

(続紙 1)

京都大学	博士（人間・環境学）	氏名	戸田 貴久
論文題目	On Separation by Bipartitions and Related Geometric Problems （2分割による分離概念と関連する幾何問題について）		
(論文内容の要旨)			
ユークリッド空間に存在する多面体などのオブジェクトの集合を超平面の集まりによって分離する問題は粉碎問題とよばれ、幅広い応用があることから、組合せ的側面およびアルゴリズム的側面から数多くの研究がなされている。本論文は、粉碎問題に関連した3つの組み合わせ的な問題に解を与えるものである。第1章で導入を行ったのち、第2章では、粉碎問題から幾何学的な側面を忘れて単純化した設定、すなわち、抽象的な有限集合の2分割による分離について考察し、分離族の数え上げを行う。第3章では、彩色点集合の粉碎問題の組合せ的構造を調べ、ヘリー型の定理を導く。第4章では、多面体の集合を避ける超平面全体に表現を与えるため、射影空間に多凸集合、多凸体、多凸多面体などの概念を導入し、その構造について調べる。 第2章は、抽象的な有限集合 S の分離族の概念を導入し、その数え上げを行った。有限集合 S の分離族とは、S の2分割の集合で、すべての要素を分離するものである。分離族は Renyi らによる分離系と本質的に同じ構造をもち、探索問題と深くかかわっている。本章では、次の2つの条件下で分離族の数え上げを行った。（1）有限集合 S の極小分離族の中でサイズが最大のものについて考察した。それらと S の全域木との間に1対1対応が存在することを示し、そのことを用いて、S の大きさが n の時、最大サイズの極小分離族の個数が n^{n-2} であることを導いた。（2）有限集合 S の大きさが n の時のサイズ m の分離族全体を考察した。行列を用いた分離族の表現を考えることにより、スターリング数を用いてその個数を表現する2つの公式を導いた。 第3章は、d 次元ユークリッド空間において、k 色で色づけされた点集合 S に対し、同じ色の点全体の凸包をオブジェクトとする粉碎問題の組合せ的性質を考察した。この問題の解を、彩色集合 S の色に従った線形分離とよぶことにする。本章では、k と d から定まるある数 $m(k, d)$ が存在して、その数以下の大きさの全ての S の部分集合が色に従って線形分離可能であれば S は色に従って線形分離可能であることを示した。$k=2$ の時にそのような数が存在することは Kirchberger の定理として知られている。本章の結果は、Kirchberger による結果を3以上の k に拡張したものである。また、ブロッカーと呼ばれるもののサイズを用いてそのような $m(k, d)$ を求めた。d 次元ユークリッド空間内の有限点集合 S 上の線形2分割からなる集合の中で線形分離族となっているものの全体を考え、その極小ブロッカーの最大サイズを $\eta(S)$ とする。そして、すべての k 点集合 S にわたる $\eta(S)$ の最大値を $\eta_d(k)$ とする。このとき $m(k, d) = k + \eta_d(k)(d + 1)$ が求める数であることを示し、$\eta_d(k)$ の具体的な表示式も導いた。 第4章は、多面体の集合を避ける超平面全体について、射影空間上の図形としての考			

察を行った。射影空間の超平面は、双対射影空間上の点とみなすこともできる。射影空間上の集合 A に対し、 A の内点を含まない超平面全体に対応する双対射影空間上の集合をその集合の極集合と呼ぶ。ここで興味があるのは 1 個以上の多面体の和集合の極集合であるが、そのような集合を表現するため、射影空間に多凸集合および多凸体の概念を導入した。射影空間における多凸集合および多凸体は、ユークリッド空間における凸集合および凸体と類似した性質をもっている。射影空間の多凸体全体と双対射影空間上の多凸体全体は、極集合をとるという操作によって、包含関係を逆にしながら 1 対 1 に対応している。そして、多凸体に対して、それを含む極小な凸集合のことを余成分とよぶことにすると、多凸体の内点をもつ連結成分と、双対多凸体の余成分が 1 対 1 に対応している。

さらに、有限個の凸多面体の共通部分として定義される図形を多凸多面体と定義し、その性質について調べた。多凸多面体に対しては、ユークリッド空間の凸多面体と同様に、面（ここでいう面は頂点、辺、面などを総称したもの）概念が定義される。さらに、ユークリッド空間における多面体と双対多面体の関係と同じ意味で、多凸体であるような多凸多面体の双対図形は多凸多面体であり、それらの面はお互いに包含順序を逆にしながら 1 対 1 に対応している、ということがわかった。

