

Hierarchical model and triviality of ϕ_4^4

東工大 理学部 原 隆 (Takashi Hara)
名大 多元数理 服部哲弥 (Tetsuya Hattori)
日本医大 基礎科学 渡辺 浩 (Hiroshi Watanabe)

abstract

Hierarchical Ising model のくりこみ群軌道を, characteristic function を用いて調べることにより, 4 次元以上において, 連続極限は Gauss であることを示す approach を紹介する.

1 Hierarchical model

4 次元 ϕ^4 理論の triviality を論ずるには, 強結合領域におけるくりこみ群の trajectory を追跡しなければならない. そこで, ϕ^4 model の強結合極限である Ising model の hierarchical 近似 [1, 2, 3, 4, 5] に対し, 強結合領域のくりこみ群解析を考える.

1.1 Hierarchical model の定義

よく知られているように, 1 次元の最隣接相互作用 Ising model は相転移しない. しかし spin が long range interaction を持つときは相転移し得る. Dyson [1] は, 今日 hierarchical model と呼ばれる特殊な spin 系を導入して, この事実を示した. Hierarchical model は, くりこみ群変換が単純になるように Gaussian measure の部分を改変した model であり, 言わば, くりこみ群解析の練習台である.

2^N 個の spin 変数

$$\phi_\theta = \phi_{\theta_N, \dots, \theta_1}, \quad \theta = (\theta_N, \dots, \theta_1) \in \{0, 1\}^N \quad (1.1)$$

を考え, Hamiltonian

$$H_N(\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{c}{4}\right)^n \sum_{\theta_N, \dots, \theta_{n+1}} \left(\sum_{\theta_n, \dots, \theta_1} \phi_{\theta_N, \dots, \theta_1} \right)^2 \quad (1.2)$$

および single spin distribution $h(\phi_\theta)$ が定める統計力学系を

$$\langle F \rangle_{N,h} = \frac{1}{Z_{N,h}} \int d\phi F(\phi) \exp(-\beta H_N(\phi)) \prod_{\theta} h(\phi_\theta) \quad (1.3)$$

$$Z_{N,h} = \int d\phi \exp(-\beta H_N(\phi)) \prod_{\theta} h(\phi_\theta) \quad (1.4)$$

で定義する. ただし,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = 1 \quad (1.5)$$

とする. これを 階層模型 (hierarchical model) という.

特に, 大きさ s の Ising spin measure

$$h_{\text{Ising}}(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s) + \delta(x+s)) \quad (1.6)$$

は, ϕ^4 形 single spin measure

$$h_{\mu\lambda}(x) = \text{const.} \exp(-\mu x^2 - \lambda x^4) \quad (1.7)$$

の強結合極限

$$\mu = -2\lambda s^2, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

と考えられるので, くりこみ群の強結合問題の例として hierarchical Ising model を考察する.

Hierarchical Ising model は, 条件

$$0 < c < 2 \quad (1.9)$$

のもとで infinite volume limit が存在し, 条件

$$1 < c < 2 \quad (1.10)$$

のもとで, 相転移がある [1]. また spin 変数 ϕ を定数倍することにより, $\beta > 0$ を任意の正数にすることができるので, 以下

$$\beta = \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \quad (1.11)$$

とおくことにする.

1.2 Block spin くりこみ群

Block spin ϕ' を

$$\phi'_\tau = \frac{\sqrt{c}}{2} \sum_{\theta_1=0,1} \phi_{\tau\theta_1}, \quad \tau = (\tau_{N-1}, \dots, \tau_1) \quad (1.12)$$

で定義すると,

$$\sum_{\theta_n, \dots, \theta_1} \phi_{\theta_n, \dots, \theta_1} = \sum_{\theta_n, \dots, \theta_2} \frac{\sqrt{c}}{2} \phi'_{\theta_n, \dots, \theta_2} \quad (1.13)$$

よって

$$H_N(\phi) = H_{N-1}(\phi') - \frac{1}{2} \sum_{\tau} \phi'_{\tau}{}^2 \quad (1.14)$$

