

Remainders in extensions and unions of locally compact sets

リンショーピン大学 ヴィタリ チャティルコ (Vitalij Chatyrko)
Department of Mathematics
Linköping University

島根大学・総合理工学部 服部泰直 (Yasunao Hattori)
Faculty of Science and Engineering
Shimane University

1 Introduction

ここで考える空間は特に断らない限り、Tychonoff 空間とする。また、用語等は [AN], [E] に従う。

局所コンパクト空間と空間のコンパクト化について、次はよく知られている。

Fact 1.1 空間 X について、次は同値である。

1. X は局所コンパクト。
2. X の任意のコンパクト化 cX に対して、その剰余 $cX - X$ がコンパクト。
3. その剰余 $cX - X$ がコンパクトとなる X のコンパクト化 cX が存在する。

空間 X について、 $LC(X) = \{x \in X : X \text{ は } x \text{ において局所コンパクト}\}$ とし、 $R(X) = X - LC(X)$ とする。このとき、次が知られている。

Fact 1.2 (Henriksen-Isbell [HI]) 空間 X について、次は同値である。

1. $R(X)$ がコンパクト。
2. X の任意のコンパクト化 cX に対して、その剰余 $cX - X$ が局所コンパクト。
3. その剰余 $cX - X$ が局所コンパクトとなる X のコンパクト化 cX が存在する。

ここでは、上記の結果を踏まえて以下のことを考察する。

General Question. 任意の (ある) コンパクト化の剰余が局所コンパクトの有限和となる場合はどのような場合か？また、そのための条件を求めよ。

2 Results

空間 X に対して X が局所コンパクト部分空間の和として表される最小の濃度を $lc(X)$ と書くことにする。すなわち、

$$lc(X) = \min\{|A| : A \text{ は局所コンパクト部分空間からなる } X \text{ の被覆}\}.$$

さらに、任意の濃度 $\alpha \geq 1$ に対して、

$$\mathcal{P}_\alpha = \{X : lc(X) \leq \alpha\},$$

$$\mathcal{P}_{fin} = \{X : lc(X) < \aleph_0\}$$

とする。

Example 2.1 ([CHO]) (1) 任意の自然数 $n \geq 2$ に対して、 $A_n \in \mathcal{P}_n - \mathcal{P}_{n-1}$ となる $A_n \subset \mathbb{I}$ が存在する。

(2) $\mathbb{Q}, \mathbb{P}$ をそれぞれ有理数空間、無理数空間とすると、 $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\aleph_0} - \mathcal{P}_{fin}$, $\mathbb{P} \notin \mathcal{P}_{\aleph_0}$ である。

ここで、上の A_n のより単純な例を挙げる。(本質的には全く同様である。)

$A_1 = \{0\} \subset \mathbb{I}$ と置く。 $S = \{s_1, s_2, \dots\} \subset \mathbb{I}$ を 0 に収束する減少列とし、任意の i に対して $S_i = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots\} \subset (s_{i-1}, s_i)$ を s_i に収束する減少列とする。そして、 $A_2 = A_1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ とおく。このとき、明らかに $A_2 \in \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ 。次に、任意の i , 任意の $s_{i,j} \in S_i$ に対して、 $S_{i,j} = \{s_{i,j,1}, s_{i,j,2}, \dots\} \subset (s_{i,j-1}, s_{i,j})$ を $s_{i,j}$ に収束する減少列とする。さらに、任意の i, j, k に対して、

$S_{i,j,k} = \{s_{i,j,k,1}, s_{i,j,k,2}, \dots\} \subset (s_{i,j,k-1}, s_{i,j,k})$ を $s_{i,j,k}$ に収束する減少列とし、 $A_3 = A_1 \cup A_2 \cup \bigcup_{i,j,k=1}^{\infty} S_{i,j,k}$ とおく。このとき、明らかに $A_3 \in \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_2$ 。以下、帰納的に A_n を定めればよい。

