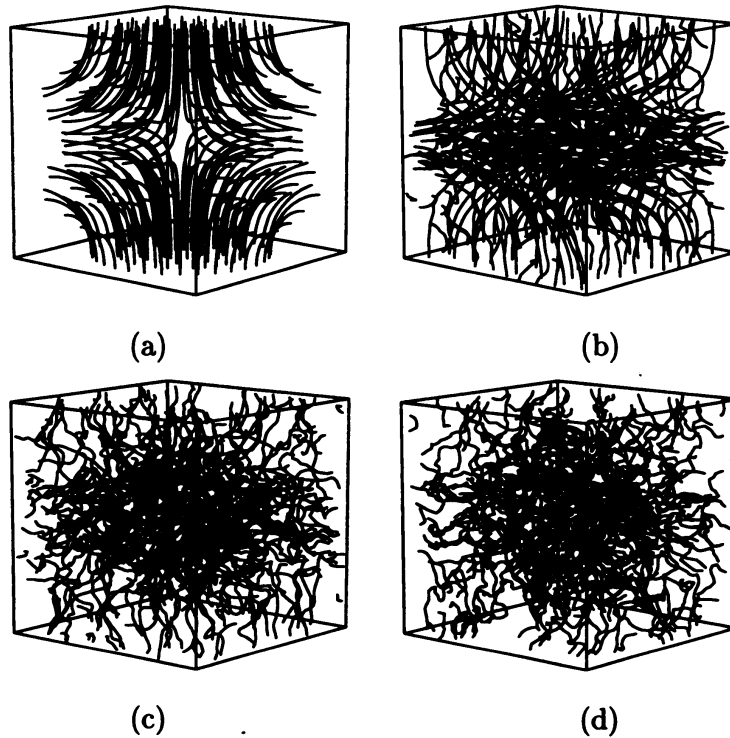


図 1: $t=0$ sec(a), $t=30.0$ sec(b), $t=50.0$ sec(c), $t=70.0$ sec(d) での渦系タングルの時間発展の様子。

依存性が変化していることがわかる。 $k > 2\pi/l$ でのスペクトルは、 $1/k$ に比例する。これは、渦系タングルが複雑な流れ場を作り出すにもかかわらず、この領域では、個々の渦系の近傍の速度場からの寄与が強いことを意味する [3, 11]。一方、 $k < 2\pi/l$ に対しては、渦系の配置の変化と共に、波数依存性が変化することから、スペクトルがタングルのランダムな配置を反映していることがわかる。 $t = 0$ sec では、スムーズな大きな渦系のみが存在しているため、長波長領域に大きなピークをもち、中間ではフラットになっている。ところが、タングルが一様で等方的になるにつれて、 $k < 2\pi/l$ のスペクトルは $k^{-5/3}$ に近づいていく。

Kolmogorov 則は、カスケード描像をベースにした議論から導出できる [12]。慣性領域においては、運動エネルギーは散逸しないで長波長から短波長に伝搬し、慣性領域の端で散逸する。従って、定常状態では、エネルギー散逸率 $\epsilon = -dE/dt$ を慣性領域のエネルギーフラックスと同一視できる。そして、エネルギースペクトルが波数 k とエネルギー散逸率 $\epsilon = -dE/dt$ のみに依存すると考えると、Kolmogorov 則 $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ が導出できる。ここで、 C は 1 のオーダーの定数 (Kolmogorov 定数) である。

前回の我々の研究では、相互摩擦力が無いときの超流動乱流のカスケード過程を議論した [13]。多くの再結合過程により、渦系タングルは小さな渦に分裂していき、この過程は自己相似的に進行する。我々の計算では、空間分解能のオーダーの最も小さな渦輪を消す、カットオフの操作を行っている。このスケールは、実際に散逸が考えられるスケールよりかなり大きい。カスケード過程が小さいスケールで速く進行することから、正当化される。実際に、我々は単位体積当たりの渦の長さの時間変化が、カットオフのスケールにほとんど依存しないことを示した。図 3 は、図 1 のダイナミクスでのエネルギー散逸率 ϵ である。70 sec 以降、散逸率が定常になっているこ

