

Dedekind 和の除外値について

静岡大 浅井哲也 (Tetsuya Asai)

京都大 齋藤 裕 (Hiroshi Saito)

九州大 長坂千秋 (Chiaki Nagasaka)

この稿は講演に従って つぎのように分担して述べる。

§ 1. 問題と歴史 (A.)

§ 2. 定理の証明 (S.)

§ 3. 新たな観察 (N.)

(ただし長坂氏はこの締切を前にして急逝されたので十分な原稿が用意できなかったこと また各節の間の統一性が不完全であることを予めお断りしたい。これらの責任は A. にある。)

文献

- [1] T. Asai, Some arithmetic on Dedekind sums, to appear.
- [2] T. Asai, The multiplier system of eta function and traces of unimodular matrices, to appear.
- [3] H. Hijikata, Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$, J.Math.Soc.Japan, 26(1974), 56-82.
- [4] Ch. Nagasaka, Exceptional values of the Dedekind symbol, to appear.

- [5] H. Rademacher, "Topics of Analytic Number Theory", Springer, 1973.
- [6] H. Saito, On missing trace values for the eta multipliers, to appear.
- [7] H. Salié, Zum Wertvorrat der Dedekindschen Summen, Math.Z., 72(1959), 61-75.
- [8] D. Zagier, Nombres de classes et fractions continues, Astérisque, 24/25(1975), 81-97.

§ 1. 問題と歴史

この節では問題の由来と最近の経過について解説する。

eta関数とその変換公式については周知である。([5])

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \quad \text{Im } \tau > 0.$$

$$\eta(\sigma\tau) = \xi(\sigma) (c\tau + d)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau), \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

ここで平方根を $w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|w|} e^{\frac{1}{2}i \arg w}$, $-\pi \leq \arg w < \pi$ と決めておけば $\xi(\sigma)$ は τ によらない値として確定する。これを eta multiplier と呼ぶ。 $\xi(\sigma)^{24} = 1$ である。われわれの問題をもっと一言で云うならば

『 $\xi(\sigma)$ と $\text{tr}(\sigma)$ との関係や如何? 』

ということになる。 $\text{tr}(\sigma)$ は行列 σ の跡である。しかし問題は このように一直線に進行したのではない。

Dedekind は $\eta(\tau)$ の対数関数と η の変換公式を扱った.

$$L(\tau) = \frac{\pi i \tau}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{2\pi i n \tau}$$

$$L(\sigma\tau) = L(\tau) + \frac{1}{2} \log(c\tau + d) + \frac{\pi i}{12} V(\sigma).$$

彼は加法的因子 $V(\sigma)$ を新しい算術的和によって表した.

いでも $\log w = \log |w| + i \arg w$, $-\pi \leq \arg w < \pi$ のように対数の枝を定めておく必要がある. このとき $V(\sigma)$ は有理整数値をとる定数であって明らかに $\xi(\sigma) = e^{\frac{\pi i}{12} V(\sigma)}$.

($\xi(\sigma)$ や $V(\sigma)$ は本質的には $SL_2(\mathbb{Z})$ の適当な被覆群のアーベル指標として与えられるものであり必ずしも解析関数を持ち出す必要はない. またこれらの因子がそのまま他の数論的な量との関連ではっきりと登場することもある. — Hardy-Ramanujan-Rademacher の公式 ([5]) や C. Meyer の公式 ([8] に簡潔な記述がある) などである.)

Dedekind の与えた公式は, $(\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}))$

$$V(\sigma) = \begin{cases} \frac{a+d}{c} - 3 \operatorname{sgn} c - 12 \operatorname{sgn} c \cdot s(d, |c|) \cdots & c \neq 0, \\ (b-3) \operatorname{sgn} d + 3 & \cdots c = 0, \end{cases}$$

というものである. ここに現われた $s(d, |c|)$ がいわゆる Dedekind 和である. この定義と性質については他の稿で触れられることとされるのでここでは詳細を述べない. 最も基本的な性質は つぎのように要約することができる.

