

コホモロジー複素射影空間上の 可微分 $SU(n)$ 作用について

阪大理 内田伏一

§1. 或る *isotropy* 型をもった $SU(n)$ 作用.

E を可微 $SU(n)$ 作用をもった多様体とする ($n \geq 3$). さらに, E の各点の *isotropy* 群の単位元を含む連結成分が, $SU(n)$ において

$$SU(n-1) \text{ または } NSU(n-1)$$

と共役であると仮定する. ここに $NSU(n-1)$ は $SU(n)$ における $SU(n-1)$ の正規化群である. このとき

$$S^1 = NSU(n-1)/SU(n-1)$$

は, $X = F(SU(n-1), \overset{E}{\text{pt}})$ に自然に作用する. ただし, X は $SU(n-1)$ 作用に属する E の不動点集合である. 従って, $SU(n)$ 同変な写像

$\Phi: SU(n)/SU(n-1) \times_{S^1} X \rightarrow E$, $[g \cdot SU(n-1), x] \rightarrow g \cdot x$
が定義できるが,

$$g \in SU(n), g^i SU(n-1) g \subset NSU(n-1) \Rightarrow g \in NSU(n-1)$$

が成り立つこと、および可微分スライス定理によって、 π は微分同相写像である。

この事実を使えば、次の補題を証明できる。

補題 1-1 V を実 $SU(n)$ ベクトル空間とする ($n \geq 3$)。

もし、 V の非零ベクトルの *isotropy* 群の単位元を含む連結成分が、常に $SU(n-1)$ または $NSU(n-1)$ と共役であれば、 V は $SU(n)$ の標準的な作用をもつ $\mathbb{R}^{2n}$ と実 $SU(n)$ ベクトル空間として同値である。

次に、 M を可微分 $SU(n)$ 作用をもつ多様体とする ($n \geq 3$)。さらに、 M の各点の *isotropy* 群の単位元を含む連結成分が、 $SU(n)$ において

$$SU(n-1), NSU(n-1), SU(n)$$

のいずれかと共役であると仮定する。不動点集合

$$F = F(SU(n), M)$$

が空集合であれば、先の考察によって、 $SU(n)$ 多様体として

$$(1.2) \quad M = SU(n)/SU(n-1) \times_{S^1} F(SU(n-1), M)$$

である。いま、 $F \neq \emptyset$ であるとし、 M における F の $SU(n)$ 不変な肉管状近傍を U とする。このとき $SU(n)$ 多様体としての分割

$$M = U \cup (SU(n)/SU(n-1) \times_{S^1} X)$$

がある。ただし、 $X = F(SU(n-1), M - \text{int } U)$ である。さて $SU(n)$ 多様体として

$$\partial U = SU(n)/SU(n-1) \times_{S^1} \partial X$$

であり、補題 1-1 によって、 ∂U の各点の *isotropy* 群は $SU(n-1)$ と共役であるから、 ∂X 上の S^1 作用は *free* である。再び、補題 1-1 を使って、球体束 $U \rightarrow F$ は、球体束

$$D^{2n} \times_{S^1} \partial X \longrightarrow \partial X / S^1$$

と、 $SU(n)$ 作用をもつ球体束として同値であることが分かる。従って、 $SU(n)$ 多様体として

$$(1.3) \quad M = \partial(D^{2n} \times X) / S^1 = D^{2n} \times_{S^1} \partial X \cup S^{2n-1} \times_{S^1} X$$

である。

§2. $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の $SU(n)$ 作用.

$2n$ 次元の可微分連結流多様体 M について、コホモロジー環の同型

$$H^*(M; \mathbb{Q}) = H^*(P_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$$

が成り立つとき、 $M = HP_n(\mathbb{C})$ と書くことにし、 M を $\mathbb{Q}$ 上のコホモロジー複素射影空間という。

定理 2-1 $n \geq 7$, $0 \leq k < n-4$ とする. $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の任意の自明でない可微分 $SU(n)$ 作用に対して, 不動点集合は, 或る $HP_k(\mathbb{C})$ であり, $SU(n)$ 多様体として

$$HP_{n+k}(\mathbb{C}) = \partial(D^{2n} \times X)/S^1$$

と表わすことができる. ここに, X は $2k+2$ 次元のコニパクトで向きづけ可能な可微分 S^1 多様体で, ∂X 上の S^1 -作用は free であり, $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = 0$ が成り立つ.

証明. $n \geq 7$ のとき, $SU(n)$ の連結閉部分群 G について,

$$n^2 - 4n + 7 < \dim G < \dim SU(n) = n^2 - 1$$

であれば, G は $SU(n)$ において $SU(n-1)$ または $NSU(n-1)$ と共役であることが分かる. 従って, $0 \leq k < n-4$ のとき, $2n+2k$ 次元多様体上の任意の $SU(n)$ 作用に対して, 各点の isotropy 群の単位元の連結成分は,

$$SU(n-1), NSU(n-1), SU(n)$$

のいずれかと共役になる. 故に §1 の結果を適用することができる.

