

# Remarks on the fractional operators on Orlicz-Morrey spaces

福島工業高等専門学校  
一般教科・飯田毅士\*

Takeshi Iida,

Department of General Education, National Institute of Technology, Fukushima College  
Nagao 30, Kamiarakawa-Aza, Taira, Iwaki city, Fukushima, Japan.  
970-8034

Mathematics Subject Classification 2020 : 26A33, 42B25, 42B35

## Abstract

本稿は, Morrey 空間上で成立する分数冪積分作用素に対する Adams の不等式や Olsen の不等式の Orlicz 分数冪極大作用素, 分数冪積分作用素, BMO 関数と分数冪積分作用素の交換子積に対する Orlicz-Morrey 上への一般化について述べる.

## 1 Introduction

Orlicz 極大作用素は Hardy-Littlewood 極大作用素  $M$  を一般化した作用素であり, 後述する Luxemburg-Nakano ノルムによって構成する.

以下, 記号  $Q$  は, 各座標軸に平行な  $n$  次元立方体を表す. 記号  $|Q|$  により  $Q$  の体積, 記号  $\ell(Q)$  により  $Q$  の 1 辺の長さを表す. 本稿では, 記号  $I_\alpha$ ,  $M_\alpha$ ,  $[b, I_\alpha]$  はそれぞれ, 分数冪積分作用素, 分数冪極大作用素, 関数  $b$  と  $I_\alpha$  による交換子積を表す.

**Definition 1.**

(i)  $0 < \alpha < n$  に対して

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

(ii) 関数  $b$  に対して,

$$[b, I_\alpha]f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b(x) - b(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy.$$

Orlicz 極大作用素, Orlicz 分数冪極大作用素, Orlicz-Morrey 空間を定義するために Young 関数を導入する. 各定義は [5, pp.97-100] を参照する.

---

\*E-mail address: tiida@fukushima.nct-ac.jp

**Definition 2.** 関数  $B : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  が Young 関数であるとは、次の条件を満たすことである。(i)  $B$ : 連続関数. (ii)  $B$ : 凸関数. (iii)  $B$ : 単調増加関数. (iv)  $B(0) = 0$ . (v)  $\lim_{t \rightarrow 0} B(t)/t = 0$ . (vi)  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \infty$ . 本稿では、 $t^{-n/\alpha} B(t)$  は a.e. で単調減少でかつ、 $t^{-n/\alpha} B(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) であると仮定する. 共役 Young 関数  $\bar{B}$  を定義する:

$$\bar{B}(t) := \sup_{s>0} (st - B(s)) \quad (t > 0).$$

Young 関数に付加する条件  $\Delta_2$ ,  $\nabla_2$ ,  $\Delta'$ ,  $\nabla'$  の定義をまとめる.

**Definition 3.** 関数  $B$  は Young 関数であると仮定する.

(i)  $B \in \Delta_2$  であるとは、ある定数  $K > 0$  に対して、 $B(2x) \leq KB(x)$   $x \geq 0$ .

(ii)  $B \in \nabla_2$  であるとは、ある定数  $\ell > 1$  に対して、 $B(x) \leq \frac{1}{2\ell} B(\ell x)$   $x \geq 0$ .

(iii)  $B \in \Delta'$  であるとは、ある定数  $C > 0$  に対して、 $B(xy) \leq CB(x)B(y)$   $x, y \geq 0$ .

(iv)  $B \in \nabla'$  であるとは、ある定数  $C > 0$  に対して、 $B(x)B(y) \leq B(Cxy)$   $x, y \geq 0$ .

**Example 1.**  $B(t) = t^p [\log(e+t)]^a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $1 < p < \infty$ ). このとき、次が成立する:

(a)  $B \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ .

(b)  $a \geq 0$  のとき、 $B \in \nabla'$ .

(c)  $a \leq 0$  のとき、 $B \in \Delta'$ .

以下、記号  $B$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  を Young 関数を表す. Luxemburg-Nakano ノルムを次のように定める.