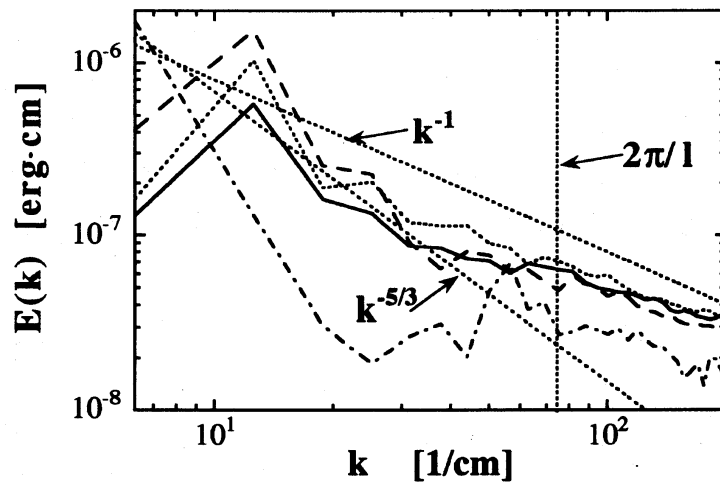


図 2: $t=0$ sec (dot-dashed), $t=30.0$ sec (long-dashed), $t=50.0$ sec (dashed), $t=70.0$ sec (solid) での渦糸タングルのエネルギースペクトル。 l は平均渦間距離。

とがわかる。

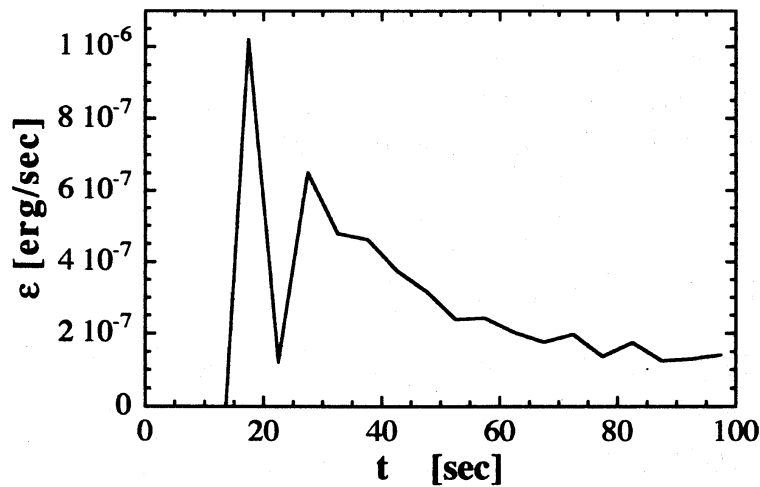


図 3: 図 1 のダイナミクスから求めたエネルギー散逸率 ϵ 。

次に, $t = 70$ sec での定常なエネルギースペクトルと Kolmogorov 則 $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ とを定量的に比較する。Kolmogorov 定数 C は 1 のオーダーの定数として知られ, 超流動ヘリウムにおいても $C = 1.3$ という値が Stalp 達により報告されている [2]。ここでは, $C = 1$ とし, ダイナミクスの計算から得た $\epsilon = 1.866 \times 10^{-7}$ erg·sec $^{-1}$ を用いる。その結果, エネルギースペクトル $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ を一意的に決めることが出来る。図 4 は, $t = 70$ sec でのエネルギースペクトルと $C = 1$, $\epsilon = 1.866 \times 10^{-7}$ としたときの Kolmogorov 則との比較である。 $k < 2\pi/l$ に対して, エネルギースペクトルは, 波数依存性だけでなく, 絶対値も Kolmogorov 則と一致する。

カットオフによる散逸機構は、最も大きな波数 $k \sim 2\pi/\Delta\xi = 343 \text{ cm}^{-1}$ にのみ作用する。しかしながら、 k の小さい領域のエネルギースペクトルがこの散逸率により、確定している。この結果は、まさに慣性領域の描像を指示している。我々の結果では、Kolmogorov 領域と散逸領域の間に $1/k$ の領域が存在するが、エネルギーフラックスはこの領域でも存在していると思われる。この領域では、個々の渦からの $1/k$ の寄与とエネルギーフラックスの寄与の両方を含むが、前者が支配的である [11]。また、この領域でのカスケード過程の詳細は、今後の課題である。