まず, $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の任意の可微分 $SU(n)$ 作用に対して, 不動点があること, 即ち

$$F = F(SU(n), M) \neq \emptyset$$

であることを示そう. もし, $F = \emptyset$ であれば (1.2) によ

で、可微分ファイバー束

$$F(SU(n-1), M) \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{C})$$

が存在する。従って

$$\chi(M) = \chi(P_{n-1}(\mathbb{C})) \cdot \chi(F(SU(n-1), M))$$

が成り立つことになり、

$$k+1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

これは、仮定 $0 \leq k < n-4$ によって不可能である。故に $F \neq \emptyset$ となり、(1.3) によって、 $SU(n)$ 多様体として

$$M = \partial(D^{2n} \times X)/S^1 = D^{2n}_{S^1} \times X \cup S^{2n-1}_{S^1} \times X$$

と表わすことができる。ここに、 X は $2k+2$ 次元の連結かつコンパクトで向きづけ可能な可微分 S^1 多様体であって、 ∂X 上の S^1 作用は *free* である。次に $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = 0$ を示そう。

$$H^L(M, S^{2n-1}_{S^1} \times X; \mathbb{Q}) \cong H^{L-2n}(\partial X/S^1; \mathbb{Q}), \quad L = 0, 1, 2, \dots$$

が成り立つので、

$$H^L(M; \mathbb{Q}) \cong H^L(S^{2n-1}_{S^1} \times X; \mathbb{Q}), \quad L \leq 2n-2$$

が成り立つ。この事実と、 $k < n-4$ を使って

$$H^*(\partial(D^{2n} \times X); \mathbb{Q}) \cong H^*(S^{2n+2k+1}; \mathbb{Q})$$

が証明できる。故に、Poincaré-Lefschetz duality を用いて

$$\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = 0$$

が示され、さらに、 $H^*(\partial X; \mathbb{Q}) \cong H^*(S^{2k+1}; \mathbb{Q})$ が成り立つ。

従って, $\partial X/S' = HP_k(\mathbb{C})$ が成り立つ. (終)

§3. $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の $SU(n)$ 作用の構成

定理 2-1 の分解

$$HP_{n+k}(\mathbb{C}) = \partial(D^{2n} \times X)/S'$$

の存在を使って, S' 多様体 X を構成することによって, ある $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の $SU(n)$ 作用を具体的に構成してみよう.

まず, 次の補題を準備する (証明省略)

補題 3-1 X をコンパクトで向きづけ可能な $2n+2$ 次元の可微分 S' 多様体とする. ∂X 上の S' 作用が *free* であり,

$$\tilde{H}^*(X; A) = 0, \quad A = \mathbb{Z} \text{ (または } \mathbb{Q})$$

が成り立つとする. $n \geq 2$ であれば,

$$M = \partial(D^{2n} \times X)/S'$$

について,

$$(a) \quad H^*(M; A) \cong H^*(HP_{n+k}(\mathbb{C}); A),$$

$$(b) \quad \pi_1(M) \cong \pi_1(X),$$

が成り立ち, さらに $n+k \geq 3$ であって, X が可縮であると仮定すれば, M は $HP_{n+k}(\mathbb{C})$ と微分同相になる.

定理 3-2 $n \geq 2$ とする.

(a) $k \geq 1, p \geq 1$ に対して, 可微分 $SU(n)$ 作用をもつ $2k$ 多様体 $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$ で,

$$\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_p, \quad F(SU(n), M) \cong P_k(\mathbb{C})$$

を満たすものが存在する.

次に, G を有限表示可能な群で, $H_1(G; \mathbb{Z}) = H_2(G; \mathbb{Z}) = 0$ とすれば,

(b) $k \geq 3$ のとき, 可微分 $SU(n)$ 作用をもつ $2k$ 多様体 $M = HP_{n+k}(\mathbb{C})$ で,

$$\pi_1(M) \cong G, \quad H^*(M; \mathbb{Z}) \cong H^*(P_{n+k}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}),$$

$$F(SU(n), M) = P_k(\mathbb{C})$$

を満たすものが存在する.

(c) $k \geq 3$ のとき, $P_{n+k}(\mathbb{C})$ 上の可微分 $SU(n)$ 作用で

$$\pi_1(F) \cong G, \quad H^*(F; \mathbb{Z}) \cong H^*(P_k(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$$

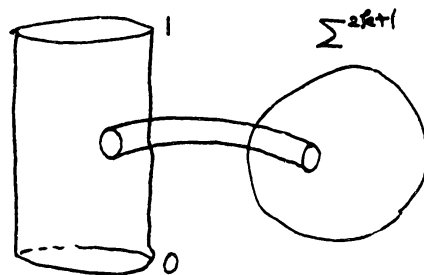
を満たすものが存在する. ただし, $F = F(SU(n), P_{n+k}(\mathbb{C}))$.

証明. 補題 3-1 によって, ある種の S^1 多様体 X を構成すれば十分である.