**Definition 4.**  $n$  次元立方体  $Q$  に対して、

$$\|f\|_{B,Q} := \left\{ \lambda > 0 : \int_Q B\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Definition 4 によって、Orlicz 極大作用素  $M_B$ , Orlicz 分数冪極大作用素  $M_{B,\alpha}$  を定義する:

**Definition 5.**  $0 \leq \alpha < n$  とするとき、

$$M_{B,\alpha} f(x) := \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \ell(Q)^\alpha \|f\|_{B,Q} \cdot \chi_Q(x), \quad M_B := M_{B,0}. \quad (2)$$

論文 [3, p.104] で、次の各点評価が示された.

**Proposition 1.**  $0 < \alpha < n$ ,  $b \in BMO$ ,  $B(t) = t \log(e+t)$ ,  $f(x) \geq 0$  a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$  とするとき、

$$M^\sharp([b, I_\alpha]f)(x) \lesssim \|b\|_{BMO} (I_\alpha f(x) + M_{B,\alpha} f(x)). \quad (3)$$

Young 関数に関して  $B_p$  条件が導入された (論文 [13, p.138]).

**Definition 6.** Young 関数  $B$  が、 $\int_1^\infty \frac{B(t)}{t^{p+1}} dt < \infty$  を満たすとき、 $B \in B_p$  であると定める.

$B_p$  条件は作用素  $M_B$  の  $L^p$  空間上の有界性が成立する必要十分条件である.

**Proposition 2.**  $1 < p < \infty$  とするとき, 次が同値である. (i)  $B \in B_p$ . (ii)  $M_B : L^p \rightarrow L^p$ .

$M_{B,\alpha} : L^p \rightarrow L^q$  が成立するための必要十分条件は, 論文 [3, 4, 11] により導入された.

**Theorem A.**  $0 \leq \alpha < n$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $1 < q < \infty$  とするとき, 次が同値である: (i)  $M_{B,\alpha} : L^p \rightarrow L^q$ . (ii)  $B^{\frac{q}{p}} \in B_q$  かつ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ .

Orlicz-Morrey 空間<sup>1</sup>を次のように定める:

**Definition 7.**  $1 \leq p_0 < \infty$  とするとき, Orlicz-Morrey ノルムを  $\|f\|_{\mathcal{M}_{\Phi}^{p_0}} := \sup_Q |Q|^{\frac{1}{p_0}} \|f\|_{\Phi,Q}$  により定める. このとき,  $\mathcal{M}_{\Phi}^{p_0} := \left\{ f \in L^1_{\text{loc}} : \|f\|_{\mathcal{M}_{\Phi}^{p_0}} < \infty \right\}$  を Orlicz-Morrey 空間という. 特に,  $\Phi(t) = t^p$  ( $0 < p \leq p_0 < \infty$ ) の場合, 関数空間  $\mathcal{M}_p^{p_0}$  は, 通常 Morrey 空間を表し,  $\mathcal{M}_p^{p_0} = \mathcal{M}_{\Phi}^{p_0}$  となる.

*Remark 1.*  $1 < p_0 < \infty$  のとき,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$  であることと  $\mathcal{M}_{\Phi}^{p_0} \neq \{0\}$  が同値である (論文 [8, p.245]).

作用素  $I_{\alpha}$  に対する Morrey 空間上の有界性が成立する (論文 [1]).

**Proposition 3.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p \leq p_0 < \frac{n}{\alpha}$ ,  $1 < q \leq q_0 < \infty$ ,  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$  とする. このとき,  $I_{\alpha} : \mathcal{M}_p^{p_0} \rightarrow \mathcal{M}_q^{q_0}$ .

Morrey 空間上の作用素  $I_{\alpha}$  に対する次の不等式が成立する (論文 [12]).

**Proposition 4.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p \leq p_0 < \frac{n}{\alpha}$ ,  $1 < q \leq q_0 < \infty$ ,  $1 < r \leq r_0 < \infty$ ,  $q_0 < r_0$ ,  $r_0 \geq \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$  とする. このとき,  $a = 1 + \varepsilon > 1$  に対して,  $g \in \mathcal{M}_{aq}^{r_0}$  とすると

$$\|g(I_{\alpha}f)\|_{\mathcal{M}_q^{q_0}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_{aq}^{r_0}} \|f\|_{\mathcal{M}_p^{p_0}}.$$

作用素  $M_{B,\alpha}$  に対する Morrey 空間上の Propositions 3, 4 に相当する不等式は, 論文 [8] で示した. 一方で, Orlicz-Morrey 空間上の作用素  $M_B$  に対する有界性が成立する (論文 [15, p.535]).

