

全2の有限生成 R -加群が巡回 R -加群の直和にかけるとき環 R について

山大 文理 大城 紀代市

Pierce は (ノイマンの意味の) 正則環 R 上に於いて次の興味ある2つの結果を示した ([1]).

(I) 全2の有限生成 $\text{torsion free } R$ -加群が巡回 R -加群の直和にかけるとき $\text{Spec}(R)$ は 3-point を持たない。

(II) 全2の有限生成 R -加群が巡回 R -加群の直和にかけるとき R の中零元は有限個しかない。

この稿では, (I) の逆を究明することと, (II) は一般の環について成り立つかという問題を取り扱う。

以下, 扱う環 R は全2可換環で単位元を持つとし, R -加群とは unital であると仮定する。 R -加群 M が torsion free であるとは $\{x \in M \mid \text{Hom}_R(Rx, E(R)) = \{0\}\} = \{0\}$ のときと言う。ただし, $E(R)$ は R の injective hull。

§ 1. 準備.

[a]. sheaf の定義.

定義 1.1. $X, \mathcal{R}$ は位相空間とする。 X の各点 x に対し $\mathcal{R}_x$ stalk とよばれる環 $\mathcal{R}_x$ が与えられ

$$\mathcal{R} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}_x, \quad \mathcal{R}_z \cap \mathcal{R}_y = \emptyset \text{ for } z \neq y.$$

π は r が $\mathcal{R}_x$ の元るとき $\pi(r) = x$ で定義される $\mathcal{R}$ から X への写像とする。次の4つの axioms が満たされるとき, $\mathcal{R}$ は sheaf of rings over X とか単に $(X, \mathcal{R})$ は ringed space であると呼ばれる。

(I) r を $\mathcal{R}$ の点とすると r を含む $\mathcal{R}$ の開集合 U と X の開集合 V が存在し、 U と V は π で位相同型になる。

(II) $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への $r \mapsto -r$ なる写像は連続写像である。

(III) $\mathcal{R} + \mathcal{R} = \{(r, s) \mid \pi(r) = \pi(s)\}$ とおく。 $\mathcal{R} + \mathcal{R}$ を積空間 $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ の部分空間とみるとき $(r, s) \mapsto r + s$, $(r, s) \mapsto rs$ なる写像は $\mathcal{R} + \mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への連続写像。

(IV) X から $\mathcal{R}$ への $x \mapsto 1_x$ なる写像は連続写像である。ただし, 1_x は $\mathcal{R}_x$ の単位元。

定義 1.2. $(X, \mathcal{R})$ は ringed space とする。 A は位相空間で, X の各点 x に対し stalk とよばれる $\mathcal{R}_x$ -加群 A_x が与えられ

$$A = \bigcup_{x \in X} A_x, \quad A_z \cap A_y = \emptyset \text{ for } z \neq y.$$

π' は a が A_x の元るとき $\pi'(a) = x$ で定義される A から X

1の写像とする。次の2つの axioms が満たされるとき, $\mathcal{A}$ は sheaf of $\mathcal{R}$ -modules over X とよばれる。

(I) $a \in \mathcal{A}$ の点とすると, a を含む $\mathcal{A}$ の開集合 U と X の開集合 V が存在して, U と V は π^{-1} で位相同型。

(II) $\mathcal{R} + \mathcal{A} = \{ (r, a) \mid r \in \mathcal{R}, a \in \mathcal{A}, \pi(r) = \pi(a) \}$, $\mathcal{A} + \mathcal{A} = \{ (a, b) \mid \pi(a) = \pi(b) \}$ とおき, それぞれ積空間 $\mathcal{R} \times \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ の部分空間とする。この時, $(r, a) \mapsto ra$, $(a, b) \mapsto a+b$ はそれぞれ $\mathcal{R} + \mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ へ, $\mathcal{A} + \mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への連続写像。

定義 1.3. $(X, \mathcal{R})$ は ringed space とする。 X から $\mathcal{R}$ への連続写像 σ は $\pi(\sigma(x)) = x$ for all $x \in X$ かつ $\sigma(x) \in \mathcal{R}_x$ のとき $(X, \mathcal{R})$ の section とよばれる。こゝに, section の全体を $\Gamma(X, \mathcal{R})$ で表わす。 $\mathcal{A}$ が sheaf of $\mathcal{R}$ -modules over X である時, $(\mathcal{A})$ section が同様に定義され, section の全体を $\Gamma(X, \mathcal{A})$ で表わす。

次の補題は sheaf に属する基本的性質である。

補題 1.4 ([11, 3.2]). $(X, \mathcal{R})$ は ringed space, $\mathcal{A}$ は sheaf of $\mathcal{R}$ -modules over X とすると次が言える。

(1) $\Gamma(X, \mathcal{R})$ は $(\sigma_1 + \sigma_2)(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$, $\sigma_1 \sigma_2(x) = \sigma_1(x) \sigma_2(x)$, $0(x) = 0_x$, $1(x) = 1_x$ を演算で環になり, (ただし, 0_x は $\mathcal{R}_x$ の零元), $\Gamma(X, \mathcal{A})$ は $(\tau_1 + \tau_2)(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x)$, $\sigma \tau(x) = \sigma(x) \tau(x)$ を演算で $\Gamma(X, \mathcal{R})$ -加群になる。

