

磁性流体界面解析へ境界要素法を適用するための課題

元 北海道大学工学部 水 田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

磁性流体には Rosensweig 不安定性 [1] のような特有の界面現象があるが、その安定性解析・時間発展解析を行う場合、界面が速く複雑に変形するたびに磁場解析と流体解析の両方が必要になるため、界面が大きく変形したり印加磁場分布が任意でも適用可能な、正確かつ効率的な数値解析システムの構築が望まれる。ただし、界面量(磁場・応力・流速など)を調べれば十分なことが多く、静磁場および非圧縮・非回転・非粘性流体を仮定すれば、境界要素法 (Boundary Element Method, BEM) を用いて、磁場解析では磁気ポテンシャル ϕ ・法線磁束密度 b_z を、流体解析では流速ポテンシャル φ ・法線流速 v_n を境界に限って求めることができる [2].

磁性流体の界面現象については、界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM) による流体解析 (2.1 節) と汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use, MAGU) による磁場解析を組み合わせた [3, 4, 5] 界面安定性の分岐 [4, 6, 7] や界面物理量の波数スペクトルの時間変化 [7, 8, 9], あるいは, Rosensweig 不安定近傍で界面変形の成長減衰を振幅方程式により調べる非線形緩和力学 [10, 11] がある。これらと比較するため、これまで本研究では、**間接境界要素法**による磁場解析・流体解析により、一様鉛直磁場中の 2 層系の界面上で磁場・応力・流速を求め、Rosenweig 不安定性の安定性解析との関係を議論した [12].

本論文では、より安定で正確な時間発展解析が可能となるよう、双極子モーメント密度を用いた間接境界要素法の代わりに、**直接境界要素法**に基づく磁場解析・流体解析について議論する [13] (2.2 節)。このとき、境界同士が交わる交線上の点で多価になる物理量の扱いを考慮しながら、離散化係数が対角項で持つ特異性を定ベクトル場条件を用いて回避する方法を考察する (2.3 節)。また、磁場解析・流体解析それぞれについて、境界条件の選び方に注意する (2.4 節)。界面が平面で領域間に透磁率差がない場合 (3.1 節) の検証を有限振幅の界面変形と領域間の透磁率差がある場合 (3.2 節) に先立って行った。界面変形を有限振幅にすると、界面上で界面応力 and の分布が非一様になるため、界面流速が誘起される。

2 解析方法

2.1 界面力学方程式と非線形磁化

非圧縮性・非粘性・非回転の磁性流体界面の動的解析を界面形状の制限なく行うため、Bernoulli 方程式と界面上の力学的条件から導かれた、次の界面力学方程式 (EIM) を用いる [12, 14].

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S = 0, \quad \varphi = \int_{-\infty}^{\zeta} dz v_z, \quad S \equiv G + C + T_N + D + p_0. \quad (1)$$

ここで、 $\rho, \varphi, \zeta, v_z, S, G, C, T_N, D, p_0$ はそれぞれ、流体密度・流速ポテンシャル・界面変位・流速の鉛直成分・界面応力和・重力ポテンシャル・表面張力・磁気応力差・動圧・大気圧である。なお、界面の動きが充分遅くまた大気圧が一様として、以後、 S 中の D と p_0 は無視する。 S を与えれば、(1) の時間積分より界面変位が決まる。

磁気応力差 T_N は界面磁場から決まり、磁場から流体への作用を表す。磁性流体では、磁場の強さ H がある程度以上強くなると、飽和磁化のため、磁化 M が H に比例しなくなる (非線形磁化)。

$$M(H) = M_S \left\{ \coth(\gamma H) - \frac{1}{\gamma H} \right\} \cdot \begin{cases} \chi_0 : \text{初期帯磁率} \\ M_S : \text{飽和磁化} \\ \gamma \equiv 3\chi_0/M_S \end{cases} \quad (2)$$

このとき磁気応力差は、両領域に共通な界面磁場、すなわち接線磁場 $h_{X,Y}$ と法線磁束密度 b_Z から次のように決まる [15].

$$T_N = -\frac{\mu_0}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0} \right) b_Z \right\}^2 - \mu_0 \frac{M_S}{\gamma} \ln \left(\frac{\sinh \gamma H}{\gamma H} \right), \quad H = \sqrt{h_X^2 + h_Y^2 + \left(\frac{b_Z}{\mu_1} \right)^2}. \quad (3)$$