互いに素な有理整数の組 h, k ($k > 0$) について

$$D(h, k) = 12k \cdot s(h, k),$$

および | s | のために $D(\pm 1, 0) = \pm 2$ とおく. (今は $k < 0$ については $D(h, k)$ を定義しない.) これを D-関数 と呼ぶ.
このときつぎの性質 ① (相互法則), ② が成立つ.

$$\textcircled{1} \quad h D(h, k) + k D(k, h) = h^2 + k^2 - 3hk + 1,$$

$$\textcircled{2} \quad D(h', k) = D(h, k) \quad \dots \quad h' \equiv h \pmod{k} \text{ のとき.}$$

逆にこの2つの性質が D-関数を完全に特徴づける. さらに,

$$\textcircled{3} \quad D(h, k) = D(h, k) \quad \dots \quad hh \equiv 1 \pmod{k} \text{ のとき.}$$

$$\textcircled{4} \quad D(-h, k) = -D(h, k).$$

D-関数の値と値域を注意深く観察したのは Salie が最初であろう. 性質 ④ によって正值のみを対象としてよい.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 2 & 6 & 12 & 16 & 18 & 20 & \square & 30 & \square & 36 & 38 & 42 & 48 & 52 & 54 \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 56 & 60 & 66 & 70 & 72 & 74 & 78 & 84 & \square & 90 & 92 & 96 & 102 & 106 & \dots \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 2 & 4 & 6 & 4 & \dots \end{array}$$

階差から明らかなつぎの合同式は証明も容易である.

$$D(h, k) \equiv 0, 2, 6, 12 \text{ or } 16 \pmod{18}.$$

Salie の注目したのは どういうに振けた値, すなわち, この合同式は満たすが D-関数の値とは ならぬ 数 である.

このような値をいま 除外値 (exceptional or missing value) と呼ぶ。Salie は 300 以下の除外値として 言明なしで つぎの 4 個の数々を挙げてゐる。(1959)

24, 34, 88, 214.

除外値を確定するために 筆者は つぎの 基準 (1982) を示した。

「合同式 $(\lambda \equiv 0, \pm 2, \pm 6 \pmod{18})$ を満たすような $\lambda (> 2)$ に対して 全ての $1 < \underline{n} < \lambda$ ($1 \leq \underline{n} < \lambda/2$) について $D(\underline{n}, \lambda) \neq \lambda$ ならば この λ は 除外値である」

(この後 改良されて $\lambda > 52$ ならば $\lambda < \lambda/2$ について調べれば十分であることがわかつてゐる。(1984)) これは、相法則 ① を用いた ひとつの “descent” の考え方に基づくものである。この基準によって Salie の観察を確認するとともに 数々の除外値を追加したが 依然として 正体不明であつた。

304, 344, 394, 1060.

(こゝまでについては [7] と [1] を参照されたい。)

さて 除外値の計算は その後もう少しづつ進んでゐたが、1984 年の夏までに 長坂氏は 大型計算機を用いて λ 変数を 76000 まで、従つて 合せて 877848679 個の $D(\underline{n}, \lambda)$ の値を計算されて、上記 8 個に加えて

つぎの数を除外値として確定した。(カッコ内は新基準後に.)

1924, 2050, 3364, 4804, 9250, 17674, 21220,

25090, 25540, 49930, 55780, 67714, 74500,

75274, (113290, 114244, 123010, 131074, 150154.)

同時に長坂氏は鋭い観察によってつぎの発見をされた!

(長坂氏の予想, 1984) つぎの形の N は除外値である:

$N = 2(n^2 + 1)$ ただし $n \equiv \pm 4 \pmod{9}$ かつ n の任意の素因子 p は $p = 2$ または $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ を満たす.

そして $N > 344$ なる除外値はこれらで尽きる.