(b) Y を X の部分集合とし, $\mathcal{R}_Y = \bigcup_{x \in Y} \mathcal{R}_x$, $\mathcal{A}_Y = \bigcup_{x \in Y} \mathcal{A}_x$ とおく。 $Y, \mathcal{R}_Y, \mathcal{A}_Y$ をそれぞれ $X, \mathcal{R}, \mathcal{A}$ の relative topology で部分空間とみると $(Y, \mathcal{R}_Y)$ は ringed space になり $\mathcal{A}_Y$ は sheaf of $\mathcal{R}_Y$ -module over X になる。

(v) $\mathcal{R}_x$ の点 r ($\mathcal{A}_x$ の点 a) が与えられたと $\exists x$ の近傍 N , $\exists \sigma \in \Gamma(N, \mathcal{R}_N)$ ($\exists z \in \Gamma(N, \mathcal{A}_N)$) : $\sigma(x) = r$ ($z(x) = a$)。

(=) y は $Y \subseteq X$ の点とし, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(Y, \mathcal{R}_Y)$, $z_1, z_2 \in \Gamma(Y, \mathcal{A}_Y)$ とする。 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ ($z_1(x) = z_2(x)$) $\Rightarrow \exists x$ の近傍 $N \subseteq X$: $\sigma_1(y) = \sigma_2(y)$ ($z_1(y) = z_2(y)$) for all $y \in N \cap Y$ 。

[b]. reduced ringed space.

compact と totally disconnected Hausdorff 空間は簡単に Boolean space とよばれる。この呼称の由来は多分かかる空間が Boolean ring の spectrum で尽きれるからであろう。“totally disconnected”空間とは近傍系として 開閉集合族 が選べる空間であるからそれは言葉から受ける印象よりも直感的易い。

容易にわかるように Boolean space X は partition property と呼ばれる次の性質をもつ: $X = \bigcup_{i \in I} N_i$, N_i は閉集合 $\Rightarrow \exists$ 開閉集合 $M_1, \dots, M_m$ such that

(i) 各 $j \leq m$ に対し $\exists i \in I$: $M_j \subseteq N_i$,

(ii) $M_j \cap M_k = \emptyset$ if $j \neq k$,

$$(iii) X = \bigcup_{j=1}^n M_j.$$

定義 1.5. ringed space $(X, \mathcal{R})$ は次の2つの条件が満たされる時 reduced と呼ばれる:

(1) X は Boolean space である.

(2) $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{R})$ から中等元をうば X の任意の点 x に

対し $\sigma(x) = 0_x$ or 1_x .

注意. (1) 上の定義における条件(2)は次の条件で置きかえてもかまわない: " X の各点 x に対し $\mathcal{R}_x$ は直既約環である?"

(0) $(X, \mathcal{R})$ は ringed space, N は X の開集合とする.

$\sigma_N(x) = \begin{cases} 0_x & (x \in X - N) \\ 1_x & (x \in N) \end{cases}$ と定義される写像 σ_N は $\Gamma(X, \mathcal{R})$ の中等元である. 特に, $(X, \mathcal{R})$ が reduced ならば $\Gamma(X, \mathcal{R})$ の中等元は σ_N で尽される.

[C]. Pierce の2つの定理.

R は環とする. R の中等元の全体からなる Boolean ring を $B(R)$ と記し, $X(R) = \text{Spec}(B(R))$ と略記する. $B(R)$ の元 e に対し, $U_e^{B(R)} = \{x \in X(R) \mid e \in x\}$ とおくと $X = U_e^{B(R)} \cup U_{1-e}^{B(R)}$, $U_e^{B(R)} \cap U_{1-e}^{B(R)} = \emptyset$. 従って, $\{U_e^{B(R)} \mid e \in B(R)\}$ を近傍系にえ, 空間 $X(R)$ は Boolean space を与す.

また, $X(R)$ の各点 x に対し $R_x = R/R_x$ と略記する. したがって, $R_x = \{er \mid e \in x, r \in R\}$. ことに, $x_1 \neq x_2$ ならば $R_{x_1} \cap R_{x_2} = \emptyset$ とおき $R(R) = \bigcup_{x \in X(R)} R_x$ とおく. R の元 r に対し

σ_r は $x \mapsto r + Rx$ なる $X(R)$ から $\mathcal{R}(R)$ への写像とする。もし $\sigma_r(x) = \sigma_s(x)$ ならば $B(R)$ の元 e 2" $x \in U_e^{B(R)}$ 4 $\sigma_r(y) = \sigma_s(y)$ for all $y \in U_e^{B(R)}$ をみたすものが存在する。これより, $B(R)$ は $\{\sigma_r(U_e^{B(R)}) \mid r \in R, e \in B(R)\}$ を基底にたつ位相空間にたふことが容易に判るが, 更に次の定理が云ふ。

定理 1.6 ([11, 4.4]). $(X(R), \mathcal{R}(R))$ は reduced ringed space 2", 写像 $\xi_R: r \mapsto \sigma_r$ は R から $\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ への環同型をたふす。

注意. $R \cong \Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ より $X(R) \cong X(\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R)))$. 正確には, $X(R)$ の点 x に対し, $\mathcal{M}_x = \{\sigma \in B(X(R), \mathcal{R}(R)) \mid \sigma(x) = 0\}$ とおくと, $\mathcal{M}_x = \{\xi_R(e) \mid e \in x\}$ とたふすから, $x \mapsto \mathcal{M}_x$ なる対応 2", $X(R)$ と $X(\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R)))$ は位相同型にたふす ([11, 5.2]).