**Proposition 5.** 次が同値である.

(i) 任意の  $n$  次元立方体  $Q$  に対して,

$$\|M_B(f\chi_Q)\|_{\Phi,Q} \lesssim \|f\|_{\Phi,Q}. \quad (4)$$

(ii)

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right) \Phi(s) \frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t) \quad (t \geq 1). \quad (5)$$

*Remark 2.* 一般に,

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right) \Phi(s) \frac{ds}{s} = \int_1^t \Phi\left(\frac{t}{s}\right) B(s) \frac{ds}{s}. \quad (6)$$

**Example 2.**

<sup>1</sup>3 種類の Orlicz-Morrey 空間のうち, 第 2 種 Orlicz-Morrey 空間を扱う. 3 種類の分類に関する詳細は, 論文 [2, 6, 7] を参照.

(i)  $1 < p < \infty$ ,  $\Phi(t) = t^p$  かつ,  $B \in B_p$  とすると, 2組  $(B, \Phi)$  は条件 (5) を満たす.

(ii)  $1 < p < \infty$ ,  $\Phi(t) = \frac{t^p}{\log(e+t)}$ ,  $B(t) = \frac{B_0(t)}{\log(e+t)}$  かつ,  $B_0 \in B_p$  とすると, 2組  $(B, \Phi)$  は条件 (5) を満たす.

Proposition 5 により, 次が成立する.

**Proposition 6.**  $1 < p_0 < \infty$ ,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$  ( $t \geq 1$ ) とする. 2組  $(B, \Phi)$  が条件 (5) を満たすとき,  $M_B : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \rightarrow \mathcal{M}_\Phi^{p_0}$ .

Proposition 6 は, 次のように一般化できる.

**Proposition 7.**  $1 < p_0 < \infty$ ,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$  ( $t \geq 1$ ) とする. 3組  $(B, \Phi, \Psi)$  が条件

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right) \Psi(s) \frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t) \quad (t \geq 1) \quad (7)$$

を満たすとき,  $M_B : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \rightarrow \mathcal{M}_\Psi^{p_0}$ .

*Remark 3.* 3組  $(B, \Phi, \Psi)$  が条件 (7) を満たすとき,  $B(t), \Psi(t) \lesssim \Phi(t) (\lesssim t^{p_0})$  が成立する.

作用素  $M_{B,\alpha}$  に関する Orlicz-Morrey 空間上の有界性について次が成立する (論文 [9]).

**Theorem B.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p_0 < q_0 < \infty$ ,  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ ,  $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$  かつ,

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{q_0}{p_0}} \Psi(s) \frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t)^{\frac{q_0}{p_0}} \quad (t \geq 1) \quad (8)$$

を満たすとき,  $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \rightarrow \mathcal{M}_\Psi^{q_0}$ .

*Remark 4.* 3組  $(B, \Phi, \Psi)$  が条件 (8) を満たすとき,  $B(t) \lesssim \Phi(t)$  (論文 [9, Lemma 4.6]).

Theorem B が成立する 3組  $(B, \Phi, \Psi)$  の例を構築できる.

**Example 3.**  $a, b \geq 0$ ,  $1 < p \leq p_0 < \infty$ ,  $1 < q_0 < \infty$ ,

$$B(t) = \frac{t^p}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0}a}}, \Psi(t) = \frac{t^{p \cdot \frac{q_0}{p_0}}}{[\log(e+t)]^b}$$

とするとき, 以下のように  $\Phi(t)$  をとるとき, 3組  $(B, \Phi, \Psi)$  は, 条件 (8) を満たす (したがって,  $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \rightarrow \mathcal{M}_\Psi^{q_0}$  が成立) (論文 [9, p.18]).

$$(i) \quad a > b+1 \text{ のとき, } \Phi(t) = \frac{t^p}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0}b}}.$$

$$(ii) \quad a = b+1 \text{ のとき, } \Phi(t) = t^p \left( \frac{\log(\log(e+t))}{[\log(e+t)]^b} \right)^{\frac{p_0}{q_0}}.$$

$$(iii) \quad b-1 < a < b+1 \text{ のとき, } \Phi(t) = \frac{t^p}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0} \max\{a,b\}-1}}.$$

$$(iv) \quad a = b-1 \text{ のとき, } \Phi(t) = t^p \left( \frac{\log(\log(e+t))}{[\log(e+t)]^a} \right)^{\frac{p_0}{q_0}}.$$

$$(v) \ a < b - 1 \text{ のとき, } \Phi(t) = \frac{t^P}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0}a}}.$$

論文 [9] では Orlicz-Morrey 空間上の作用素  $I_\alpha$ ,  $[\beta, I_\alpha]$  に対する有界性に関して, 次が成立することを示した.