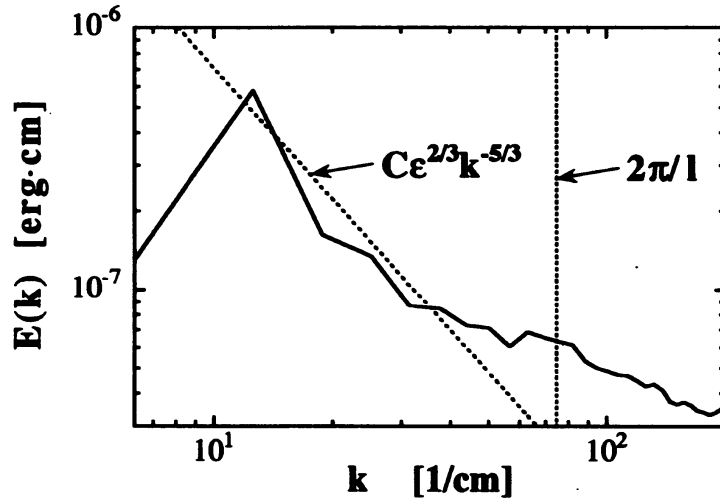


図 4: $t = 70 \text{ sec}$ でのエネルギースペクトル (solid line) と $C = 1$, $\epsilon = 1.866 \times 10^{-7} \text{ erg}\cdot\text{sec}^{-1}$ の Kolmogorov 則 $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ (dotted line) との比較。

4 渦の長さ分布と Kolmogorov 則

波数空間の統計的性質である Kolmogorov 則は、実空間の速度場の自己相似性と密接に関係している。それでは、波数空間の統計的性質と実空間の渦系タングルの自己相似性との関係はどうか？粘性流体では、粘性による渦度の拡散により、この問題を議論することが非常に難しい。それに対して、超流動乱流の特徴は、非粘性による definite な渦系と、量子性により固定された循環である。これらの特徴が、系を渦系タングルの配置によって記述することを可能とし、これが与えられると速度場が一意的に確定する。本節では、実空間における渦系タングルの自己相似性を特徴づける量として、渦の長さ分布 $n(x)$ を議論する。ここで、 $n(x)\Delta x$ は長さ x から $x + \Delta x$ の渦数である。

長さ分布の揺らぎを抑えるために、4.0 秒間での時間平均を行った。図 5 はそれぞれの時間での長さ分布である。 x 軸の最も大きいスケールは立方体の 1 辺の長さで、最も小さいスケールは計算の分解能である。タングルが一様で等方的になるにつれ、スケーリング特性に従っている。

この結果は、Kolmogorov 則と consistent であろうか？以下では、十分発達した乱流を考え、簡単な解析によりエネルギースペクトルと渦の長さ分布とを関係づける。 $1/b < k < 1/l$ において

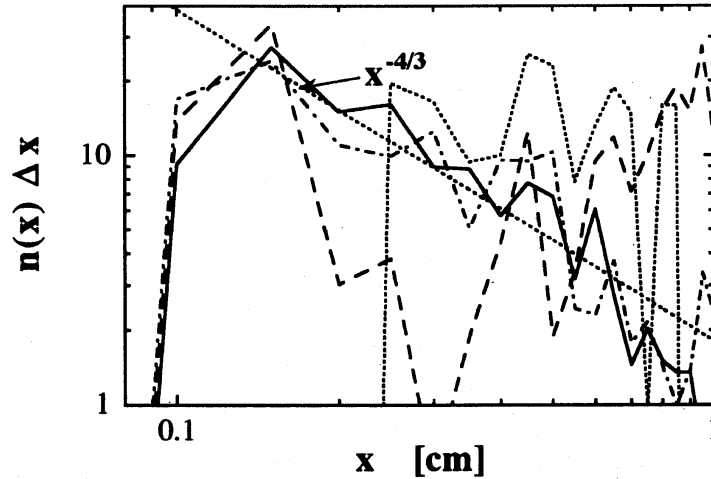


図 5: $\Delta x=0.05$, $t=0$ sec (dashed), $t=20.0$ sec (long-dashed), $t=40.0$ sec (dot-dashed) $t=60.0$ sec (solid) での渦の長さ分布。