22, A は R -加群とたふす。 $X(R)$ の点 x に対し $A_x = A/Ax$ と略記し, $x_1 \neq x_2$ ならば $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \emptyset$ とたふす。 $A(A) = \bigcup_{x \in X(R)} A_x$ とおく。 $a \in A$ に対し, $z_a \in x \mapsto a + Ax$ なる $X(R)$ から $A(A)$ への写像とたふすと $A(A)$ は $\{z_a(U_e^{B(R)}) \mid e \in B(R), a \in A\}$ を基底にたつ位相空間にたふす 2 次が成りたふす。

定理 1.7 ([11, 4.5]). $A(A)$ は sheaf of $\mathcal{R}(R)$ -modules over X とたふす, 写像 $\xi_A: a \mapsto z_a$ 2" A と $\Gamma(X(R), A(A))$ は群同型にたふす。この時, $\xi_R(r) \xi_A(a) = \xi_A(ra)$ for $r \in R, a \in A$.

[d]. simple sheaf.

定義 1.8. X は位相空間, R は任意の環とする。 R は離散位相空間とみえ, 積空間 $X \times R$ を $\mathcal{R}$ と記し, X の点 x に対し $\{x\} \times R \in \mathcal{R}_x$ と記す。このとき $\mathcal{R}$ は x に付する stalk $\mathcal{R}_x$ に $x \mapsto \text{sheaf of rings over } X$ になる ([11, 11.2]). このように構成される sheaf $\mathcal{R} = R \times X$ は simple R -sheaf over X と呼ばれる。

注意. (i) $\mathcal{R}$ が simple R -sheaf over X になると環 $\Gamma(X, \mathcal{R})$ は X から R への連続写像の全体からなる環と同型になる。従って, $(X, \mathcal{R})$ が reduced $\iff X$ は Boolean space であり R は直既約。 (ii) X をある Boolean space, $R \in \text{GF}(\mathbb{Z})$ とするとき $\Gamma(X, X \times R)$ は Boolean ring になる。しかし, Boolean ring の全体は可算環で尽きない。

[e]. (ノイマンの意味での) 正則環。

命題 1.9. $(X, \mathcal{R})$ は reduced ringed space とする。この時, $\Gamma(X, \mathcal{R})$ が正則環である $\iff$ 各 stalk $\mathcal{R}_x$ は体である。これより, 環 R が正則環である $\iff X(R)$ の各点 x に対し R_x は体。

[f]. regular ideal.

R は環, I は R のイデアルとする。 I が regular イデアルであるとは I がそれ自身に含まれる中元から生成されることをいふ (i.e. $I = B(I)R$) を言う。例えば, 正則環の任意のイデアルは regular である。

補題 1.10. R は環とする。 R の regular イデアルの全体と $X(R)$ の閉集合の全体との間には次のように 1 対 1 対応がある:

(1) $X(R)$ の任意の閉集合 Y に対し, 自然な環準同型

$$\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R)) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(Y, \mathcal{R}(R)_Y)$$

は上への準同型で, その核は regular イデアルになる。

(2) 逆に, $\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ の regular イデアル^{I)}が与えられと $X(R)$ の閉集合 Y があって, I は自然な環準同型

$$\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R)) \xrightarrow{\psi} \Gamma(Y, \mathcal{R}(R)_Y)$$

の核になる。

証明. (1) φ が epimorphism になる理由は Y が閉集合であるから compact であることに注意し, $X(R)$ の partition property を用之ばすぐわかる。 φ の核は $\bigcap_{y \in Y} R_y$ に他ならないが, Y が閉集合であることより, それは regular イデアルであることも容易にわかる。(2) I を $\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ の regular イデアルとする。 $U = \bigcup \{N \mid N \text{ は } 0_N \in I \text{ なる } X(R) \text{ の開閉集合}\}$ とおくと, $X(R) - U$ が求める閉集合 Y である。

§ 2. Baer hull.

環 R に対し, その maximal ring of quotients を $Q(R)$ と記す。 R が semi-prime なら R は Baer hull とよばれる unique minimal Baer ring of quotients をえうが, それは $Q(R)$ の中で R と $Q(R)$ の

中算元の全体 $B(Q(R))$ から生成される環と一致する ([4]).

R が正則環であるとき, 全2の有限生成 torsion free R -加群の巡回 R -加群の直和に書けるならば R の Baer hull は $Q(R)$ に一致する ([6], [8]). 従って, この小論において Baer hull を調べることは大変重要な意味をもつ. 一見, Baer hull は $\sum_{e \in B(Q(R))} Re$ と既に形が明確のように思える. しかし, $Q(R)$ は存在はするが, 具体的に何かとをとり一般にはわからないうのだから, $\sum_{e \in B(Q(R))} Re$ のままでは Baer hull の正体は不明である. そこで, 我々としては R から出発して, より具体的に, $Q(R)$ よりえをよりく具現性のあるものを通して R の Baer hull を構築したい.

そこで, R が正則環ならば, $B(Q(R))$ は $B(R)$ の maximal ring of quotients $Q(B(R))$ になつてくる. さらに, その Baer hull C は次の3つの条件を満たす環として特徴づけられることが容易にわかる: (a) C は共通単位元をもつ R の拡大環, (b) $B(C) = Q(B(R))$, (c) $C = \sum_{e \in B(C)} Re$. この条件 (b), (c) に注目して, 一般の環 R に対して, これらの各条件を満足するような環 C を前節の sheaf の理論を用いて構成しようというのがこの節のねらいである. $Q(R)$ は何物か不明な $B(Q(R))$ は判然とする場合が多い.