流体の透磁率 μ_1 は、線形磁化の場合や真空透磁率 μ_0 とは違い、 H に応じて変化する (B_1 : 流体側の磁束密度, H_1 : 流体側の磁場). その結果、 μ_1 は領域内で一様にならず、 H を通して座標 $\mathbf{r}'$ に依存するようになる (非一様透磁率).

$$\mu_1 \equiv \frac{B_1}{H_1} = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{M_S}{H} \left(\coth(\gamma H) - \frac{1}{\gamma H} \right) \right\} = \mu(H(\mathbf{r}')). \quad (4)$$

2.2 直接境界要素法の基礎式

$\mathbf{h}' = \nabla' \phi'$, $\mathbf{b}' = \mu' \mathbf{h}'$ のように磁場と磁束密度を導き Gauss の法則 $\nabla' \cdot \mathbf{b}' = \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \phi') = 0$ を満たす磁気ポテンシャルを ϕ' とするとき、直接境界要素法の基礎式は Green の定理から導かれる。ただし、透磁率が磁場 H を通して $\mu(H(\mathbf{r}')) = \mu(\mathbf{r}') = \mu'$ と場所の関数となることを考慮して、Green の定理を次のように拡張する [14] (これは Gauss の定理を用いて示される)。

$$\iiint_V dV' \{ \phi' \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \psi) - \psi \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \phi') \} = \oint_S dS' \cdot \{ \phi' (\mu' \nabla' \psi) - \psi (\mu' \nabla' \phi') \}. \quad (5)$$

ここで, S, V を閉曲面とその内部領域, $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ を観測点とソース点とし, ソース点だけの関数や微分を $\prime$ で表している. また, ψ は $\nabla' \cdot (\mu' \nabla' \psi) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ を満たす Green 関数である.

流体領域 ($J = 1$)・真空領域 ($J = 0$) から成る Fig. 1 のような 2 層系それぞれの領域における (5) からは, 磁気ポテンシャル ϕ_J と法線磁束密度 b_{ZJ} に対する次の直接境界要素法の基礎式が導かれる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \phi_J = \oint_{S_J} dS' (q_J \phi'_J - \psi_J b'_{ZJ}), \\ \alpha \frac{b_{IJ}}{\mu_J} = \oint_{S_J} dS' (q_{IJ} \phi'_J - \psi_{IJ} b'_{ZJ}), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{IJ} \equiv \mu_J \phi_{IJ} = \mu_J (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) \phi_J \\ b'_{ZJ} \equiv \mu'_J (\mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla') \phi'_J \\ q_J \equiv \mu'_J (\mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla') \psi_J \\ \psi_{IJ} = (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) \psi_J \\ q_{IJ} = (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) q_J \end{array} \right. \quad (6)$$

ここで第 2 式は, 観測点 $\mathbf{r}$ に関する第 1 式の I 方向偏微分にあたり,

$\mathbf{t}_{IJ}$ ($I=X, Y, Z$) は, 境界上では接線単位ベクトル $\mathbf{t}_{X,Y}$, 法線単位ベクトル $\mathbf{t}_Z$ となる. また α は, $\mathbf{r}$ が S_J の内部・境界上・外部いずれにあるかに応じて 1, $1/2$, 0 である.

(6) の面積分 S_J を N_J 個の微小な面要素 (FE) の和で置き換える (Fig. 1(b)). $\mathbf{r}_i$ を観測点座標, $\mathbf{r}_j$ を j 番目の面要素 S_{jZ} の代表座標とする. S_{jZ} 内で ϕ'_j と b'_{Zj} は一定とし, $\phi_j \equiv \phi'_j(\mathbf{r}_j)$, $b_{jZ} \equiv b'_{Zj}(\mathbf{r}_j)$, $\mu_j \equiv \mu'(\mathbf{r}_j)$, $\phi_i \equiv \phi_J(\mathbf{r}_i)$, $b_{iI} \equiv b_{IJ}(\mathbf{r}_i)$, $\mu_i \equiv \mu(\mathbf{r}_i)$ と置けば, 基礎式 (6) に対する離散式が (7) のように得られる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \phi_i = \sum_{j=1}^{N_J} (Q_{ij} \phi_j + P_{ij} b_j), \\ \alpha \frac{b_{iI}}{\mu_i} = \sum_{j=1}^{N_J} (Q'_{ij} \phi_j + P'_{ij} b_j), \end{array} \right. \quad \left(b_j \equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} b_{jZ} \right) \quad (7)$$

ここでは以下のように, 矢印左側のような離散面要素 S_{jZ} 上にわたる積分を, P_{ij}, P'_{ij} や $Q_{ijZ}, Q'_{ijZ}, b_{jZ}$ から定義した Q_{ij}, Q'_{ij}, b_j を用いて矢印右側のように置き換えている.