となり, $F(\phi)$ が block spin の関数

$$F(\phi) = F'(\phi') \quad (1.15)$$

のとき,

$$\langle F \rangle_{N,h} = \langle F' \rangle_{N-1, \mathcal{R}h} \quad (1.16)$$

$$\mathcal{R}h(x) = \text{const.} \exp\left(\frac{\beta}{2}x^2\right) \int_{\mathbb{R}} dy h\left(\frac{x}{\sqrt{c}} + y\right) h\left(\frac{x}{\sqrt{c}} - y\right), x \in \mathbb{R} \quad (1.17)$$

が成立する. 即ち, くりこみ群変換は h の非線形変換 $\mathcal{R}$ として実現される. そこで, 様々の初期値 h_0 に対して, $\mathcal{R}$ の trajectory

$$h_n = \mathcal{R}^n h_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

を調べることが必要になる.

1.3 Gaussian trajectory

Single spin measure を Gauss

$$h_0(x) = \text{const.} \exp\left(-\frac{\alpha_0}{2}x^2\right) \quad (1.19)$$

にとると, くりこみ群の trajectory は

$$\mathcal{R}^n h_0(x) = \text{const.} \exp\left(-\frac{\alpha_n}{2}x^2\right) \quad (1.20)$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{2}{c}\alpha_n - \beta \quad (1.21)$$

となる. 従って, (1.11) のもとでは

$$\alpha_n = \left(\frac{2}{c}\right)^n \left(\alpha_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

となる. 従って, 系は

$$\alpha_N > 0 \quad (1.23)$$

のときに well-defined となり,

$$\alpha_0 > \frac{1}{2} \quad (1.24)$$

のとき infinite volume limit を持つ. 特に $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ のとき,

$$h_G(x) = \text{const.} \exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right) \quad (1.25)$$

は $\mathcal{R}$ の fixed point となり, massless Gaussian measure を定める.

1.4 Dimensionality

$m = 1, 2, \dots, N$ に対し,

$$M_m(\phi) = \sum_{\theta_m, \dots, \theta_1} \phi_{\theta_m, \dots, \theta_1} \quad (1.26)$$

$$\chi_{m,N,h} = \frac{1}{2^m} \langle M_m(\phi) \rangle_{N,h} \quad (1.27)$$

とおく. $\chi_{N,N,h}$ は spin 系の susceptibility

$$\chi_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \langle \phi(0) \phi(x) \rangle \quad (1.28)$$

に相当する.

Block spin を用いると,

$$\chi_{m,N,h} = \frac{2}{c} \chi_{m-1,N-1,2h} \quad (1.29)$$

を得る. 特に $h = h_G$ とし, infinite volume limit $N \rightarrow \infty$ をとると,

$$\chi_{m,\infty,h_G} = \text{const.} \left(\frac{2}{c}\right)^m \quad (1.30)$$

となる.

これを $\mathbb{Z}^d (d > 2)$ 上の massless Gaussian model の correlation decay

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle \sim \text{const.} |x - y|^{-d+2}, \quad |x - y| \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

から得られる評価

$$\sum_{|x| < r} \langle \phi(0) \phi(x) \rangle \sim \text{const.} r^2 \quad (1.32)$$

と等置すると

$$\left(\frac{2}{c}\right)^m = r^2 \quad (1.33)$$

となり, さらに spin 数の関係 $2^m \sim r^d$ を用いると

$$c = 2^{1-2/d} \quad (1.34)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(2^{2/d} - 1) \quad (1.35)$$

を得る. c が (1.34) を満たすとき, d 次元 hierarchical model と言うことにする.

1.5 Fixed points

(1.25) は自明な (Gaussian) fixed point であるが, 自明でない (non-Gaussian) fixed point の存在に関しては, 次のことが知られている.[2, 3, 4]

- $d \geq 4$ では, φ_G の “近く” に non-Gaussian fixed point は存在しない.
- $d < 4$ で d が十分 4 に近いとき, φ_G の “近く” に non-Gaussian fixed point が存在する.