R は環とする. $\text{Spec}(B(R)) \in X(R)$ と略記したが, $\text{Spec}(Q(B(R)))$

$\in Y(R)$ で記し, $Y(R)$ から $X(R)$ への自然な写像 ($y \mapsto B(R) \cap y$) を λ で記す. λ は連続写像である.

補題 2.1 ([7]). M は $Y(R)$ の開集合とする. M が空でなければ, $\emptyset \neq \bigcup_e^{Q(B(R))} \subseteq M$ なる $B(R)$ の元 e がある.

補題 2.2 ([7]). y は $Y(R)$ の非孤立点, e は $Q(B(R))$ の元で $y \in \bigcup_e^{Q(B(R))}$ とする. このとき, $B(R)$ の元 f で, $y \notin \bigcup_f^{Q(B(R))}$ かつ $\emptyset \neq \bigcup_f^{Q(B(R))} \subseteq \bigcup_e^{Q(B(R))}$ を満足するものがある.

そこで, $Y(R)$ の点 y に対し, $R_{\lambda(y)} \in \mathcal{R}_y$ で記し, $y_1 \neq y_2$ ならば $\mathcal{R}_{y_1} \cap \mathcal{R}_{y_2} = \emptyset$ とする.

$$\mathcal{R}^*(R) = \bigcup_{y \in Y(R)} \mathcal{R}_y$$

とおく. r は R の元とするとき, $\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ の元 σ_r ($x \mapsto r_x$) は周知だが, これに対し $y \mapsto r_{\lambda(y)}$ なる $Y(R)$ から $\mathcal{R}^*(R)$ への写像を $\overline{\sigma}_r$ で記す. このとき, $\mathcal{R}^*(R)$ は集合族

$$\{\overline{\sigma}_r(\bigcup_e^{Q(B(R))}) \mid r \in R, e \in Q(B(R))\}$$

を開基にえつた位相空間に作りこむことが容易に確かめられ, さらに, $\mathcal{R}^*(R)$ は reduced sheaf of rings over $Y(R)$ に作ることを検証できる. ここで, 勿論, $y \in Y(R)$ に対応する stalk は $\mathcal{R}_y = R_{\lambda(y)}$ である.

ringed space $(Y(R), \mathcal{R}^*(R))$ について次のことが云える.

定理 2.3. $\Gamma(Y(R), \mathcal{R}^*(R))$ は共通単位元をえつ $\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))$ の拡大環になり, 次の2つの条件を満足する:

$$(a) \quad B(T(Y(R), \mathcal{R}^*(R))) = Q(B(T(X(R), \mathcal{R}(R))),$$

$$(b) \quad T(Y(R), \mathcal{R}^*(R)) = \sum_{\alpha \in B(T(Y(R), \mathcal{R}^*(R)))} T(X(R), \mathcal{R}(R)) \alpha.$$

証明の方針. σ は $T(X(R), \mathcal{R}(R))$ の元, y は $Y(R)$ の点とする. その時, $\exists r^* \in R: \sigma(\lambda(y)) = r^*_{\lambda(y)}$. r^* は y に依存して決るが, σ が連続写像であることより, y のある近傍で r^* を同じにとれる. これより, $y \mapsto r^*_{\lambda(y)}$ を $Y(R)$ から $\mathcal{R}^*(R)$ への写像 σ^* で表わすと, σ^* は section になる. σ に σ^* を対応させる写像は $T(X(R), \mathcal{R}(R))$ から $T(Y(R), \mathcal{R}^*(R))$ の中への環同型を与える. 次に, σ は $T(Y(R), \mathcal{R}^*(R))$ の元とする. $Y(R)$ の点 y に対し, $\exists r \in R \in R: \sigma(y) = r_{\lambda(y)} = \overline{\sigma_r}(y) = \sigma_r^*(y)$ により, partition property を使えば, $Y(R)$ の互いに交わらない開集合 $M_1, \dots, M_n$ と R の元 $r_1, \dots, r_n$ があって σ は

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_{r_i}^* \circ \sigma_{M_i}$$

とかけらる. これより, (b) が言えた. $B(T(Y(R), \mathcal{R}^*(R)))$ が $Q(B(T(X(R), \mathcal{R}(R))))$ になることは $X(T(Y(R), \mathcal{R}^*(R)))$ と $Y(R)$ が同型であることと $B(T(Y(R), \mathcal{R}^*(R)))$ が $B(T(X(R), \mathcal{R}(R)))$ の essential 拡大になっていることを調べればよい.

系 2.4. R が正則環ならば $T(Y(R), \mathcal{R}^*(R))$ は R の Baer hull である.

