

弱双曲型方程式に対する Cauchy 問題

早大 理工 公生 等

§1 序

特性根が m 重に交わる或る双曲型方程式について、コーシー問題のパラメトリクス構成を行う。

次の偏微分作用素に対してコーシー問題を考える。

$$\begin{cases} P(x, t, D_x, D_t) u(x, t) = f(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, T] \\ (D_t^j u)(x, 0) = u_j(x) & \text{for } j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

ここで、 $P = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ j \leq m-1}} a_{\alpha,j}(x, t) D_x^\alpha D_t^j$, $a_{\alpha,j} \in C^\infty$ 。

さらに P を同次部分に分解しよう。即ち、

$$P = P_m + P_{m-1} + \dots + P_0.$$

ここで、 $P_{m-j}(x, t, \xi, \tau) = \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x, t, \xi) \tau^{m-j-i}$

で、 $a_{ij}(x, t, \xi)$ は ξ について i 次斉次。

このとき、次の定理が成立する。

1.

定理 1

$$(1) \quad P_m(x, t, \xi, z) = \prod_{j=1}^m (z - t^k \lambda_j(x, t, \xi))$$

$\{\lambda_j\}$ は real valued smooth function で互いに distinct, さらに $\lambda_j(x, 0, \xi) \neq 0$ 。

このとき、低階条件として、

$$(2) \quad a_{ij}(x, t, \xi) = t^{ik-j} \tilde{a}_{ij}(x, t, \xi) \text{ for } ik > j$$

ここで, $\tilde{a}_{ij}(x, t, \xi) \in C^\infty$

$\Leftrightarrow P$ に対するコーシー問題は C^∞ -適切である。

定理 2. (特に $l=1$ のとき)

$$(3) \quad P_m(x, t, \xi, z) = \prod_{j=1}^m (z - x^k \lambda_j(x, t, \xi))$$

$\{\lambda_j\}$ は real valued smooth function で互いに distinct, さらに $\lambda_j(0, t, \xi) \neq 0$

このとき、低階条件として、

$$(4) \quad a_{ij}(x, t, \xi) = x^{ik} \tilde{a}_{ij}(x, t, \xi), \text{ ここで } \tilde{a}_{ij} \in C^\infty$$

$\Leftrightarrow P$ に対するコーシー問題は C^∞ -適切である。

注.

十分性の証明は [8] 参照。必要性の証明は、Iurii - Petkov [4] の定理 4.1 に適用するのだが、このとき伝播速度が有限である事を示す必要がある。

これについては田原氏より簡単に示せる事を教えていただきました。

さて、定理1、定理2の条件の下でパラメトリクスの構成を行う。

定理 1'

定理1の条件の下で、次の函数を定義する。

$$G_i(x, \xi) = \sum_{j=0}^{m-1} (m-j) \lambda_i^{m-j-1}(x, 0, \xi) \tilde{a}_{j,0}(x, 0, \xi)$$

$$H_i(x, \xi) = k \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2} (m-j)(m-j-1) \lambda_i^{m-j-1}(x, 0, \xi) \tilde{a}_{j,0}(x, 0, \xi) \\ + \sqrt{-1} \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_i^{m-j-1}(x, 0, \xi) \tilde{a}_{j,1}(x, 0, \xi)$$

このとき、 $\{\lambda_i\}$ が互いに distinct であることより

$G_i(x, \xi) \neq 0$ だから、 $m_i = \sup_{(x, \xi)} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{H_i(x, \xi)}{G_i(x, \xi)} \right\}$ が定義できる。

このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して、或る

$$a_{h,i}(x, t, \xi) \in S^{\frac{1}{k+1}(m_i - h + \varepsilon), m_i + \varepsilon}$$

$$\tilde{a}_{h,i}(x, t, \xi) \in S^{\frac{1}{k+1}(m_i - h + \varepsilon)}$$

が存在して、コーシー問題；

$$(5) \begin{cases} P(x, t, D_x, D_t) u(x, t) = 0 \\ (D_t^h u)(x, 0) = u_h(x) \quad \text{for } h = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

に対するパラメトリクスは、

$$(6) \quad E(t, x) = \sum_{h=0}^{m-1} \sum_{j=1}^m \int e^{i\varphi_j(x, t, \xi)} (a_{h,j} + \tilde{a}_{h,j}) \hat{u}_h(\xi) d\xi$$

と表わされる。ここで $\varphi_j(x, t, \xi)$ は、次の方程式の解である。

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = t^k \lambda_j(x, t, \nabla_x \varphi), \quad \varphi(x, 0, \xi) = x\xi$$

注.