さらに,

- $d \geq 4$ では, φ_G の “近く” から出発する trajectory を用いて構成される連続極限は, trivial である

ことも分かっている.

しかし, Ising や強結合 ϕ^4 model の triviality を論ずるには, Ising や強結合 ϕ^4 model (これらは Gauss 近傍にはない) から出発する trajectory を調べなければならない. しかし, [2, 4] で導入された Gauss 近傍の定義が複雑であるために, この領域に trajectory が届いているかどうかを確かめることは難しい.

この難点を解決するのが, characteristic function である.

2 Characteristic function

Single spin distribution h_n の characteristic function

$$\varphi_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} h_n(x) \quad (2.1)$$

に対するくりこみ群変換は

$$\varphi_{n+1} = \mathcal{R}\varphi_n \quad (2.2)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{TS} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{S}g(\xi) = g\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right)^2 \quad (2.4)$$

$$\mathcal{T}g(\xi) = \exp\left(-\frac{\beta}{2}\Delta\right)g(\xi) \quad (2.5)$$

となる.

特に Ising spin

$$h_0(x) = \frac{1}{2}(\delta(x-s) + \delta(x+s)) \quad (2.6)$$

の場合, 初期値は

$$\varphi_0(\xi) = \cos(s\xi) \quad (2.7)$$

である.

2.1 $d = \infty$ の場合

$c = 2, \beta = 0$ とすると, recursion は

$$\varphi_{n+1}(\xi) = \varphi_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (2.8)$$

となる. 特に Ising spin の場合

$$\varphi_n(\xi) = \cos^{2^n}\left(\frac{s\xi}{2^{n/2}}\right) \quad (2.9)$$

$$\rightarrow \exp\left(-\frac{s^2}{2}\xi^2\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

従って, この trajectory を用いて構成された連続極限は Gauss (trivial) である. (これは実質的に中心極限定理である.)

(2.10) について若干の注意を付け加えると,

- $|\xi| < 2^{n/2} \frac{\pi}{2s}$ を満たす ξ に対して

$$\varphi_n(\xi) = \exp(-V_n(\xi)) \quad (2.11)$$

$$V_n(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{2j}^{(n)} \xi^{2j} \quad (2.12)$$

と書き, V_n を dual potential と呼ぶことにする. このとき V_n の係数は, recursion

$$\mu_{2j}^{(n)} = 2^{1-j} \mu_{2j}^{(n-1)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

に従う. 即ち, ξ^2 の項は marginal であり, 4 次以上の項は irrelevant である.

- “Dual potential” $V_n(\xi)$ の定義域は

$$|\xi| < 2^{n/2} \frac{\pi}{2s} \quad (2.14)$$

であるが, その continuum limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(\xi) = \frac{s^2}{2} \xi^2 \quad (2.15)$$

は, 各点収束極限として $\mathbb{R}$ 全体で定義される. 即ち, continuum limit に必要な情報は, 初期的 characteristic function の $\xi = 0$ の無限小近傍だけである. これは, characteristic function を用いたくりこみ群解析に, large field problem が現れないことを意味する.

- Ising spin (2.6) の場合, “dual potential” の初期値

$$V_0(\xi) = \frac{s^2}{2} \xi^2 + \frac{s^4}{12} \xi^4 + \frac{s^6}{45} \xi^6 + \frac{17s^8}{2560} \xi^8 + \dots \quad (2.16)$$

は正係数をもつ. そして, (2.13) から, この性質は ($d = \infty$ の) くりこみ群変換によって保存されることが分かる.

2.2 $d < \infty$ の場合

$d < \infty (\beta > 0)$ においては, (2.5) の operator T が働くので, 上記の dual potential の描像は定量的にも定性的にも変化する.

例えば, relevant/irrelevant terms の分類は次のようになる.