Notation. 以下, R と $T(X(R), \mathcal{R}(R))$ は同一視する. 又, $T(Y(R), \mathcal{R}^*(R))$ を $C(R)$ で記す. $C(R)$ は R の拡大環とみなす訳だが

この時、特に次のような点に注意すべきである: $Y(R)$ の開
 部分集合 M と R の元 r に対し $r\sigma_M$ と書けば、その正確な意味は
 σ_M^* のことである。 σ は $C(R)$ の元、 x は $X(R)$ の点とする。 $C(R)$
 は R -加群だから σ_x の意味は承知だが、その正確な意味は $\sigma_{m(x)}$
 のこと。ただし、 $m(x)$ は $\{\sigma \in B(\Gamma(X(R), \mathcal{R}(R))) \mid \sigma(x) = 0\}$
 のことであつた。

環 R について 2 次の 3 つの補題が成立するが、それぞれ次節
 より頻繁に使われる。

補題 2.5. M は $Y(R)$ の開部分集合、 x は $X(R)$ の点とする。そ
 のとき、 $\sigma_{M_x} \neq 0_x \iff \lambda^{-1}(x) \cap M \neq \emptyset$

証明. $\Rightarrow$: $0_x \neq \sigma_{M_x} = \sigma_{M, m(x)}$ とし、 $\lambda^{-1}(x) \cap M = \emptyset$ と
 (する)。 λ は閉写像で $\lambda(M)$ は x であるから、 $\exists$ 開部分集合 $U \subseteq$
 X such that $x \in U$, $U \cap \lambda(M) = \emptyset$. 明らかに、 $\sigma_M \sigma_U^* = 0$.
 $\sigma_{M_x} \neq 0_x$ より $\sigma_U^* = 0_x$. したがって $x \notin U$, 矛盾。

$\Leftarrow$: $\lambda^{-1}(x) \cap M \neq \emptyset$ とする。もし、 $\sigma_{M_x} = 0_x$ ならば、
 $\exists X(R)$ の開部分集合 U such that $\sigma_M (1 - \sigma_U^*) = 0$, $\sigma_U \in \mathcal{M}(x)$.
 すると $\lambda(y) = x$ する M の点とすると、 $1_{\lambda(y)} = \sigma_M(\#) = \sigma_U^*(y) = 0_{\lambda(y)}$
 とする 2 矛盾。

補題 2.6. r は R の元、 M は $Y(R)$ の開部分集合、 x は $X(R)$
 $\lambda^{-1}(x) \cap M \neq \emptyset$ する $X(R)$ の点とする。この時、 $r\sigma_{M_x} = 0_x$
 ならば $r_x = 0_x$ である。

証明. $O_x = r_x \sigma_{M_x} = \sigma_{r_x}^* \sigma_{M_x} \Rightarrow \exists$ (開) 集合 $U \subseteq X(R)$ such that $(\sigma_r^* \sigma_M)(1 - \sigma_U^*) = 0$, $\sigma_U \in M(x)$. $y \in \lambda(y) = x$ なる M の点とすると $O_{\lambda(y)} = \sigma_{r_x}^* \sigma_M (1 - \sigma_U^*)(y) = r_{\lambda(y)}$. $\therefore 2, O_x = r_x$.
($\lambda(y) \cap M \neq \emptyset$ なる)

補題 2.7. x は $X(R)$ の非孤立点, M は $Y(R)$ の (開) 集合とす.
($x \notin U$)
 $W = \bigcup \{X(R) \text{ の開集合 } U \mid \lambda^{-1}(U) \subseteq M\}$ とおくと $x \in W^- - W$.

証明. $y \in Y(R)$, $\lambda(y) = x$ とするとき, もし, $x \in \bigcup_e B(R)$ ($e \in B(R)$) ならば $y \in \bigcup_e Q(B(R))$. この事実と補題 2.2 を使用すればよい.

§ 3. ω -point と α -point.

X は位相空間, x は X の点, ω は任意の ordinal number とする。すなわち $\eta < \omega$ に対し $x \in \bigcup_{\eta} - \bigcup_{\eta}$ が成り立つよう X の (互いに交わらない) (開) 集合族 $\{\bigcup_{\eta} \mid \eta < \omega\}$ が存在するとき, x は ω -point であると呼ばれる。これは Pierce ([1, 20.2]) による定義である。一方, Hindman [2] ω は ordinal number ω を cardinal number α に代って, closure が x を含むような α 個の互いに交わらない X の (開) 集合が存在するとき, x は α -point であると呼ばれる。

注意. 自然数 n について n -point といふは, それが Pierce の意味によるもののか, それとも Hindman のそれなのか気にかかると, $n \neq 1$ ならば両者は一致している。(しかし

一点 x は n -point の意味は Hindman に従うことにする.

命題 3.1 (cf. [7, 3.2]). R は環とし, x は $X(R)$ の点とする. n は自然数, $\aleph_0$ は first infinite cardinal number, α は任意の cardinal number とする. そのとき, 次の評価を得る.

(a) x は n -point である $\iff n \leq |\lambda^1(x)|$, ただし, $|\lambda^1(x)|$ は $\lambda^1(x)$ の個数を表わす.

(b) x は $\aleph_0$ -point である $\iff \aleph_0 \leq |\lambda^1(x)|$.

(c) x が α -point である $\implies \alpha \leq |\lambda^1(x)|$.

(c) の逆が言えるかどうかはわからない. 例えは, $\alpha = 2^{\aleph_0}$ の場合はどうか?

命題 3.2. R は $C(R) = Q(R)$ が成り立つ正則環とする. $X(R)$ の任意の点 x について, $n \leq |\lambda^1(x)| \iff n \leq [Q(R)_x : R_x]$ が言える. ただし, $[Q(R)_x : R_x]$ は $Q(R)_x$ の R_x 上 vector space としての rank を表わす.

命題 3.1, 3.2, [11, 13.8] より次の定理を得る.

定理 3.3. R は $C(R) = Q(R)$ が成り立つ正則環とするとき次の条件は同値である.