**Theorem C.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p_0 < \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\beta \in BMO$  とする. さらに,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ ,  $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$  と仮定する.

(i) 任意の  $t \geq 1$  に対して,

$$\int_1^t \frac{\bar{\Psi}(s)}{s^2} ds \lesssim \frac{\bar{\Psi}(t)}{t}, \quad (9)$$

$$\int_1^t \frac{\Psi(s)}{s^{1+\frac{q_0}{p_0}}} ds \lesssim \left( \frac{\Phi(t)}{t} \right)^{\frac{q_0}{p_0}} \quad (10)$$

を仮定するとき,  $I_\alpha : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \rightarrow \mathcal{M}_\Psi^{q_0}$ .

(ii)  $\Psi \in \Delta_2 \cap \nabla'$  かつ,

$$\int_1^t \left( \frac{t}{s} \log \left( e + \frac{t}{s} \right) \right)^{\frac{q_0}{p_0}} \Psi(s) \frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t)^{\frac{q_0}{p_0}} \quad (t \geq 1)$$

を仮定するとき,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|\beta\|_{BMO} \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

Theorem C を示すには次の不等式を適用する (論文 [9, p.10, p.16]).

**Theorem D.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p_0 < \infty$ ,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$  かつ  $\Phi \in \Delta_2$  を仮定するとき,

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \lesssim \|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

**Theorem E.**  $1 < p_0 < \infty$ ,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$  かつ  $\Phi \in \nabla'$ ,  $Mf \in \mathcal{M}_\Phi^{p_0}$  を仮定すると,

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \lesssim \|M^\sharp f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \quad (11)$$

*Proof of Theorem C (ii).*  $|[\beta, I_\alpha]f(x)| \leq M([\beta, I_\alpha]f)(x)$  であることと, Theorem E から,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \leq \|M([\beta, I_\alpha]f)\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|M^\sharp([\beta, I_\alpha]f)\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}}. \quad (12)$$

不等式 (3) より,  $B(t) = t \log(e+t)$  とすると,

$$\|M^\sharp([\beta, I_\alpha]f)\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|\beta\|_{BMO} \left( \|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} + \|M_{B,\alpha}f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \right) \quad (13)$$

Theorem D と,  $M_\alpha f(x) \lesssim M_{B,\alpha}f(x)$  に注意すると,

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|M_{B,\alpha}f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \quad (14)$$

が成立する. 以上から,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|M_{B,\alpha}f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}}. \quad (15)$$

Theorem B より,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}. \quad (16)$$

□

次に論文 [8, 9, 15] に関連する研究成果を述べる (論文 [10]).

## 2 Main results

作用素  $I_\alpha$  に対する Olsen 型の不等式が成立する.

**Theorem 1.**  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p_0 < \frac{n}{\alpha}$ ,  $1 < q_0 < r_0 < \infty$ ,  $r_0 \geq \frac{n}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ ,  $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$  とする. さらに, 2組  $(\Phi, \Psi)$  が条件 (10) を満たし,

$$\int_1^t \overline{A}(s) \overline{\Psi}\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s} \lesssim \overline{\Psi}(t) \quad (t \geq 1) \quad (17)$$

を満たす Young 関数  $A(t) \lesssim t^{r_0}$  が存在するとき,  $g \in \mathcal{M}_A^{p_0}$  とすると,

$$\|g(I_\alpha f)\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_A^{r_0}} \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

*Remark 5.* Theorem 1 において,  $\Phi(t) = t^p$ ,  $\Psi(t) = t^q$ ,  $\frac{q}{p} = \frac{q_0}{p_0}$ ,  $A(t) = t^{aq}$  ( $1 < p < q < \infty$ ,  $a > 1$ ) とするとき,

$$\int_1^t \overline{A}(s) \overline{\Psi}\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s} = t^{q'} \int_1^t s^{(aq)' - q' - 1} ds < t^{q'} = \overline{\Psi}(t)$$

が成立するから, 条件 (17) を満たす ( $q'$  は  $q$  の共役指数). すなわち, Theorem 1 は, Proposition 4 を Corollary として含むことを示している.