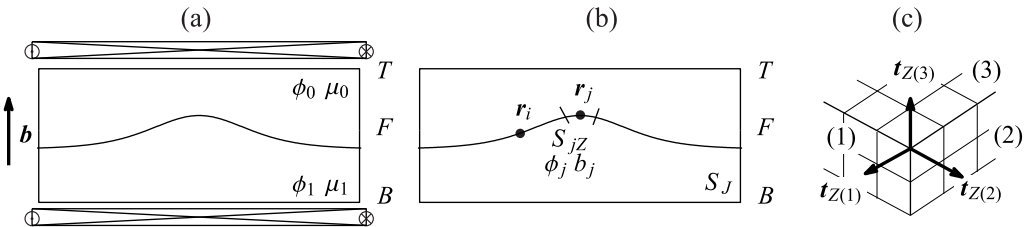


Fig. 1: (a) 一様鉛直磁場中の 2 層系. (b) 離散化. (c) 交差境界の交点における法線ベクトルの多価性.

$$\begin{aligned}
\sum_{Z \in j} \left(\iint_{S_{jZ}} dS' q_J \phi'_J \right)_{ijZ} &\rightarrow Q_{ij} \phi_j \equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} Q_{ijZ} \phi_j, \quad Q_{ijZ} = \frac{\zeta_{R \cdot jZ}}{4\phi_i R^2}, \\
\sum_{Z \in j} \left(- \iint_{S_{jZ}} dS' \psi_J b'_{ZJ} \right)_{ijZ} &\rightarrow P_{ij} b_j \equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} P_{ij} b_{jZ}, \quad P_{ij} \simeq \frac{1}{4\phi_i R \mu_j}, \\
\sum_{Z \in j} \left(\iint_{S_{jZ}} dS' q_{IJ} \phi'_J \right)_{ijZ} &\rightarrow Q_{ij}^I \phi_j \equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} Q_{ijZ}^I \phi_j, \quad Q_{ijZ}^I = \frac{3\zeta_{iI \cdot R} \zeta_{R \cdot jZ} - \zeta_{iI \cdot jZ}}{4\phi_i R^3}, \\
\sum_{Z \in j} \left(- \iint_{S_{jZ}} dS' \psi_{IJ} b'_{ZJ} \right)_{ijZ} &\rightarrow P_{ij}^I b_j \equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} P_{ij}^I b_{jZ}, \quad P_{ij}^I = \frac{\zeta_{iI \cdot R}}{4\phi_i R^2 \mu_j},
\end{aligned}$$

$$R \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \quad R \equiv |\mathbf{R}|, \quad \mathbf{t}_R \equiv \mathbf{R}/R, \quad \zeta_{R \cdot jZ} \equiv \mathbf{t}_R \cdot \mathbf{t}_j, \quad \zeta_{iI \cdot R} \equiv \mathbf{t}_{iI} \cdot \mathbf{t}_R, \quad \zeta_{iI \cdot jZ} \equiv \mathbf{t}_{iI} \cdot \mathbf{t}_j.$$

なおここでは、Fig. 1(c) のように、座標 $\mathbf{r}_j$ が同じでも法線方向 $\mathbf{t}_{jZ}$ が複数あることによる多価性を考慮している。この場合、磁気ポテンシャル ϕ_j および P_{ij}, P_{ij}^I は $\mathbf{r}_j$ と同様法線方向 Z によらず共通であるが、磁束密度成分 b_{jZ} および Q_{ijZ}, Q_{ijZ}^I は $\mathbf{t}_{jZ}$ に応じて多価となる。(7) の $\sum_{Z \in j}$ は、同じ j に属する複数の方向 Z の和を表している。