1° $S^k(S^{k,l})$ は Hörmander (Boutet de Monvel) class の擬微分作用素の表象。

2° m_i は、 P_m と P_{m-1} のみで決まる。

3° 中村氏 [2] の条件を我々の形に書きなおしてみると、 $a_{ij}(x, t, \xi) = t^{\mu_{ij}} \tilde{a}_{ij}(x, t, \xi)$ とおいたとき、 $\mu_{ij} > ik - j$ というものであった。従って、氏の条件の下では、 $H_i(x, \xi)$ において、 $\sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_i^{m-j-1}(x, 0, \xi)} \tilde{b}_{j,i}(x, 0, \xi) = 0$ となっていて低階からの影響がでていなかった。

次に定理 2 に対応するパラメトリクスを考える。定理 2 の条件の下では主部が対角形の系になおることができる。従って、Kumano-go, Taniguchi, Tozaki 4.

[3] による Fourier 積分作用素の多重積で基本解を構成することができる。よって、

定理 2'

定理 2 の条件のもとで、Fourier 積分作用素の多重積で基本解を構成することができる。

以下、本稿で行うことは、定理 1' の略証を与える事である。

§2 定理 1' の略証

簡単のため次のコーシー問題を考える。

$$(8) \begin{cases} P(x, t, D_x, D_t) u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = u(x), \quad (D_t^h u)(x, 0) = 0 \quad 1 \leq h \leq m-1 \end{cases}$$

パラメトリクスとして、次の形を考える。

$$(9) E(t, x) = \sum_{j=1}^m \int e^{i\varphi_j(x, t, \xi)} e_j(x, t, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

P を形式的に作用させてみると、

$$P E(t, x) = \sum_{j=1}^m \int e^{i\varphi_j(x, t, \xi)} T_j(x, t, \xi, D_x, D_t) e_j(x, t, \xi) \times \hat{u}(\xi) d\xi$$

なる作用素 $T_j(x, t, \xi, D_x, D_t)$ が定まる。これを transport operator と呼ぶことにする。

定義

$P(x, t, \xi, D_x, D_t)$ が semi-homogeneous degree j であるとは、変換：

$$(t, x, \xi) \longrightarrow (\lambda^{-\frac{1}{k+1}}, x, \lambda \xi) \quad \lambda > 0$$

によって、 P が $\lambda^j P(x, t, \xi, D_x, D_t)$ に移る事である。

このとき次の lemma が成立する。

Lemma 1

T_j は次のように semi-homogeneous part に分解される。 $T_j = T_{j,0} + T_{j,1} + \dots$, ここに $T_{j,i}$ は semi-homogeneous degree $\frac{m-i}{k+1}$ である。特に、

$$(10) \quad T_{j,0} u = e^{-i \frac{t^{k+1}}{k+1} \lambda_j(x,0,\xi)} L_0 \left(e^{i \frac{t^{k+1}}{k+1} \lambda_j(x,0,\xi)} u \right)$$

$$\text{ここに, } L_0 = \sum_{\substack{ik \geq j \\ j \leq \frac{k}{k+1} m}} \tilde{a}_{ij}(x,0,\xi) t^{ik-j} D_t^{m-i-j}$$

次に $t = |\xi|^{-\frac{1}{k+1}} s$ と変換すると, L_0 は次のように表現できる。

$$(11) \quad L_0 = |\xi|^{\frac{m}{k+1}} \left(\sum_{\substack{ik \geq j \\ i \leq \frac{k}{k+1}m}} b_{ij}(x, \xi) s^{ik-j} D_s^{m-j-i} \right) \\ = |\xi|^{\frac{m}{k+1}} M_0$$

$$\text{ここで, } b_{ij}(x, \xi) = |\xi|^{-i} \check{a}_{ij}(x, \xi)$$

さらに singular な変換: $s' = \frac{1}{k+1} s^{k+1}$ を行って M_0 を $s' = \infty$ が不確定特異点 rank 1 となる作用素に移す。

Lemma 2

M_0 は 変換: $s' = \frac{1}{k+1} s^{k+1}$ により次のように移る。

$$(12) \quad M_0 = \{ (k+1)s' \}^{\frac{k}{k+1}m} N_0 \\ \text{ここで, } N_0 = D_{s'}^m + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^j c_{ji} s'^i \right) s'^{-j} D_{s'}^{m-j}$$

N_0 の解に対しては、形式解の $s' \rightarrow \infty$ での漸近的意味付が Nakamura [2] で与えられている。従って、 M_0 の形式解の $s \rightarrow \infty$ での漸近的意味付を得る事ができる。

さて、パラメトリクス構成を始めよう。 transport operator を Lemma 1 で semi-homogeneous part に分解したが、 $e_j(x, t, \xi)$ も同様に分解して求める。即ち、

$$e_j(x, t, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} e_{j,i}(x, t, \xi)$$