空間 X に対して、 eX を X の拡張、すなわち、 X を部分空間としてもつ空間とする。このとき、次を得る。

Proposition 2.1 任意の自然数 m, n に対して、 $X \in \mathcal{P}_m$, $eX \in \mathcal{P}_n$ ならば、 $eX - X \in \mathcal{P}_{n2^m}$ である。従って、 X の任意のコンパクト化 cX に対して、 $X \in \mathcal{P}_m$ ならば、 $cX - X \in \mathcal{P}_{2^m}$ である。

Corollary 2.1 次は互いに同値である。

- (a) $X \in \mathcal{P}_{fin}$.
- (b) $eX \in \mathcal{P}_{fin}$ となる X の任意の拡張 eX に対して、 $eX - X \in \mathcal{P}_{fin}$.
- (c) $eX \in \mathcal{P}_{fin}$ かつ $eX - X \in \mathcal{P}_{fin}$ となる X の拡張 eX が存在する。
- (d) X の任意のコンパクト化 cX に対して、 $cX - X \in \mathcal{P}_{fin}$.
- (e) $cX - X \in \mathcal{P}_{fin}$ となる X のコンパクト化 cX が存在する。

Remark 2.1 Corollary 2.1 において、 $\mathcal{P}_{fin}$ を $\mathcal{P}_{\aleph_0}$ にすることはできない。なぜならば、 $\mathbb{I} = [0, 1]$ は $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$ のコンパクト化である。しかし、 $\mathbb{P} \sim \mathbb{I} \cap \mathbb{P} = \mathbb{I} \cap \mathbb{Q}$, $\text{lc}(\mathbb{Q}) = \aleph_0 < \text{lc}(\mathbb{P})$ 。

さて、Corollary 2.1 の状況をより詳しく調べたい。たとえば、 $X \in \mathcal{P}_{fin}$ のとき、 X の任意の2つのコンパクト化 c_1X, c_2X に対して、 $\text{lc}(c_1X - X) = \text{lc}(c_2X - X)$ が成り立つだろうか？これについては、Fact 1.2 より、 $\text{lc}(c_1X - X) = 1 \Leftrightarrow \text{lc}(c_2X - X) = 1$ であるので、 $\text{lc}(c_1X - X) \geq 2$ の場合が問題となる。さて、次の補題は容易に示される。

Lemma 2.1 $f : X \rightarrow Y$ を空間 X から空間 Y の上への完全写像とすると、 $\text{lc}(X) \leq \text{lc}(Y)$ が成り立つ。

この補題より直ちに次がわかる。

Proposition 2.2 X の任意のコンパクト化 cX に対して、 $\text{lc}(\beta X - X) \leq \text{lc}(cX - X)$ が成り立つ。

Question 2.1 $f : X \rightarrow Y$ を空間 X から空間 Y の上への完全写像とすると、 $\text{lc}(Y) \leq \text{lc}(X)$ が成り立つか。

さて、空間 X について、 $R^1(X) = R(X)(= X - LC(X))$ とし、任意の自然数 $n \geq 2$ に対して、 $R^n(X) = R^{n-1}(X) - LC(R^{n-1}(X))$ とする。

さらに、

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{2}} = \{X : X \text{ はコンパクト} \}$$

とし、任意の自然数 n に対して、

$$\mathcal{P}_{\frac{n+1}{2}} = \{X : R^n(X) \text{ がコンパクト} \}$$

とする。このとき、明らかに次が成り立つ。

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{2}} \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_{\frac{3}{2}} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{\frac{2n+1}{2}} \subset \mathcal{P}_{n+1} \subset \cdots$$

また、Fact 1.2 より、 $X \in \mathcal{P}_{\frac{3}{2}}$ は、 $\text{lc}(cX - X) = 1$ となる X のコンパクト化 cX を持つこと、及び X 任意のコンパクト化 cX に対して、 $\text{lc}(cX - X) = 1$ となることと同等である。