2.3 定ベクトル場条件による対角離散化係数の特異性の回避

観測点 $\mathbf{r}$ が境界上にあるとき、 $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ で $q_J, q_{IJ}, \psi_J, \psi_{IJ}$ は特異である。このため、対角項 $j=i$ における前節の $Q_{ijZ}, P_{ij}, Q_{ijZ}^I, P_{ij}^I$ を、分点数を増やした数値的な面積分に代わる方法から求めることを考える。

$\mathbf{h}_0, \phi_0$ を定ベクトル・定数とするとき、

$$\begin{cases} \phi_J = \mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \phi_0, & b_{IJ} = \mu_J \mathbf{t}_{IJ} \cdot \mathbf{h}_0, \\ \phi'_J = \mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) + \phi_0, & b'_{ZJ} = \mu'_J \mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \mathbf{h}_0 \end{cases} \quad (8)$$

は調和場 ϕ_J, b'_{ZJ} であり、基礎式(6)を満たす。 $\mathbf{h}_0, \phi_0$ を任意として導かれる(9)が定ベクトル場条件(定ベクトル場が基礎式を満たすための条件)である。

$$\begin{cases} \alpha = \oint_{S_J} dS' q_J, & \alpha \mathbf{r} = \oint_{S_J} dS' (q_J \mathbf{r}' - \mu'_J \psi_J \mathbf{t}'_{ZJ}), \\ 0 = \oint_{S_J} dS' q_{IJ}, & \alpha \mathbf{t}_{IJ} = \oint_{S_J} dS' (q_{IJ} \mathbf{r}' - \mu'_J \psi_{IJ} \mathbf{t}'_{ZJ}). \end{cases} \quad (9)$$

ここで、定ベクトル場条件(9)を(6)と同様に離散化する。このとき、非対角項和

$$\begin{cases} A_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} Q_{ij}, & C_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} \{Q_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + \mu_j P_{ij} \mathbf{S}_j\}, \\ A_i^I \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} Q_{ij}^I, & C_i^I \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} \{Q_{ij}^I(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + \mu_j P_{ij}^I \mathbf{S}_j\} \end{cases} \quad (10)$$

を定義すれば、離散化された定ベクトル場条件(9)は(11)のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = \sum_{j=1}^{N_j} Q_{ij} - \alpha & \mathbf{0} = \sum_{j=1}^{N_j} (Q_{ij} \mathbf{r}_j + \mu_j P_{ij} \mathbf{S}_j) - \alpha \mathbf{r}_i \\ & = A_i + Q_{ii} - \alpha, \quad = \mathbf{C}_i + \sum_{Z \in i} \mu_i P_{ii} S_{iZ} \mathbf{t}_{iZ}, \\ 0 = \sum_{j=1}^{N_j} Q_{ij}^I & \mathbf{0} = \sum_{j=1}^{N_j} (Q_{ij}^I \mathbf{r}_j + \mu_j P_{ij}^I \mathbf{S}_j) - \alpha \mathbf{t}_{iI} \\ & = A_i^I + Q_{ii}^I, \quad = \mathbf{C}_i^I + \sum_{Z \in i} \mu_i P_{ii}^I S_{iZ} \mathbf{t}_{iZ} - \alpha \mathbf{t}_{iI}. \end{array} \right. \quad \left(\mathbf{S}_j \equiv \sum_{Z \in j} S_{jZ} \mathbf{t}_j \right) \quad (11)$$

対角項 $Q_{ii}, P_{ii}, Q_{ii}^I, P_{ii}^I$ と合わせて, (11)は離散化係数の総和則になっている. これらから対角項を求めることは Q_{ii}, Q_{ii}^I では直ちにできるが, P_{ii}, P_{ii}^I では, (必ずしも直交していない) 3本の独立なベクトル $\mathbf{t}_{iZ-1}, \mathbf{t}_{iZ}, \mathbf{t}_{iZ+1}$ の各方向に $\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_i^I$ を分解し, その成分 c_{iZ}, c_{iZ}^I を取り出す.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{ii} = -A_i + \alpha, \quad \mu_i P_{ii} S_{iZ} = \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot (-\mathbf{C}_i) = -c_{iZ}, \\ Q_{ii}^I = -A_i^I, \quad \mu_i P_{ii}^I S_{iZ} = \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot (-\mathbf{C}_i^I + \alpha \mathbf{t}_{iI}) = -c_{iZ}^I + \alpha \delta_{ZI}, \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left(\begin{array}{l} c_{iZ} \equiv \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot \mathbf{C}_i, \quad \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \equiv \frac{\mathbf{t}_{iZ+1} \times \mathbf{t}_{iZ-1}}{[\mathbf{t}_{iZ-1} \mathbf{t}_{iZ} \mathbf{t}_{iZ+1}]}, \quad \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot \mathbf{t}_{iI} = \delta_{ZI}. \\ c_{iZ}^I \equiv \widetilde{\mathbf{t}}_{iZ} \cdot \mathbf{C}_i^I, \end{array} \right)$$