(i) $k \geq 1$ とする.

$$W = P_k(\mathbb{C}) \times [0, 1] \# \Sigma^{2k+1} \text{ とおく.}$$

ただし,



$$H^*(\Sigma^{2k+1}; A) \cong H^*(S^{2k+1}; A), \quad A = \mathbb{Z} \text{ (or } \mathbb{Q})$$

このとき, $\partial W = P_k(\mathbb{C}) \times 0 \cup P_k(\mathbb{C}) \times 1$ であって,

$$(1) \quad \pi_1(W) \cong \pi_1(\Sigma^{2k+1}),$$

$$(2) \quad H^*(W; A) \cong H^*(P_k(\mathbb{C}); A)$$

が成り立ち, さらに可微分主 S^1 束 $\pi: E \rightarrow W$ で,

$$\begin{array}{ccc} \partial_1 E & \longrightarrow & P_k(\mathbb{C}) \times L \quad (L=0,1) \\ \parallel & & \\ \pi^{-1}(P_k(\mathbb{C}) \times L) & & \end{array}$$

が, Hopf 束 $S^{2k+1} \rightarrow P_k(\mathbb{C})$ と同値になるものが存在し,

$$(1) \quad \pi_1(E) \cong \pi_1(W),$$

$$(2) \quad H^*(E, \partial_1 E; A) = 0$$

が成り立つ. そこで

$$X = E \cup_{\partial_1 E} D^{2k+2}$$

とすれば, X はコンパクト連結向きづけ可能な $2k+2$ 次元可微分多様体で, 準自由可微分 S^1 作用をもち, $\partial X = S^{2k+1}$ 上の S^1 作用は linearかつ free である. さらに

$$(1) \quad \pi_1(X) \cong \pi_1(\Sigma^{2k+1}),$$

$$(2) \quad \tilde{H}^*(X; A) = 0$$

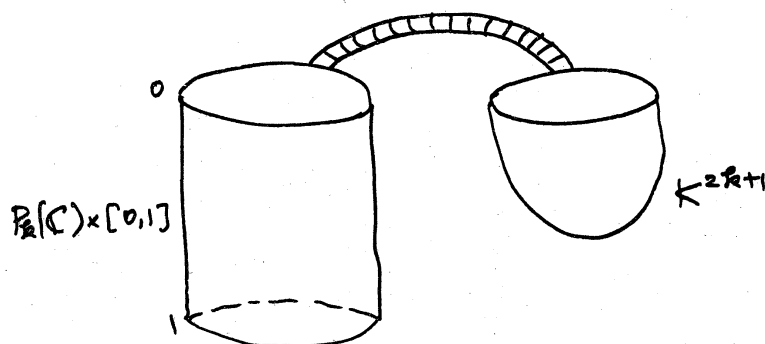
が成り立つ. この X に対して, 補題 3-1 を適用することによって (a), (b) の例を構成できる. すなわち, (a) の例は, $\Sigma^{2k+1} = S^{2k+1}/\mathbb{Z}_p$ を使えば良く, (b) の例については, 後

記の注3-3を参照せよ.

(ii) 次に (c) の例を構成しよう. K^{2k+1} をコンパクトで可縮な可微分多様体とし,

$$W = P_k(\mathbb{C}) \times [0, 1] \# K^{2k+1} \quad (\text{boundary connected sum})$$

とする.



ここに,

$$\partial W = P_k(\mathbb{C}) \# \partial K \cup P_k(\mathbb{C}) \times 1$$

であり, $P_k(\mathbb{C}) \times 1$ は W の deformation retract である.

故に, 可微分主 S^1 束 $\pi: E \rightarrow W$ で

$$\begin{array}{ccc} \partial_1 E & \xrightarrow{\quad} & P_k(\mathbb{C}) \times 1 \\ \parallel & & \\ \pi^{-1}(P_k(\mathbb{C}) \times 1) & & \end{array}$$

が, Hopf 束 $S^{2k+1} \rightarrow P_k(\mathbb{C})$ と同値になるものが存在する.

このとき,

$$X = E \cup_{\partial_1 E} D^{2k+2}$$

は, コンパクト可縮な $2k+2$ 次元可微分多様体で, 準自由 S^1

作用をもち, ∂X 上の S' 作用は *free* で,

$$\partial X / S' = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \# \partial K$$

が成り立つ. この X に対して, 補題 3-1 を適用することによって, (c) の例を構成できる. (注 3-3 参照). (終)

注 3-3 G を有限表示可能な群で,

$$H_1(G; \mathbb{Z}) = H_2(G; \mathbb{Z}) = 0$$

を満たすものとする. 任意の $m \geq 7$ に対して, コンパクト可縮な m 次元可微分多様体 K で, $\pi_1(\partial K) = G$ を満たすものが存在する. さらに, この様な G は無数に存在することが知られている. (cf. 田村一郎: 多様体の多様性, 「数学」 21-4 (1969), 275-285)