また、Proposition 2.2 より、任意の $X \in \mathcal{P}_{fin} - \mathcal{P}_{\frac{3}{2}}$ と任意のコンパクト化 cX に対して、次が成り立つ。

$$2 \leq \text{lc}(\beta X - X) \leq \text{lc}(cX - X) \leq 2^{\text{lc}(X)}.$$

Question 2.2 $\text{lc}(\beta X - X) < \text{lc}(cX - X)$ となる空間 $X \in \mathcal{P}_{fin}$ とそのコンパクト化 cX が存在するか？

空間 X は $LC(X) = \emptyset$ のとき、nowhere locally compact と呼ばれ、また、 $LC(X)$ が稠密のとき、almost locally compact と呼ばれる。

空間における 2 つのコンパクト化の剰余については、次が知られている。

Example 2.2 (R.G.Woods in [R]) 次のような条件を満たす空間 X とそのコンパクト化 cX が存在する。

- (1) $cX - X$ は nowhere locally compact,
- (2) $\beta X - X$ は almost locally compact.

Almost locally compact 空間について次がわかる。

Theorem 2.1 空間 X について次は同値である。

- (1) X は almost locally compact.
- (2) $Y \in \mathcal{P}_{fin}$ となる X の稠密部分空間 Y が存在する。

Corollary 2.2 $X \in \mathcal{P}_{fin}$ ならば、 X は almost locally compact である。

次の例が示すように、上の系の逆は成立しない。

Example 2.3 $\mathbb{I}^2$ における 2 つの部分集合 D_1, D_2 を次とする: $D_1 = \mathbb{Q} \times \{1\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{I}^2 : x \leq y\}$. そして、 $X = D_1 \cup D_2$ とする。このとき、 $LC(X) = D_2$ であり、これは X で稠密である。従って、 X は almost locally compact である。他方、 $lc(X) = \aleph_0$ である。

[CHO] において、 $X \in \mathcal{P}_n$ ならば、 X は n 個の局所コンパクト部分空間の直和として表されることが示された。次の定理は、この結果の別証明を与えると共に、空間が n 個の局所コンパクト部分空間の和として表されるときに構造的特性を与える。

Theorem 2.2 任意の空間 X に対して、 $X \in \mathcal{P}_n$ ということと、 $R^n(X) = \emptyset$ は同値である。

Corollary 2.3 $X \in \mathcal{P}_n$ ならば、 $X = LC(X) \cup LC(R^1(X)) \cup \dots \cup LC(R^{n-1}(X))$ と表され、右辺は局所コンパクト部分空間の直和である。

3 Concluding remarks and questions

任意の自然数 $n \geq 2$ に対して、

$$lc_n = \min\{lc(cX - X) : X \in \mathcal{P}_{fin}, cX \text{ は } X \text{ のコンパクト化}\}$$

とする。このとき、任意の自然数 $n \geq 2$ に対して、 $lc_n \leq n - 1$ である。実際、 $A_n \subset \mathbb{I}$ を [CHO][Example 1.1] で構成された空間（また、ここで示された A_n の modification）とすると、 $lc A_n = n$ であり、 $lc(Cl A_n - A_n) = n - 1$ となる。

Question 3.1 $n \geq 2$ に対して、 lc_n を決定せよ。

空間 X に対して、小コンパクト次数 (small compactness degree) $\text{cmp } X$ を次のように定義する。(cf. [AN])

Definition 3.1 (i) X がコンパクトのとき、 $\text{cmp } X = -1$ とする。

(ii) X のすべての点 x に対して任意に小さい近傍 U が $\text{cmp } \text{Bd } U \leq n - 1$ となるように取れるとき、 $\text{cmp } X \leq n$ とする。

Small compactness degree cmp と lc の関係は興味深い。

Question 3.2 $X \in \mathcal{P}_{fin}$ のとき、 $\text{cmp } X \leq \text{lc}(X)$ が成り立つか？