離散化した基礎式(7)において対角項を分離し, (12)を適用すれば,

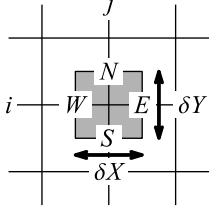
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=1}^{N_j} (Q_{ij} \phi_j + P_{ij} b_j) - \alpha \phi_i = \sum_{j=1}^{N_j} \sum_{Z \in j} (Q_{ijZ} S_{jZ} \phi_j + P_{ij} S_{jZ} b_j) - \alpha \phi_i \\ = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_j} (Q_{ij} \phi_j + P_{ij} b_j) + Q_{ii} \phi_i + \sum_{Z \in i} \mu_i P_{ii} S_{iZ} \frac{b_{iZ}}{\mu_i} - \alpha \phi_i \\ = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_j} (Q_{ij} \phi_j + P_{ij} b_j) - A_i \phi_i - \sum_{Z \in i} c_{iZ} \frac{b_{iZ}}{\mu_i}, \\ 0 = \sum_{j=1}^{N_j} (Q_{ij}^I \phi_j + P_{ij}^I b_j) - \alpha \frac{b_i}{\mu_i} = \sum_{j=1}^{N_j} \sum_{Z \in j} (Q_{ijZ}^I S_{jZ} \phi_j + P_{ij}^I S_{jZ} b_j) - \alpha \frac{b_i}{\mu_i} \\ = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_j} (Q_{ij}^I \phi_j + P_{ij}^I b_j) + Q_{ii}^I \phi_i + \sum_{Z \in i} \mu_i P_{ii}^I S_{iZ} \frac{b_{iZ}}{\mu_i} - \alpha \frac{b_i}{\mu_i} \\ = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_j} (Q_{ij}^I \phi_j + P_{ij}^I b_j) - A_i^I \phi_i - \sum_{Z \in i} c_{iZ}^I \frac{b_{iZ}}{\mu_i}. \end{array} \right. \quad (13)$$

(13)は, 特異性の懸念がある対角項係数や意味が曖昧になりがちな α を含ま

ず，定義が明確な非対角的な離散化係数だけで構成されている．また，第2式がある点で，[2]で指摘されている一様ポテンシャル条件の拡張となっている．

ここで，(13)各式の最後の項 $\sum_{Z \in i} c_{iZ} (b_{iZ}/\mu_i)$ ， $\sum_{Z \in i} c_{iZ}^I (b_{iZ}/\mu_i)$ について考える． r_i が領域の角にあるとき， t_{iZ} はいずれも境界毎の3本の法線ベクトルなので， b_{iZ} は境界毎の法線磁束密度としてこのまま(13)に組み込んでよい．しかし，領域の稜では法線ベクトル2本と接線ベクトル1本を，領域の面では法線ベクトル1本と接線ベクトル2本を t_{iZ} に用いるのがふさわしく，たとえば領域の面では

$$\sum_{Z \in i} c_{iZ}^I \frac{b_{iZ}}{\mu_i} = c_{iZ}^I \zeta_Z \frac{b_{iZ}}{\mu_i} + c_{iX}^I \zeta_X \frac{\phi_E - \phi_W}{\delta X} + c_{iY}^I \zeta_Y \frac{\phi_N - \phi_S}{\delta Y},$$

$$\left(\begin{aligned} t_{iL} &= \zeta_X t_{jX} + \zeta_Y t_{jY} + \zeta_Z t_{jZ}, & \zeta_K &= \widetilde{t}_{jK} \cdot t_{iL}, \\ \widetilde{t}_{jK} &\equiv \frac{t_{jK+1} \times t_{jK-1}}{[t_{jK-1} \ t_{jK} \ t_{jK+1}]}, & \widetilde{t}_{jK} \cdot t_{jL} &= \delta_{KL} \end{aligned} \right)$$