- $d > 4$ では, ξ^2 は relevant, ξ^4 以上は irrelevant となる.
- $d = 4$ では, ξ^2 は relevant, ξ^4 は marginal, ξ^6 以上は irrelevant となる.
- $d < 4$ では, ξ^2, ξ^4 は relevant, そして d の低下に伴って, relevant part が増えて行く.

この描像は, 前述の non-Gaussian fixed point の存在問題に深く関係する. そこで, くりこみ群の trajectory を数値的に調べ, この描像が正しいことを直観的に確かめておく. [“摂動的”な計算によって示すことももちろんできる.]

2.3 数値計算

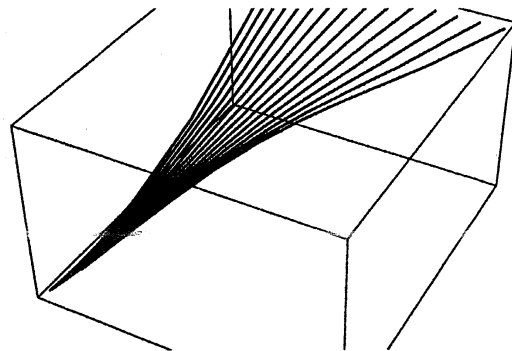
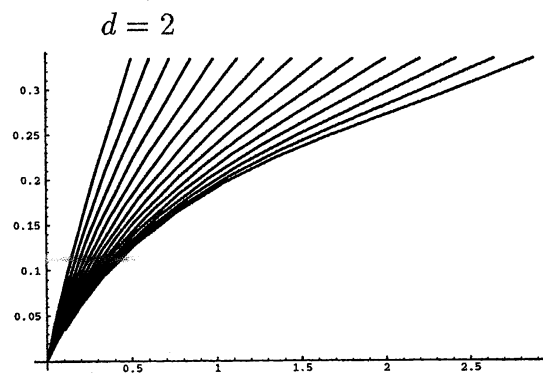
Dual potential の係数を無次元化する.