ここで $e_{j,i}(x, t, \xi)$ は semi-homogeneous deg. $-\frac{i}{k+1}$ すると、 $T_j(x, t, \xi, D_x, D_t) e_j(x, t, \xi) = 0$ より、

$$(13) \begin{cases} T_{j,0} e_{j,0} = 0 \\ T_{j,0} e_{j,i} = - \sum_{r=1}^i T_{j,r} e_{j,i-r} \end{cases}$$

$\xi = z$, $e^{(i)}(x, t, \xi) = \sum_{j=1}^m e^{i \frac{1}{k+1} t^{k+1} \lambda_j(x, 0, \xi)} e_{j,i}(x, t, \xi)$ とおくと、(13) は次の方程式に移る。

$$(14) \begin{cases} L_0 e^{(0)} = 0 \\ L_0 e^{(i)} = - \sum_{j=1}^m e^{i \frac{1}{k+1} t^{k+1} \lambda_j(x, 0, \xi)} \sum_{r=1}^i T_{j,r} e_{j,i-r} \end{cases}$$

$\sum_{r=1}^i T_{j,r} e_{j,i-r}$ の semi-homogeneous deg. は $\frac{m-i}{k+1}$ である事に注意すると我々は次の問題を考えればよい。

$$(15) \quad \boxed{\begin{aligned} L_0 e^{(i)} &= \sum_{j=1}^m e^{-\frac{1}{k+1} t^{k+1} \lambda_j(x, 0, \xi)} g_j^i(x, t, \xi) \\ \text{ここで、} g_j^i(x, t, \xi) &\text{ は、semi-homogeneous deg. } \frac{m-i}{k+1} \end{aligned}}$$

$\xi = z$, $t = |\xi|^{-\frac{1}{k+1}} s$ と変換してみると、(15) は

$$M_0 \tilde{e}^{(i)} = \sum_{j=0}^m e^{i \frac{1}{k+1} s^{k+1} \tilde{\lambda}_j(x, 0, \xi)} g_j^i(x, s, \frac{\xi}{|\xi|})$$

$$\text{ここで, } \tilde{e}^{(i)}(x, s, \xi) = e^{(i)}(x, s, \frac{\xi}{|\xi|})$$

$$\tilde{\lambda}_j(x, 0, \xi) = \lambda_j(x, 0, \xi)/|\xi|$$

すでに見たように M_0 の形式解の漸近的意味付けが与えられる事はわかってゐるので、我々は形式解にのみ注目すれば良い。この事から次の Lemma が従う。

Lemma 3

$$(b) D_s^{\alpha_0} D_{x, \xi}^{\alpha} \tilde{e}_{j, i}(x, s, \xi) = O(s^{m_j + i - \alpha_0} (\log s)^{\Phi(\alpha, i)})$$

ここで, $\Phi(\alpha, i)$ は, positive integer

$$\tilde{e}_{j, i}(x, s, \xi) = e_{j, i}(x, s, \frac{\xi}{|\xi|})$$

さて, Boutet de Monvel フラスを定義しよう。

定義

$a(t, x, \xi) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n)$ が $S^{g, r}$ に属すとは、任意の α, β , $K \subset \mathbb{R}^n$ compact set, に対し 或る $C_{\alpha, \beta, K}$ が存在して、次の表式を満たす事である。

$$|D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha'} D_\xi^\beta a(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{g - |\beta|} (|\xi|^{-1} + t^{k+1})^{\frac{r - \alpha_0}{k+1}}$$

Lemma 3 より, $S = |\xi|^{\frac{1}{k+1}} t$ と変数をもどしてやると,
次の lemma を得る。

Lemma 4.

$$(17) \quad e_{j,i}(x,t,\xi) \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon), m_j+i+\varepsilon}$$

for any $\varepsilon > 0$

ここでも、Boutet de Monvel class の一般の性質
に注目しよう。

Proposition

- 1° $S^{g,r} \subset S^{g',r'}$ if $g - \frac{r}{k+1} \leq g' - \frac{r'}{k+1}$
- 2° $S^{g,\infty}$ の π は, $S^{-\infty}$ の π と $t=0$ での flat な S^g の π との和で書ける。
- 3° $p_j \in S^{g,r+j}$ ($j=0,1,\dots$) が与えられたとき,
或る P が存在し, $P \in S^{g,r}$ で
 $P - \sum_{j < N} p_j \in S^{g,r+N}$ for any $N \geq 0$

Lemma 4 より Proposition の 3° を使えば, 或る

$$e_j \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon), m_j+\varepsilon} \quad \text{が} \quad \text{存在し,}$$

$$e_j - \sum_{i < N} e_{j,i} \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon), m_j+\varepsilon+N} \quad \text{for any } N \geq 0$$

とるで、今求めた e_j でパラメトリクスが作れたわけではない。仮せうら、 $T_j e_j \in S^{-\infty}$ ではないからである。ところが次の lemma が成り立つ。