のように，接線磁場を境界上の磁気ポテンシャル $\phi_{E,W,N,S}$ で表してから，(13)でこの項を ϕ_i, ϕ_j ($j \neq i$) の項に組み込む方がよい．

2.4 境界条件の選択

境界要素法により，磁場解析では磁気ポテンシャル ϕ_J と法線磁束密度 b_{ZJ} が，流体解析では流速ポテンシャル φ と法線流速 v_n が各境界で得られるが，方程式を解く前に既知・未知とする量に応じて，境界条件は次のように分類される．

- $$\left\{ \begin{aligned} (1) & \ \phi_J \text{ が既知, } b_{ZJ} \text{ が未知,} & (\text{Dirichlet 条件}) \\ (2) & \ b_{ZJ} \text{ が既知, } \phi_J \text{ が未知,} & (\text{Neumann 条件}) \\ (3) & \ \phi_1 = \phi_0 = \phi, \ b_{Z1} = -b_{Z0} = b_Z. & (\text{界面条件}) \end{aligned} \right.$$

Fig. 1 のような一様鉛直磁場中の2層系の解析では，磁場解析では真空領域上方 T と流体領域下方 B で同じ大きさの鉛直一様磁場を逆符号で与

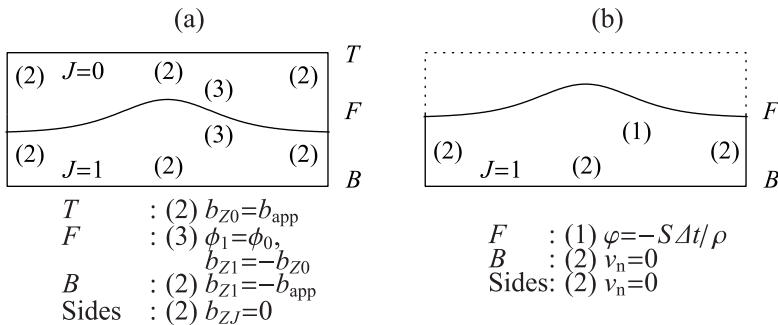


Fig. 2: 境界条件の選択. (a) 磁場解析, (b) 流体解析.

え，側方境界では $b_{zJ}=0$ とする (Fig. 2(a)). また流体解析では， B および側方境界では法線流速 $v_n=0$ とし， F では，界面力学方程式に基づいて， φ に $-S\Delta t/\rho$ を Dirichlet 条件として与え，静止流体に応力を加えた直後の v_n を求める (Fig. 2(b), S ; 界面応力， ρ : 流体密度, Δt : 微小時間間隔).

全ての境界が Neumann 境界になると ϕ_J が不定になる．このときは，境界上のいずれかの点でポテンシャルの基準値を与えるか，いずれかの境界を Dirichlet 境界と入れ換える必要がある．

3 数値解析結果

3.1 界面が平面・透磁率差がない場合

有限振幅の界面変形と領域間の透磁率差がある場合に先立って，界面が平面で領域間に透磁率差がない場合の検証を行った．

1. 離散化係数 $Q_{ij}, Q'_{ij}, P_{ij}, P'_{ij}$ は，流体領域・真空領域それぞれで総和則を満たす．これから，離散化係数は定ベクトル場条件を満たすように求められている．
2. 生成した定ベクトル場は基礎式を満たしている．
3. 離散化した基礎式の連立 1 次方程式系 (SLE) を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表せば， A の中にゼロあるいは平行な行ベクトル・列ベクトルはない．
4. SLE は Gauss 消去法 および LU 分解法で解いた．
5. 定ベクトル場条件を満たすようにしても，行列式 $\|A\|$ と条件数の逆数 $\kappa^{-1}(A)$ は完全に 0 にはならず，適正な値を保っている．

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{e} : \mathbf{b} \text{ の誤差} \\ \text{条件数} : \mathbf{x} \text{ の相対誤差を } \mathbf{b} \text{ の相対誤差で割った最大比率} \\ \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}\|/\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{e}\|/\|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{e}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \equiv \kappa(\mathbf{A}) \\ |\mathbf{A}| = 0 \text{ では } \mathbf{A}^{-1} \text{ は存在せず } \kappa(\mathbf{A}) \rightarrow \infty. \end{array} \right)$$

