

局所解の存在に関する注意

都立大 理 数学

大内 忠

§ 1. H. Lewy の有名な例以来, 解のない方程式についていろいろ研究されてきた. 解のない方程式の例をいくつかあげてみよう.

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} x^{2k+1} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(1.2) \quad x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial x} + x^{2k+1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{l}{i} \frac{\partial}{\partial y} \quad (l: \text{奇数})$$

(1.1) の型の方程式は, その後 Hörmander, Nirenberg - Treves, Eppolo 等により研究された. 解のない単純特性根の場合の簡単な良い例である. 解がないことは, 簡単に,

$$(1.5) \quad \lambda^l e^{i\lambda S} \left(f_0 + \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2}{\lambda^2} + \dots \right)$$

という型の漸近的変解を adjoint 方程式に対して構成すること, その漸近的変解が, $\lambda \rightarrow \infty$ の時 ある種の不等式を不

成立にすることによって示される, (Hörmander, Linear partial diff. op. と参照).

(1.5) の型の漸近解を構成する方法は一般には (4.2), (1.37) に対してはそのまゝ使えない. (しかしながら (1.1) ~ (1.4) の方程式が非可解であることを示すには, adjoint の方程式に対して, 漸近的に singular null solutions を作ればよいことがわかる. すなわち孤立した singularity をもちその特異度がいくらかでも大きくでる null solutions である. これは (1.5) の型の漸近解をもとめる技法と singular solutions を作る技法が形式的には同じであることに注意すれば, (1.1) の方程式の非可解性を示す方法の拡張とて, ていることが容易にわかる.

(1.1) において adjoint の方程式は,

$$-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} x^{2k+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{で} \quad \left(\frac{1}{2k+2} x^{2k+2} + iy \right)^{-N} \quad \text{は}$$

singular null solutions ($N=1, 2, 3, \dots$) であり

(1.2) においては $-x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}$ が adjoint 方程式となり,

$(x^2 + y^2)^{-N}$ ($N=1, 2, 3, \dots$) が singular null solutions.

(1.3) においては $-\frac{\partial}{\partial x} + x^{2k+1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ が adjoint であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^N e^{2y\xi - \frac{x^{2k+2}}{2k+2} |\xi|^2} d\xi \quad (N=1, 2, \dots)$$

が singular null solutions である。これらの考察により、

特異点の孤立性と特異性は bicharacteristic curve に沿って伝わるということから予想される次の結果が得られる。

定理
$$L = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

とする。もし $A = (a_{ij})$ の固有値の中に少なくとも一つ実部が零でないものがあるならば、 L は $x=0$ にあって可解である。

これは、 A が上の条件を満たせば、常微分方程式より定まる characteristic curve が $x=0$ のまわりで閉軌道を作りえないという事実に基づく。

§ 2. (1.4) の型の方程式が解けることも § 1 で述べた方法で示せる。 $l = 2k+1$ の時 Hermite polynomial を用いて singular null solutions で特異度の大きいものが作れるからである。(Grushin, Mat. Sb. 1971) (1.4) の型の方程式の主要部は $p\bar{p}$ ($p = \frac{\partial}{\partial z} + i\alpha\eta$) という型であり、退化の度合いがわかるとよいもの (幾何学的にとりあうかいいもの) によって異なるためより詳しい議論が要する。

この方程式に振動の項がある場合の可解性、正則性の問題は、(1.5)型の漸近解の構成の立場から見直すことかである。

。 $l = 2k+1$ の時、解けないことは amplitude を求める振動項のせいの場合、すなわち (1.4),

transport equation が正則な範囲で解けるための条件である。
(*) またある種の振動に対しては、漸近展開式 (1.5) に
おいて $f_0, f_1, \dots, f_k, \dots$ が次々に求まることから解を
もつため、(*) は hypoelliptic であるための必要十分条件
であることがわかる。

(*)

例えば

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} + h(x) \frac{\partial}{\partial y} \quad h(x) \equiv 0 \text{ の時は解けない}$$

が、 $h(x) \neq 0$ ($h(0) = 0$) の時の可解性の条件は $h(x)$ の条件で
書ける。