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、粉碎問題に関係する3つの問題に解決を与えたものである。第一は2分割による集合の分離を数え上げる問題で、第2章で扱っている。第二は彩色点集合の線形分離に関するヘリー型定理の問題で、第3章で扱っている。第三は多面体の集合を避ける超平面全体の射影空間においてなす幾何学的構造に関する問題で、第4章で扱っている。いずれも、情報科学や組合せ幾何学において現れる単純な構造に対して興味深い結果を導き出した優れた結果である。

第2章では、粉碎問題から幾何学的側面を忘れて、抽象的な有限集合の2分割による分離の概念に関する2つの数え上げ問題に解を与えている。まず、有限集合 S の最大サイズの極小分離族と S の全域木との間で1対1対応が存在していることを見出し、それを用いて最大サイズの極小分離族の数え上げを行った。次に、行列を用いた分離族の表現を用いることにより、集合の大きさが n の時の m 個の2分割からなる分離族の個数を数式として2通りに表現した。ここで扱われている分離族は探索などのアルゴリズムとも密接に関連していて、情報科学において基本的な意味をもつ。その上に構造を見だし、数え上げを行った意義は大きい。両者とも非自明な結果であり、斬新なアイデアに基づいて証明が行われている。

第3章では、 d 次元ユークリッド空間の k 色で色づけされた点集合 S が与えられた時に、超平面の集まりによる S の同色部分への分離に関する問題を扱っている。このような超平面の集まりを求める問題は粉碎問題と呼ばれ、情報科学で多くの応用があり、アルゴリズムの研究が数多くなされている。本章では、この粉碎問題の組み合わせ論的な性質について考察し、 k と d から定まる数 $m(k, d)$ が存在し、 d 次元空間内の任意の k 彩色有限集合 S に対して、高々 $m(k, d)$ の大きさをもつすべての部分集合が彩色通りに線形分離可能ならば、 S は彩色通りに線形分離可能であることを示した。 $k = 2$ の時にはそのような値が存在することが Kirchberger により示されている。申請者は、この Kirchberger の定理を k が3以上の場合に拡張した。一般に組合せ幾何において、有限集合上の問題を空間の次元によって決まるある大きさ以下の部分集合上の問題に帰着させる定理はヘリー型定理と呼ばれており、組合せ幾何学の中心課題である。申請者の結果は、情報科学の重要な問題である粉碎問題においてヘリー型定理を示したものである。この結果の証明ではブロッカーの概念が重要な役割を果たしており、証明の中で、大きさ k の集合 S 上のすべての線形分離族に対する極小ブロッカーの最大サイズ $\eta(S)$ の最大値 $\eta_d(k)$ を用いている。ブロッカーの概念をこのような形で証明に用いるアイデアは斬新である。また、証明の中で示されている $\eta_d(k)$ の計算方法も興味深く他の問題への応用が期待できる。

第4章では、射影空間上で多面体の集合を避ける超平面全体の幾何学的構造を考察している。この目的のために、申請者は、ユークリッド空間における凸集合、凸体、凸多面体の概念の対応物として、射影空間上に多凸集合、多凸体、多凸多面体の概念

を導入した。申請者が導入したこれらの概念は、射影空間の双対性とも関係する豊かな幾何学的内容を持っている。

ユークリッド空間に配置されたオブジェクトを避ける超平面は粉碎問題などに現れる自然な概念である。それらのなす幾何学的構造がわかれば、計算機上でその集合を表現して様々な演算を行うことも可能となり、粉碎問題のアルゴリズムなど、多くの分野への応用が期待できる。申請者の見いだした構造は、計算機上での表現が容易なものであり、この方向での発展が期待できる。

このように、本論文では粉碎問題を数え上げ（第2章）、組み合わせ幾何学（第3章）、射影幾何学（第4章）という3つの異なる観点から考察し、必要な道具立てを整備しながら、学術的に意義のある成果を得ている。また、情報科学の観点から見ても、この論文で導入された概念や方法は重要なものであり、今後さまざまな応用も期待される。

よって、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成24年1月27日、論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果、合格と認めた。

Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公表可能とする日付を記入すること。

要旨公開可能日： 年 月 日以降