- (1) $|\lambda^1(x)| \leq n$ for all $x \in X(R)$.
- (2) $X(R)$ は $(n+1)$ -point をとらない.
- (3) $[Q(R)_x : R_x] \leq n$ for all $x \in X(R)$.

(4) $Q(R)$ の有限生成 R -部分加群は n 個の元で生成される.

注意. 任意の自然数 n について, 次の性質を満たすような Boolean ring R の例がある ([7]):

(a) $X(R)$ の非孤立点は n -point である ($(n+1)$ -point ではない).

(b) $\exists e_1, \dots, e_n \in Q(R) : Q(R) = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_n$.

かかる環 R では, 定理 3.3 より, $Q(R)$ の全 2 の有限生成 R -部分加群は n 個の元から生成されるが, $n-1$ 個の元からは生成されないことがある.

§ 4. 3-point を満たす正則環.

この節では “すべての有限生成 torsion free R -加群が巡回 R -加群の直和である” ような正則環 R は何かを取り扱う.

R は正則環, A は R -加群とする. $X(R)$ の点 x と $X(R)$ の開集合 U に対し

$$E_A(x, U) = \{a_x \mid a \in A, a_y = 0_y \text{ for all } y \in U\}$$

とおくと, これは A_x の (R_x 上) subspace を与える ([11]).

ここで, A_x の全 2 の subspace からなる束の中で $\{E_A(x, U) \mid U \text{ は } X(R) \text{ の開集合}\}$ から生成される部分束を $\mathcal{L}_A(x)$ で表わす.

補題 4.1 ([11, 17.5]). R は正則環で, A は有限生成 R -加群とする. もし, A が巡回 R -加群の直和にかけると

ば, $X(R)$ の各点 x について $\mathcal{F}_A(x)$ は分配束である.

補題 4.2. R は正則環とする. $X(R)$ の各点 x と $C(R)$ の 2 元から生成される全 2 の R -部分加群 A について, $\mathcal{F}_A(x)$ が分配束ならば $X(R)$ は 3-point をもたない.

証明の方針. $X(R)$ が 3-point をもつとし, その中の 1 つを x とする. 命題 3.1 より, $|\lambda^+(x)| \geq 3$ が言えるから, $\lambda^+(x)$ とは交わり互いに交わらない $Y(R)$ の開閉集合 M_1, M_2, M_3 がとれる. $n=2$

$$W_i = \bigcup \{ \bigcup_e^{B(R)} \mid e \in B(R), \bigcup_e^{Q(B(R))} \subseteq M, x \notin \bigcup_e^{B(R)} \}$$

とおくと補題 2.7 より $x \in W_i^- - W_i$.

$$A = R(\sigma_{M_1} + \sigma_{M_2}) + R(\sigma_{M_2} + \sigma_{M_3})$$

とおくと $E_A(x, W_1) = R_x(\sigma_{M_2} + \sigma_{M_3})_x$, $E_A(x, W_3) = R_x(\sigma_{M_1} + \sigma_{M_2})_x$, $\varepsilon \leq 2$, $E_A(x, W_2) = R_x(\sigma_{M_1} - \sigma_{M_3})_x$ が証明出来る.

すうと

$$E_A(x, W_2) \cap (E_A(x, W_1) + E_A(x, W_3)) = E_A(x, W_2),$$

$$(E_A(x, W_2) \cap E_A(x, W_1)) + (E_A(x, W_2) \cap E_A(x, W_3)) = \{0_x\}$$

とあって $\mathcal{F}_A(x)$ が分配束であることに矛盾する.

補題 4.3. R は $C(R) = Q(R)$ が成立する正則環とする. もし, $X(R)$ が 3-point をもたないならば σ の有限生成 torsion free R -加群は巡回 R -加群の直和にかけらる.

証明の方針. A は有限生成 torsion free R -加群とする.

A が巡回 R -加群の直積にかけること示すためには [1, 14.2, 15.1] および $X(R)$ の partition property から次のことを示せばよい: (*) $X(R)$ の任意の点 x に対し, x の近傍 N と A の有限個の元 $a_1, \dots, a_n$ があって, N の各点 z について $\{a_{i_z} \mid a_{i_z} \neq 0_z\}$ は A_z の (R_z 上) 基底になる。

x は $X(R)$ の点としよう。 A の元 $a_1, \dots, a_n$ は $\{a_{1x}, \dots, a_{nx}\}$ が A_x の基底になるように選ぶ。 $A_x = (Ra_1 + \dots + Ra_n)_x$ なるので x の近傍 N_1 : $A_z = (Ra_1 + \dots + Ra_n)_z$ for all $z \in N_1$.

$Ra_1 + \dots + Ra_n$ は torsion free R -加群であるから $Q(R)$ の n 個の直積の中に埋蔵される ([4]).