エネルギースペクトルが Kolmogorov 則に従うとすると、運動エネルギーは

$$E = C\epsilon^{2/3} \int_{b^{-1}}^{l^{-1}} k^{-5/3} dk \approx \frac{3}{2} C\epsilon^{2/3} b^{2/3}. \quad (7)$$

となる。渦の長さ分布がスケール特性 $n(x) \propto x^a$ をもつとき、単位体積当たりの渦の長さは

$$L = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} n(x) x dx \approx \frac{1}{a+2} x_{\max}^{a+2} \quad (8)$$

となる。ここで、 $x_{\max}$ は最も大きい渦系長で、 $x_{\min}$ は最も小さい渦系長である。ここでは簡単化のため、 $x_{\max} \approx b$, $E \propto L$ とすると

$$n(x) \propto x^{-4/3} \quad (9)$$

となる。このスケール指数は、我々の数値計算の結果と consistent である (図 5)。

5 まとめ

相互摩擦力を無視したときの超流動乱流のエネルギースペクトルを計算した。 $k > 2\pi/l$ に対しては、スペクトルは個々の渦系からの寄与が支配的であった。一方、 $k < 2\pi/l$ では渦系タングルが一樣で等方的になるにつれ、スペクトルは Kolmogorov 則に近づく。最も小さな渦輪を消すことによるエネルギー散逸率を用いると、 $k < 2\pi/l$ でのスペクトルは波数依存性だけでなく、絶対値も Kolmogorov 則と一致する。渦系タングルの自己相似性を特徴づける渦の長さ分布は、一樣で等方的なタングルに対しては、スケールに従う。簡単な解析により、このスケール指数が Kolmogorov 則と consistent であることを示した。

本研究は、大阪市立大学の坪田誠助教授、ロシア科学アカデミーの Sergey K. Nemirovskii 氏との共同研究である。

参考文献

- [1] W.F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000).
- [2] S.R. Stalp, L. Skrbek and R.J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999).
- [3] C. Nore, M. Abid and M.E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997); Phys. Fluids **9**, 2644 (1997).
- [4] C.F. Barenghi and D.C. Samuels, Phys. Rev. B **60**, 1252 (1999).
- [5] K.W. Schwarz, Phys. Rev. B **31**, 5782 (1985).
- [6] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993).
- [7] M. Tsubota, S. Ogawa and Y. Hattori, J. Low Temp. Phys. **121**, 435 (2000); S. Ogawa, M. Tsubota and Y. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, to be published (2002).
- [8] T. Araki and M. Tsubota, J. Low Temp. Phys. **121**, 405 (2000).
- [9] T. Araki, M. Tsubota and S.K. Nemirovskii, J. Low Temp. Phys., **126**, 303 (2002), to be published; T. Araki, M. Tsubota and S.K. Nemirovskii, submitted; cond-mat/0201405.
- [10] 図 1 のダイナミクスのアニメーション :
<http://matter.sci.osaka-cu.ac.jp/bsr/taraki/movie.html>.
- [11] 1 本の直線渦のエネルギースペクトルを導出する。1 本の直線渦の速度場は $\kappa/2\pi r$ であるから、単位体積当たりの渦糸の運動エネルギーは $E = (\rho/2) \int v^2(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = (\kappa^2 \rho L / 2\pi) \ln(D/a)$ となる。ここで、 L は単位体積当たりの渦の全長で、 r は渦糸からの距離である。エネルギースペクトル $E(k) = Ck^\alpha$ は $E = \int_{2\pi/D}^{2\pi/a} E(k) dk$ と定義できるから、変数 α と C は $\alpha = -1$, $C = \kappa^2 \rho L / 2\pi$ となる。例えば、 $t = 70$ sec, $L = 151.9$ cm⁻² では、 $k = 100$ cm⁻¹ に対しては $E(k)_{\text{line}} = (\kappa^2 \rho L / 2\pi) k^{-1} = 3.48 \times 10^{-8}$ erg·cm である。これは、図 4 の $k = 100$ cm⁻¹ での我々の計算結果 $E(k) = 4.87 \times 10^{-8}$ erg·cm と consistent である。
- [12] See, for example, U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
- [13] M. Tsubota, T. Araki and S.K. Nemirovskii, Phys. Rev. B **62**, 11751 (2000).