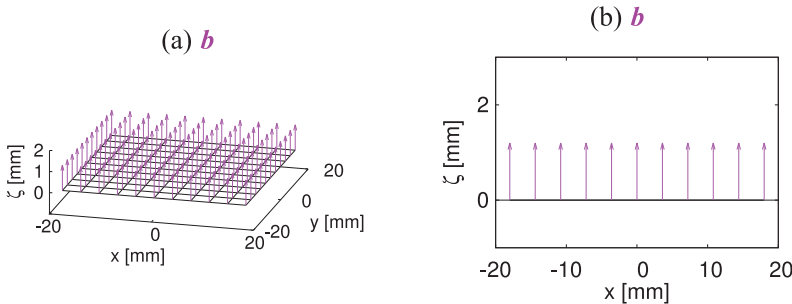


Fig. 3: 界面が平面，透磁率差がない場合の界面磁場 $\mathbf{b}$ の分布．(a) 界面上，(b) $y=0$ 断面内．

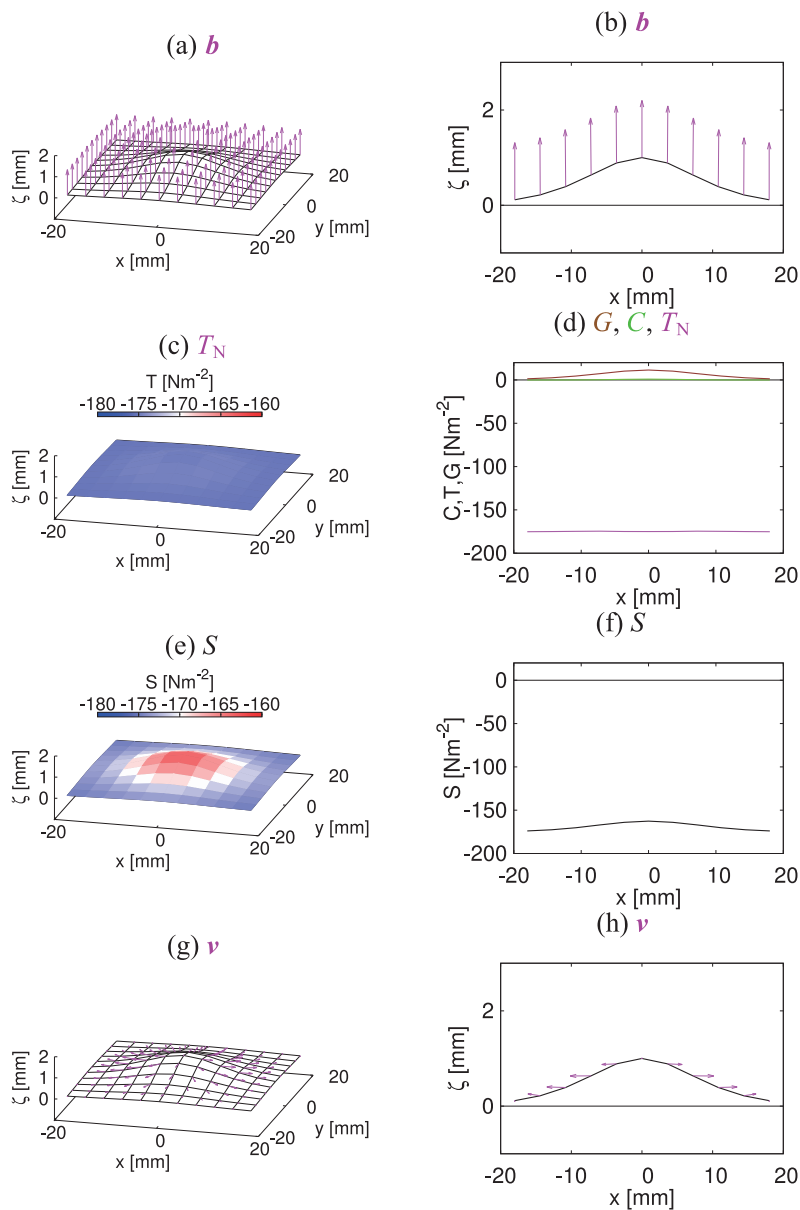


Fig. 4: 有限振幅界面変形と透磁率差がある場合の数値解析結果.