$|\lambda^{-1}(x)| \leq 2$ 故に次が成り立つように $Y(R)$ の部分集合 M が選べる:

$$\lambda^{-1}(x) \cap M \neq \emptyset \text{ かつ } \lambda^{-1}(x) \cap M^c \neq \emptyset \quad \text{if } x: 2\text{-point},$$

$$\lambda^{-1}(x) \in M \quad \text{if } x: 1\text{-point}.$$

このとき, x が 1-point ならば $Q(R)_x = R_x \sigma_{M_x}$ になり, x が 2-point ならば $Q(R)_x = (R \sigma_M + R \sigma_{M^c})_x$ になることが確かめられる。 以下より次の2つの場合に分けて考える。

Case 1. x は 1-point. このとき,

$$a_{1x} = r_{11x} \sigma_{M_x} \times \dots \times r_{1nx} \sigma_{M_x},$$

$$a_{nx} = r_{n1x} \sigma_{M_x} \times \dots \times r_{nnx} \sigma_{M_x}$$

$(r_{ij} \in R)$ と表わそう.

$$b_1 = \sigma_M \times 0 \times \cdots \times 0,$$

$$b_2 = 0 \times \sigma_M \times 0 \times \cdots \times 0,$$

.....

$$b_m = 0 \times \cdots \times 0 \times \sigma_M$$

とあくと $(Ra_1 + \cdots + Ra_m)_x = (Rb_1 + \cdots + Rb_m)_x$. 従って,
 $Ra_1 + \cdots + Ra_m$ の元 $c_1, \dots, c_m$ と x の近傍 N_2 があって, N_2
 の各点 z に対して $Rb_{i_z} = Rc_{i_z}$ ($i=1, \dots, m$) が成り立つ. この
 とき, N_2 の各点 z について $b_{1_z}, \dots, b_{m_z}$ は一次独立である.
 さて, $N_1 \cap N_2$ と $c_1, \dots, c_m$ が求める (*) の x の近傍と
 A の元である.

Case 2. x は 2-point.

$$a_{1x} = (r_{11}\sigma_M + \rho_{11}\sigma_M^c)_x \times \cdots \times (r_{1n}\sigma_M + \rho_{1n}\sigma_M^c)_x,$$

.....

$$a_{mx} = (r_{m1}\sigma_M + \rho_{m1}\sigma_M^c)_x \times \cdots \times (r_{mn}\sigma_M + \rho_{mn}\sigma_M^c)_x$$

$(r_{ij}, \rho_{ij} \in R)$ と表わそう. このとき, 計算は大変厄介だけれど,
 $a_{1x}, \dots, a_{mx}$ について適当に change of basis を施して
 (*) が言えようとする x の近傍と A の元を見つけるのである.

注意. Boolean space の上の有限体 F から出来た simple
 F -sheaf の全 2 の section から子環について, 上の補題
 は Pierce [1, 20.4] で与えられている. (しかし, かかる正則環
 R では $C(R) = Q(R)$ が成り立つから ([7]), 我々の補題は

Pierce の結果の拡張になっている。

次の定理がこの節の主要定理である。

定理 4.4. R は正則環とする。次の各条件は同値である:

(a) R の全 2 の有限生成 torsion free R -加群は巡回 R -加群の直和にかけらる。

(b) $Q(R)$ の全 2 の有限生成 R -部分加群は巡回 R -加群の直和にかけらる。

(c) $Q(R)$ の $\underbrace{2 \text{ 元}}_{(a, 2a)}$ から生成される R -部分加群は巡回 R -加群の直和にかけらる。

(d) $C(R) = Q(R)$, $X(R)$ の各点 x について $|\lambda^1(x)| \leq 2$.

(e) $C(R) = Q(R)$, $X(R)$ は 3-point をとらない。

(f) $C(R) = Q(R)$, $X(R)$ の各点 x について $[Q(R)_x : R_x] \leq 2$.

(g) $C(R) = Q(R)$, R の全 2 の有限生成 torsion free R -加群 A について, 各 $f_A(x)$ は分配束である。

(h) $C(R) = Q(R)$, $Q(R)$ の全 2 の有限生成 R -部分加群 A について, 各 $f_A(x)$ は分配束である。

(i) $C(R) = Q(R)$, $Q(R)$ の全 2 の 2 元から生成される R -部分加群 A について, 各 $f_A(x)$ は分配束である。

証明は定理 3.3, 補題 4.1, 4.2, 4.3 および [6, 3.4] に従う。

注意. regular Baer ring R 上, $(R \neq) C(R) \neq Q(R)$ 上

あつて、 $Q(R)$ は R -加群として2元から生成されるという事例がある ([7, 例 C]). よって上定理において条件 $C(R) = Q(R)$ は (d), (e), (f) の中から省ける。又, Baer ring の上では, 任意の torsion free R -加群 A について各 $a_x(A)$ は分配束であることが証明出来るので, (a), (c), (g) の中で条件 $C(R) = Q(R)$ は省ける。

系 4.5. R は $C(R) = Q(R)$ が成り立つ正則環とする。
もし、 $Q(R)$ が R -加群として2元から生成されるならば、
この有限生成 torsion free R -加群は巡回 R -加群の直和に
かける。

(この系の逆が言えるかどうかは興味ある問題だと思う。)

§ 5. FGC-環.