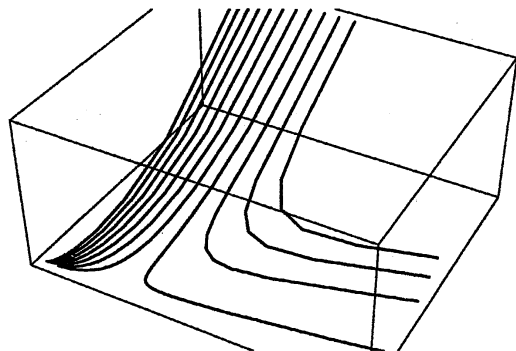
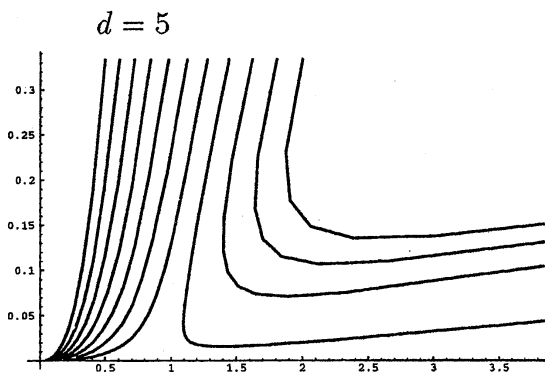
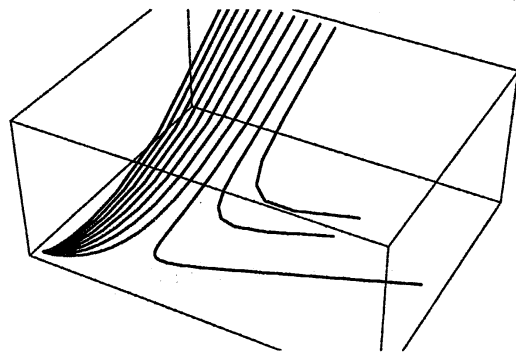
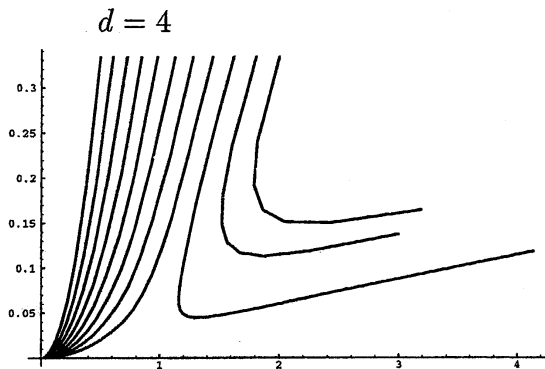
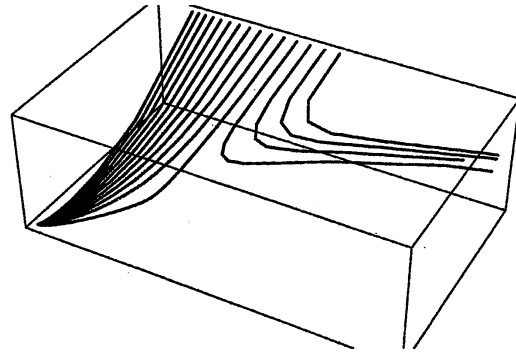
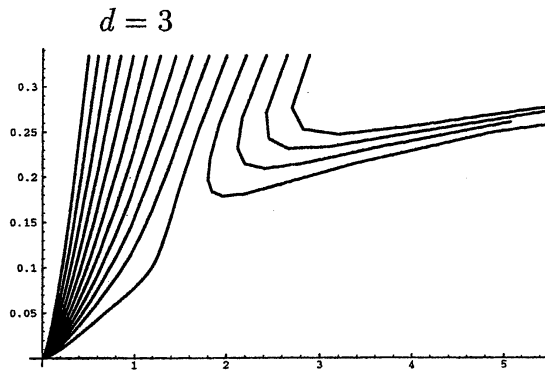
$$\tilde{\mu}_{2j}^{(n)} = \frac{\mu_{2j}^{(n)}}{(\mu_2^{(n)})^j}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

以下の図は, Ising から出発する trajectory を数値的に追跡して, dual potential の係数 $\tilde{\mu}_{2j}^{(n)}$ を plot したものである.

左: $(\mu_2, \tilde{\mu}_4)$

右: $(\mu_2, \tilde{\mu}_4, \tilde{\mu}_6)$





- 各 trajectory の s 値は, 左から順に $s = 1.0, 1.1, 1.2, \dots$ であり, 初期値は,

$$\mu_2^{(0)} = s^2/2 \quad (2.18)$$

$$\tilde{\mu}_4^{(0)} = 1/3 \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mu}_6^{(0)} = 8/45 \quad (2.20)$$

である.

- Gaussian fixed point (1.25) の特性関数

$$\varphi_G(\xi) = \exp(-\xi^2) \quad (2.21)$$

は (2.2) の自明な fixed point であり, 上の図においては, 点 $(1, 0)$ (or $(1, 0, 0)$) に対応する.

さて上図から, $d > 2$ では相転移があり,

- $\mu_2^{(0)}$ が小さいとき, trajectory は $(0, 0)$ に近づく (高温相).
- $\mu_2^{(0)}$ が大きいとき, trajectory は無限遠方に飛ぶ (低温相)
- $\mu_2^{(0)}$ がある特定の値 (critical point) をとるとき, trajectory は $(0, 0)$ 以外のある点に収束する (critical trajectory).

ことが分かる. さらに (non-)triviality に関係するつぎのような重要な事実が示唆される.

- $d < 4$ では, critical trajectory は non-Gaussian fixed point に収束する. [この trajectory を用いると, nontrivial continuum limit を構成することができる.]
- $d \geq 4$ のとき, critical trajectory は Gaussian fixed point に収束する (triviality)

3 Triviality

Characteristic function によるくりこみ群解析の概略を, [7] に基づいて紹介する. $d \geq 4$ hierarchical Ising model の triviality を厳密に示すための基本的な idea は次のとおりである.