左列：界面上，右列： $y=0$ 断面内.

6. 基礎式を解いて求めた界面磁場 $\mathbf{b}$ の分布は，界面の縁に至るまで一様 (定ベクトル場) になる (Fig. 3).
7. 界面をはさむ ϕ, b_z の連続条件は，SLE に組み込まれている.
8. 幾何学的配置から， $\mathbf{b}$ の分布は 90° 回転に対して対称性を持つ.

3.2 有限振幅界面変形・透磁率差がある場合

界面を高さ $\zeta_{\text{pro}}=1.00 \times 10^{-3}$ m, 幅 $w_{\text{pro}}=1.03 \times 10^{-2}$ m の軸対称孤立波形状に変形し, 強さ $b_{\text{app}}=2.40 \times 10^1$ mT の一様鉛直磁束密度を印加したときの解析結果を Fig. 4 に示す. 磁場解析で求められた (a),(b) 界面磁束密度 b は (c),(d) 磁気応力差 T_N で使われ, 他の応力 G, C と合わせて (e),(f) 界面応力和 S となる. 界面力学方程式による流体解析から求められた (g),(h) 界面流速 v は, S の非一様性が誘起したものと考えられる.

4 まとめ

直接境界要素法に基づいて, 実時間実空間で磁性流体界面現象の安定性解析・時間発展解析を行う解析システムを構築した. 直接法では, 静磁場の磁気ポテンシャル ϕ_J ・法線磁束密度 b_{ZJ} , 非圧縮・非回転・非粘性流体の法線流速 φ ・流速ポテンシャル v_n の未知量が, 連立 1 次方程式の解として同時に求められる. 界面では, 磁場解析では ϕ_J, b_{ZJ} の連続条件を課し, 流体解析では界面応力和の時間積分で求めた φ を Dirichlet 条件として与え, 得られた流体速度から界面形状変化を決める. なお, 磁気応力差, 非一様透磁率において非線形磁化を考慮した.

解析精度を向上させ安定的な時間発展解析を実現するため, 尖った境界上の点に複数ある法線方向による物理量の多価性を考慮するが, 局所的に平面な境界上でも, 磁気ポテンシャルで表した接線磁場が必要になる. また, 基礎式を離散化したとき対角項の離散化係数が持つ特異性は, 「定ベクトル場条件」から導いた「離散化係数の総和則」により回避した. 界面が平面・領域間の透磁率差がない条件で行った数値解析では, 流体領域下方と真空領域上方で与えた一様な磁束密度が, 界面でもその縁に至るまで再現された.

今後, この解析システムで界面形状の時間発展を観察しながら, Rosensweig 不安定性近傍の安定性解析など [10, 11], 従来の研究との比較を進めていく.

参考文献

- [1] Rosensweig, R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985), Chap.4, Chap.5.
- [2] Brebbia, C.A., F.J.C. Telles and C.L. Wrobel, *Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering*, Springer, (1984).
- [3] Mizuta, Y., *Magnetohydrodynamics*, **44-2** (2008), pp.155–165.
- [4] Mizuta, Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **323-10** (2011), pp.1354–1359.
- [5] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」, **1847** (2013), pp.96–106.

- [6] Mizuta,Y., *Magnetohydrodynamics*, **49-2-4** (2013), pp.191–195.
- [7] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1890** (2014), pp.113–123.
- [8] Mizuta,Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **431** (2017), pp.209–213.
- [9] 水田 洋, 磁性流体連合講演会講演論文集, **26** (2013), pp.50–52.
- [10] Gollwitzer,C., Rehberg,I. and Richter,R., *New Journal of Physics*, **12-9** (2010), p.093037.
- [11] Lloyd,D.J.B., Gollwitzer,C., Rehberg,I. and Richter,R., *J. Fluid Mech.*, **783** (2015), pp.283–305.
- [12] Mizuta,Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **514** (2020), p.167118.
- [13] Brebbia,C.A. and Butterfield,R., *Applied Mathematical Modelling*, **2-2** (1978), pp.132–134.
- [14] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **2153** (2020), pp.81–95.
- [15] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2020 講演論文集 (2020) (CD-ROM).