$n \geq 1$ に対して、 $Z_n = ([\mathbb{I}^n \times (0, 1)) \cup (\partial \mathbb{I}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{I}^{n+1}$ とおく。これは、「 $\text{cmp} = \text{def}$ が成り立つ」という de Groot の予想に対する反例の候補として構成された。 $\text{def } Z_n = n$ はすぐに知られ、結局「 $\text{cmp } Z_n \geq n$ か？」(de Groot) という問題が残された。 $\text{cmp } Z_1 = 1$, $\text{cmp } Z_2 = 2$ はよく知られており ([AN]), $n \geq 3$ に対する $\text{cmp } Z_n$ の値については度々紹介されてきたが ([P], [AN] 等)、長い期間にわたって未解決問題として残されてきた。そして、未だにその完全解は得られていない。最近、Chatyrko-Hattori [CH] は $n \geq 5$ に対しては $\text{cmp } Z_n < n$ であることを示し、彼らの証明を修正することにより、Nishiura [N] は、 $\text{cmp } Z_4 < 4$ を示した。そして、Chatyrko-Fedorchuk [ChF] が $\text{cmp } Z_3 = 2$ を示すことにより、上記の de Groot のオリジナルな問題は解決された。しかし、 $n \geq 4$ に対する $\text{cmp } Z_n$ の値についてはまだ決定されておらず、未解決問題として残されたままである。

Nishiura ([N]) は、これについて「すべての n に対して、 $\text{cmp } Z_n \leq 2$? または、 $\text{cmp } Z_n \leq 3$?’と問うている。

明らかに、 $\text{lc}(Z_n) = 2$ であるので、Question 3.2 が肯定解は、Nishiura の問題の肯定解を与える。

Added in Proof

最近、筆者は Theorem 2.2 を用いることにより、次の Henriksen-Isbell の定理の一般化が成り立つことを示した。

Theorem 3.1 (1) 空間 X に対して、次は互いに同値である。

- (a) $X \in \mathcal{P}_n$.
- (b) 任意のコンパクト化 cX に対して、 $cX - X \in \mathcal{P}_{\frac{n-1}{2}}$.
- (c) $cX - X \in \mathcal{P}_{\frac{n-1}{2}}$ となる X のコンパクト化 cX が存在する。

(2) 空間 X に対して、次は互いに同値である。

- (a) $X \in \mathcal{P}_{\frac{n+1}{2}}$.
- (b) 任意のコンパクト化 cX に対して、 $cX - X \in \mathcal{P}_n$.
- (c) $cX - X \in \mathcal{P}_n$ となる X のコンパクト化 cX が存在する。

さらに、この定理を応用することにより、この小論であげた問題 (Questions 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) は容易に解決される。

References

- [AN] J. M. Aarts and T. Nishiura, *Dimension and Extensions* (North-Holland, Amsterdam, 1993)
- [ChF] V. A. Chatyrko and V. V. Fedorchuk, On a question of de Groot, *Vestnik MGU, Ser. Math. Mech.* 6 (2004) 50-52 (translation in *Moscow Univ. Math. Bull.* 60 (2005), no. 2, 22-27) (in Russian)
- [CH] V. A. Chatyrko and Y. Hattori, On a question of de Groot and Nishiura, *Fund. Math.* 172, (2002) 107-115.
- [CHO] V. A. Chatyrko, Y. Hattori and H. Ohta, Partitions of spaces by locally compact subspaces, *Houston J. Math.* 32, 4 (2006) 1077-1091.
- [E] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [HI] M. Henriksen and J. R. Isbell, Some properties of compactifications, *Duke Math. J.* 25 (1958) 83-106.
- [vM] J. van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, Elsevier, Amsterdam, 2001
- [N] T. Nishiura, On the Chatyrko-Hattori solution of de Groot's question, *Topology Appl.* 152, (2005), 310-316.
- [R] M. C. Rayburn, Compactifications with almost locally compact outgrowth, *Proc. Amer. Math. Soc.* 106, 1 (1989) 223-229
- [P] R. Pol, Questions in Dimension Theory, in J. van Mill and G. M. Reed eds., *Open Problems in Topology*, North-Holland 1990, 279-291