Lemma 5

$$(18) \quad T_j e_j \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j + \varepsilon) + m - 1, \infty}$$

従って Proposition 2° より $T_j e_j$ は $S^{-\infty}$ を法として $t=0$ で flat な表象 $S^{\frac{1}{k+1}(m_j + \varepsilon) + m - 1}$ となる。

そこで、改めてパラメトリクスとして補正項を考え合わせ次のように書く。

$$E(x, t) = \sum_{j=1}^m \int e^{i\varphi_j(x, t, \xi)} (e_j + \tilde{e}_j) \hat{u}(\xi) d\xi$$

P を作用させると、

$$PE(x, t) = \sum_{j=1}^m \int e^{i\varphi_j(x, t, \xi)} T_j (e_j + \tilde{e}_j) \hat{u}(\xi) d\xi$$

$T_j (e_j + \tilde{e}_j) = 0$ とするようにな $\tilde{e}_j$ を求めたい。

上の注釈より、そのためには $t=0$ を解けばよい。

$$(19) \quad T_j \tilde{e}_j = r_j \quad r_j \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j + \varepsilon) + m - 1}$$

r_j は $t=0$ で flat

今度は T_j を同次部分に分解する。

Lemma 6

$$T_j = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{T}_{j,i}$$

ここで $\tilde{T}_{j,i}$ は, ξ について $m-1-i$ 次斉次
特に,

$$(20) \quad \tilde{T}_{j,0} = t^{(m-1)k-1} A_{j,0} \left\{ t(D_t + \sum_{\nu=1}^n A_{j,\nu} D_{x_\nu}) + B_j \right\} \\ A_{j,0}(x, t, \xi) \neq 0$$

$$L_j = \mathcal{D} \quad \frac{dX_\nu}{dt} = A_{j,\nu}(X, t, \xi), \quad X_\nu(0) = x_\nu \text{ の解}$$

$X_\nu = X_\nu(x, t, \xi)$ 変数変換すると, (20) は,

$$(21) \quad \tilde{T}_{j,0} = t^{(m-1)k-1} \tilde{A}_{j,0}(t, X, \xi) \{ tD_t + \tilde{B}_j(t, X, \xi) \} \\ \text{に移る。}$$

(19) を解くために, $\tilde{e}_j = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{e}_{j,i}$ とすると, 次の方程式群を得る。

$$\begin{cases} \tilde{T}_{j,0} \tilde{e}_{j,0} = r_j \\ \tilde{T}_{j,0} \tilde{e}_{j,i} = - \sum_{k=1}^{\min\{m-1,i\}} \tilde{T}_{j,k} \tilde{e}_{j,i-k} \quad i \geq 1 \end{cases}$$

$$\tilde{e}_{j,i} \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)-i} \quad \text{で } t=0 \text{ で flat であるように}$$

解きたい。ところで、それを保障するものとして次の lemma がある。

Lemma 7. (Yoshikawa [6])

$a(t) \in C^\infty[0, \infty)$ のとき, $t=0$ で flat な $f(t) \in C^\infty[0, \infty)$ に対し 方程式;

$$\left(t \frac{d}{dt} + a(t)\right) u(t) = f(t)$$

は $t=0$ で flat な解 $u(t) \in C^\infty[0, \infty)$ を持つ。

従って lemma 6, 7 より $\tilde{e}_{j,i} \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)-i}$ で $t=0$ で flat になるように $\tilde{e}_{j,i}$ が求まる。さらに Hörmander class の性質より, 或る $\tilde{e}_j \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)}$ が存在して、次を満たす。

$$\tilde{e}_j - \sum_{i < N} \tilde{e}_{j,i} \in S^{\frac{1}{k+1}(m_j+\varepsilon)-N} \quad N \geq 0$$

今度は, $T_j \tilde{e}_j = r_j$ を $\text{mod } S^{-\infty}$ で満たしている。従って、求めるパラメトリクスが得られた事になる。

参考文献

- (1) Zeman, M., The wellposedness of the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristics, comm. in Partial Differential Equations 2(3) 223-249 (1977)
- (2) Nakamura, G., A parametrix of a certain linear hyperbolic partial differential equation with variable multiplicity, to appear
- (3) Kumano-go, H., Taniguchi, K., Tozoki, Y., Multi-product of phase functions for Fourier integral operators with an application, comm. in Partial Differential Equations 3(4) 349-380 (1978)
- (4) Ivrii, V., Petkov, V., Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys 29, 3-70 (1974)
- (5) Ohya, Y., Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa vol. IV, 4 757-805 (1977)
- (6) Yoshikawa, A., Construction of a parametrix for the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation I, II, III, to appear
- (7) Uryu, H., The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, in preparation
- (8) Uryu, H., 弱双曲型方程式に対するコーシー問題. 早大理工修士論文 (1978)