次の性質(*)をみたす環 R は何か? : (*) 全2の有限生成 R -加群は巡回 R -加群の直和にかけろ。これは良く知られた古典的な問題である。幸い, Shore [12] にこの問題についての厂史が丁寧に述べられてるので参照するとよい。

Shore [12] によらうと、環 R が (*) をみたすとき、 R を FGC-環と呼ぶ。

次の定理はよく知られてる。

定理 A. 単項イデアル整域は FGC-環である。

次の定理は Gill ([1]) と Lafon ([3]) によつて独立に証明された。

定理 B. 局所環 R が FGC-環である必要十分条件は R が almost maximal valuation ring である。

次の Pierce の定理 ([1], 21.7) に注目しよう。

定理 C. 正則環 R が FGC-環ならば R は有限個の体の直和である。

つまり、正則環 R について次が言える: (***) R が FGC-環であるならば $X(R)$ (従つて, $B(R)$) は有限集合である。

この (***) は一般の環 R について言えるか? この節では、この興味深い問題 ([3] では open problem になつてゐる) に関係する 2, 3 の結果を示す。

Pierce は (***) を示す為めに次の補題を連続体仮説 (cf. [1]) を使つたりして非常に巧みに証明してゐる。

補題 5.1 ([1], 21.5). Boolean space X が無限集合ならば 3-point をえつ X の閉集合が存在する。

(***) はこの補題と正則環 R の上で全 2 の有限生成 (torsion free) R -加群が巡回 R -加群の直和にかけるときならば $X(R)$ は 3-point をえつないという結果と命題 1.10 に従うのである。

よつて、 R は一般の環とする。 $X(R)$ が 3-point をえつとし、その中の 1 つを x とする。この時、

$$Y(R) = M_1 \cup M_2 \cup M_3,$$

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$M_i \cap \lambda^{-1}(x) \neq \emptyset \quad (i=1, 2, 3)$$

と取りよるに $Y(R)$ の部分集合 M_1, M_2, M_3 を選ぶ。ここで、

$$A = R(\sigma_{M_1} + \sigma_{M_2}) + R(\sigma_{M_2} + \sigma_{M_3}) \quad \dots\dots\dots (\#)$$

とおくとき、我々は次の問題を提起する：“ A が巡回 R -加群の直和にかけられる場合があるか？”

注意. 補題 2.6 を用いて A が巡回 R -加群でないことが判る。

定義 5.2. 環 R は R -加群とみなし exchange property を満たすとき exchange ring であると呼ばれる ([5]).

補題 5.3 ([5]). 環 R は exchange ring である $\iff X(R)$ の各点 x について R_x が局所環である。

補題 5.4. R が FGC-exchange ring であるならば $X(R)$ は 3-point を満たす。

証明の方針. $X(R)$ が 3-point x を満たすとし、(＃)のよりにして A を作る。 A を巡回 R -加群の直和で表わして、補題 2.6 と 5.3 を用いた計算で矛盾を導く。

定理 5.5. exchange ring R が FGC-環 であるならば R は almost maximal valuation ring の有限個の直和にかけられる。
この逆も正しい。

証明. R が exchange ring ならば R の任意のイデアル I には

R/I 是 exchange ring である ([5]). 従って, 補題 1.10, 5.1, 5.3, 5.4 より必要条件は言える。逆は定理 B よりよい。

定義 5.6. R は環とする。 R の任意の元 r の $\text{supp}(r) (= \{x \in X(R) \mid r_x \neq 0_x\})$ が非集合であるとき, R は s -環 であると呼ぶことにする。

s -環の例。 (1) p.p.-環。 (2) Boolean space X と直既約環 S とで作られる環 $T(X, X \times S)$ 。 (3) R が s -環ならば R の任意の正則イデアル I に対し R/I 是 s -環である。

exchange ring の場合と同様に 2 次の補題及び定理が言える。

補題 5.7. s -環 R が FGC-環であるならば $X(R)$ は 3-point をもたない。

定理 5.8. s -環 R が FGC-環であるならば R は有限個の直既約な FGC-環の直和にかけらる。

系 5.9 ([3]). p.p.-環 R が FGC-環であるならば R は有限個の整域の直和にかけらる。

FGC-環は Bezout 環であるから, 上系と定理 A より

系 5.10. Hereditary 環 R が FGC-環であるならば R は有限個の主イデアル整域の直和にかけらる。

参考文献

- [1] D.T.Gill, Almost maximal valuation ring, J.London Math. Soc. (2) 4(1971), 140-146.
- [2] N.Hindman, On the existence of point in $\beta N \setminus N$, Proc. Amer. Math. Soc. 21(1969), 277-280.
- [3] J.P.Lafon, Anneux Locaux commutatifs sur lesquels tout module de type fini est somme discrete de modules monogenes, J. Algebra 17(1971), 575-591.
- [4] A.C.Mewborn, Regular rings and Baer rings, Math. Z. 121(1971), 211-219.
- [5] G.S.Monk, A characterization of exchange rings, Proc. Amer. Math. Soc. 35(1972) 349-353.
- [6] K.Oshiro, On torsion free modules over regular rings, Math. J. Okayama Univ. Vol. 16(1973), 107-114.
- [7], On torsion free modules over regular ringsⅡ, Math. J. Okayama Univ. Vol. 16, No2(1974), 199-205.
- [8], Note on direct sums of cyclic modules over regular rings, to appear.
- [9], On torsion free modules over regular ringsⅢ, to appear. (§2~§4の詳細)
- [10], Commutative FGC exchange rings and FGC hereditary rings, to appear. (§5の詳細)
- [11] R.S.Pierce, Modules over commutative regular rings, Mem. Amer. Math. Soc. 128(1967).
- [12] T.S.Shores, Bezout modules and their modules, Ring theory Proc. Oklahoma Conf., 1973.
- [13] and R.Wiegand, Rings whose finitely generated modules are direct sums of cyclics, J. Algebra 32(1974), 152-172.

- [14] J. Zelmanowitz, Injective hulls of torsion free modules,
Canad. J. Math. 23(1971), 1094-1101.