- (1) Characteristic function を用いて “Gauss 近傍” の概念を定式化し, くりこみ群の振舞いを分析する.
- (2) Ising から出発する critical trajectory が, 有限回のくりこみ群変換によって “Gauss 近傍” に入ること, computer を用いて数値的に確かめる.

3.1 Characteristic function の利点

Ising を初期値とする dual potential 列は次の著しい性質を持つ.

- Dual potential の全ての Taylor 係数は非負 である :

$$\mu_{2j}^{(n)} \geq 0, \quad j \geq 1 \quad (3.1)$$

- Dual potential の高次の Taylor 係数は, 4 次の係数で bound される [Newman's bound] :

$$\mu_{2j}^{(n)} \leq \frac{1}{j} (2\mu_4^{(n)})^{j/2}, \quad j \geq 3 \quad (3.2)$$

どちらも,

- Characteristic function の零点は実数である [強磁性 spin 系の Lee-Yang property]

をもとにして証明される [6].

3.2 Newman's bound の応用

(3.2) から

- V_n の Taylor 展開の収束域が評価され, $n \rightarrow \infty$ で $\mu_4^{(n)} \rightarrow 0$ となるなら, 定義域は実数全体に拡大する.
- $\mu_4^{(n)}$ が 0 に収束することを示せば, それ以上の全ての係数が 0 に収束すること, 即ち triviality が得られる.
- “Gauss 近傍” の概念を有限個の μ_{2j} を用いて定式化することができる. 従って, critical trajectory が Gauss 近傍に届いたかどうかを, computer を用いて検証する道が開ける

ことが分かる.

3.3 Taylor 係数の非負性の応用

(3.1) は, operator $\mathcal{T}$ を調べるときに本質的に重要な役割を果たす.

(2.5) を

$$g_t(\xi) = \exp(-t\Delta)g(\xi) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{T}g = g_{\beta/2} \quad (3.4)$$

と書く. g_t は微分方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(\xi) = -\Delta g_t(\xi) \quad (3.5)$$

$$g_0(\xi) = g(\xi) \quad (3.6)$$

の解である. そこで

$$g_t(\xi) = \exp(-V_t(\xi)) \quad (3.7)$$

とおくと, V_t は

$$\frac{d}{dt}V_t = (\nabla V_t)^2 - \Delta V_t \quad (3.8)$$

を満たす. ここで

- V_t の Taylor 係数がすべて非負である

ことを使うと, (3.8) の右辺の第 2 項を無視することにより, Taylor 係数の upper bound が得られる. [この upper bound を使うと, (3.8) から lower bound が得られる.]

このようにして, $d \geq 4$ hierarchical Ising model の triviality に対する computer assisted proof を実現し得る [7].

References

- [1] F. J. Dyson, Existence of a Phase-Transition in a One-Dimensional Ising Ferromagnet, *Commun. Math. Phys.*, **12**, 1969, 91–107.
- [2] Ya. G. Sinai, *Theory of Phase Transition: Rigorous Results*, Pergamon Press, 1982.
- [3] P. Collet, J.-P. Eckmann, A Renormalization Group Analysis of the Hierarchical Model in Statistical Mechanics, *Springer Lecture Note in Physics* 74
- [4] K. Gawedzki, A. Kupiainen, Non-Gaussian Fixed Point of the Block Spin Transformation. Hierarchical Model Approximation, *Commun. Math. Phys.*, **89**, 1983, 191–220.
- [5] H.Koch, P.Wittwer, A Non-Gaussian Renormalization Group Fixed Point for Hierarchical Scalar Lattice Field Theories, *Commun. Math. Phys.*, **106**, 1986, 495–532.
- [6] C.M.Newman Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee-Yang theorem, *Commun. Math. Phys.*, **41**, 1975, 1-9.
- [7] T.Hara, T.Hattori, H.Watanabe, in preparation.