次に作用素  $M_{B,\alpha}$  に対する Olsen 型の不等式が成立する.

**Theorem 2.**  $0 \leq \alpha < n$ ,  $1 < p_0 < \frac{n}{\alpha} \leq r_0$ ,  $q_0 < r_0$  かつ,  $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}$ ,  $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ ,  $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$ ,  $\Psi \in \Delta'$  かつ, 3組  $(B, \Phi, \Psi)$  が条件 (8) をみたすとき,

$$\|g(M_{B,\alpha} f)\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_\Psi^{r_0}} \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

*Remark 6.* Theorem 2 において,  $\Phi(t) = t^p$ ,  $\Psi(t) = t^q$ ,  $\frac{q}{p} = \frac{q_0}{p_0}$  とするとき, 論文 [8, Corollary 2 in p.251] の結果を得る. すなわち, 作用素  $M_{B,\alpha}$  に対する Olsen 型の不等式が成立する.

## 3 今後の研究課題

Theorem C (ii) の証明において, Theorem E を使わずに, 証明できるかについての研究が残されている. 不等式 (11) の代わりに, 不等式

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \lesssim \|M^\sharp f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \quad (18)$$

を示す. このとき, 不等式 (18) が成立する Young 関数の十分条件が Theorem E における不等式 (11) が成立する十分条件  $\Psi \in \nabla'$  と比較する.

## 4 謝辞

本研究は JSPS 科研費 (JP23K03156, 代表: 中央大学・理工学部・教授 澤野嘉宏氏) の助成を受けたものである。

## References

- [1] D. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., 42, (1975), 765-778.
- [2] F. Deringoz, V.S. Guliyev and S.G. Hasanov, *Maximal operator and its commutators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces*, Tokyo J. Math., 41, 2, (2018), 347-369, doi:10.3836/tjm1502179260.
- [3] D. Cruz-Uribe, SFO and A. Fiorenza, *Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integrals*, Publ. Mat. 47, (2003), 103-131.
- [4] D. Cruz-Uribe, SFO and K. Moen, *A fractional Muckenhoupt-Wheeden theorem and its consequences*, Integral Equations Operator Theory, 76, (2013), 3, 421-446.
- [5] D. Cruz-Uribe, SFO, José Maria Martell and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia. Operator Theory: Advances and Applications*, 215. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. xiv+280 pp.
- [6] S. Gala, Y. Sawano and H. Tanaka, *A remark on two generalized Orlicz-Morrey spaces*, J. Approx. Theory, 198 (2015), 1-9.
- [7] V.S. Guliyev, S.G. Hasanov, Y. Sawano and T. Noi, *Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz-Morrey spaces of the third kind*, Acta Appl. Math., 145, (2016), pp.137-174, doi:10.1007/s10440-016-0052-7.
- [8] T. Iida, *Orlicz-fractional maximal operators in Morrey and Orlicz-Morrey Spaces*, Positivity, 25, (2021), 243-272, doi:10.1007/s11117-020-00762-w.
- [9] T. Iida, *Commutators generated by BMO-functions and the fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces*, Math, Ine. and Appl. 26, 3, pp.655-683, 2023.
- [10] T. Iida, *Remarks on the fractional operators on Orlicz-Morrey spaces*, submitted.
- [11] T. Iida and Y. Sawano, *Orlicz-fractional maximal operators on weighted  $L^p$  spaces*, J. Math. Inequal., 13 (2019), 2, 369-413.
- [12] P. Olsen, *Fractional integration, Morrey spaces and Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995), 2005-2055.
- [13] C. Pérez, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted  $L^p$ -spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc. 3, 71, 1, (1995), 135-157.
- [14] M.M. Rao, Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1991.
- [15] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, *Orlicz-Morrey spaces and fractional operators*, Potential Analysis, 36, (2012), 517-556.