このうち $n \equiv \pm 4 \pmod{9}$ の条件は先の合同式に基づくものであるが N の特異な形と素因子に関する条件が興味を惹きつける.

この年の終るとき筆者は D -関数を拡張してみるのが自然であると感じた. いま各整数 $l \in \mathbb{Z}$ に対して形式的に

$$D_l(h, k) = (l+3)k + D(h, k)$$

と定義する. 基本性質によりこれを述べればつぎの通り.

- ① $h D_l(h, k) + k D_l(k, h) = h^2 + k^2 + (2l+3)hk + 1,$
- ② $D_l(h', k) = D_l(h, k) \quad \dots \quad h' \equiv h \pmod{k}$ のとき,
- ③ $D_l(h, k) = D_l(h, k) \quad \dots \quad h h' \equiv 1 \pmod{k}$ のとき,

$$\textcircled{4} \quad D_\ell(-k, k) = -D_{-(\ell+6)}(k, k).$$

この一般化の根拠は先述の $V(\sigma)$ に関する Dedekind の公式から直ちに導くことができる つぎの公式にある。

(跡公式, Dedekind)

$\sigma = \begin{pmatrix} k & H \\ k & K \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ について $V(\sigma) = \ell$ のとき

$$\text{tr}(\sigma) = \begin{cases} D_\ell(k, k) & \cdots k \geq 0, \\ D_{-\ell}(k, |k|) & \cdots k < 0. \end{cases}$$

すなわち D -関数の領域とは $V(\sigma) = -3$ (および 3) となる σ についての trace values に他ならない. ± 3 にとどまらず各 ℓ について観察する必要があるが生じた. D_ℓ -関数の除外値 の概念を得るためには, D -関数についての基本合同式: $D(k, k) \equiv 0, \pm 2 \text{ or } \pm 6 \pmod{18}$ に相当するものを知る必要がある. つぎの補題から D_ℓ -関数の基本合同式は容易に得られるのである.

(D -関数の合同式 (詳細)) $D = D(k, k)$ と略記する.

$$k \equiv \pm 1 \pmod{3} \Rightarrow D \equiv 0 \pmod{3}, \quad k \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow D \equiv \pm 2 \pmod{9},$$

$$k \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow D \equiv 0 \pmod{4}, \quad k \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow D \equiv 2 \pmod{4},$$

$$k \equiv 2 \pmod{8} \Rightarrow D \equiv 0 \pmod{8}, \quad k \equiv -2 \pmod{8} \Rightarrow D \equiv 4 \pmod{8},$$

$$k \equiv 0, -4 \pmod{16} \Rightarrow D \equiv \pm 2 \pmod{16}, \quad k \equiv 4, 8 \pmod{16} \Rightarrow D \equiv \pm 6 \pmod{16}.$$

この補題自身の証明は相互法則を用いて例えば帰納法でできる.

ところで、結果からいうと各 D_ℓ -関数の規則的な除外値は $\ell \pmod{24}$ によって共通であることが観察されるのである。このことは $\xi(\sigma) = \zeta^{V(\sigma)}$ (以下 $\zeta = e^{\frac{\pi i}{12}}$) に注意するならば各 $\ell \pmod{24}$ について $\xi(\sigma) = \zeta^\ell$ となる σ についての $\text{tr}(\sigma)$ の除外値ともいふべき概念が一層自然であることを意味する。これによって、 D_ℓ -関数の基本合同式を述べる代わりに つぎの形でこれを表しておく。

($\text{tr}(\sigma)$ の基本合同式) $\xi(\sigma) = \zeta^\ell$ ($\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$) のとき:

- $\ell \equiv \pm 1 \pmod{6} \Rightarrow \text{tr}(\sigma) \equiv \pm 1 \pmod{3}$ かつ $\equiv 0 \pmod{2}$,
- $\ell \equiv 3 \pmod{6} \Rightarrow \text{tr}(\sigma) \equiv 0, \pm 2, \pm 3 \pmod{9}$ かつ $\equiv 0 \pmod{2}$,
- $\ell \equiv \pm 2 \pmod{12} \Rightarrow \text{tr}(\sigma) \equiv \pm 1 \pmod{3}$ かつ $\equiv 1, 2, 5, 9, 10, 13, 14 \pmod{16}$,
- $\ell \equiv \pm 4 \pmod{12} \Rightarrow \text{tr}(\sigma) \equiv \pm 1 \pmod{3}$ かつ $\equiv 2, 3, 6, 7, 11, 14, 15 \pmod{16}$,
- $\ell \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow \text{tr}(\sigma) \equiv 0, \pm 2, \pm 3 \pmod{9}$ かつ
 $\equiv 1, 2, 5, 9, 10, 13, 14 \pmod{16}$,
- $\ell \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow \text{tr}(\sigma) \equiv 0, \pm 2, \pm 3 \pmod{9}$ かつ
 $\equiv 2, 3, 6, 7, 11, 14, 15 \pmod{16}$.

上の合同式で $\text{tr}(\sigma)$ を λ で置き換えたものを、“ $\xi(\sigma) = \zeta^\ell$ に対応する基本合同式”と呼ぼう。例えば $\xi(\sigma) = \zeta^3$ に対応する基本合同式とは、 $\lambda \equiv 0, \pm 2, \pm 3 \pmod{9}$ かつ $\equiv 0 \pmod{2}$ 、すなわち $\lambda \equiv 0, \pm 2 \text{ or } \pm 6 \pmod{18}$ を意味する。 $\text{tr}(\sigma)$ の除外値という概念を定義しよう。

$\lambda > 2$ とする。(この場合が本質的である。) λ が $\{\sigma\} = \zeta^\lambda$ に関する $\text{tr}(\sigma)$ の除外値 (missing trace value) とは, λ に対応する基本合同式を満たし, かつ $\lambda = 2$ に, $\{\sigma\} = \zeta^\lambda$, $\text{tr}(\sigma) = \lambda$ となる $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ が存在しない, ときをいう. 注意すべきことは, $\lambda (> 2)$ が $\{\sigma\} = \zeta^{\lambda_0}$ に関する $\text{tr}(\sigma)$ の除外値であることは, すべての $\lambda \equiv \lambda_0 \pmod{24}$ について λ が D_{λ_0} -関数の除外値であることと同義であるということである. 例えば $D (= D_3)$ -関数の除外値であっても D_{21} -関数の値であれば, それは $\{\sigma\} = \zeta^3$ に関する $\text{tr}(\sigma)$ の除外値ではない. [いうして結果としては不規則な除外値 (この場合は 24, 88, 214, 304, 344) が一掃される!]

S_λ で $\{\sigma\} = \zeta^\lambda$ に関する missing trace value 全体の集合を表そう. $\text{tr}(\sigma) > 2$ のとき $\{\sigma^{-1}\} = \{\sigma\}^{-1}$ が成立つことから $S_\lambda = S_{-\lambda}$. 従って 13 個の集合 $S_0, S_1, \dots, S_{12}$ が問題となる.

与えられた $\lambda (> 2)$ が S_λ に属するか否かは 先述の基準によって有限回の計算により判定が可能であるので S_λ の観察を試みることができる. 結果を述べるために 幾つかの特別な数列を定義せねばならない. 以下に $A \sim O$ の集合を定義するが, 読み方はつきのようなものである. 例えば C は, 2つの条件: $n \equiv \pm 4 \pmod{9}$ と 素因子に関する条件: $p = 2$ または $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ すなわち $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ を満たすような n によって $2n^2 + 2$ と表わされる数 (> 2) の全体の集合を意味する. $\left(\frac{*}{p}\right)$ は Legendre 記号.

$$A: n^2 - 2; n \equiv \pm 2 \pmod{9}, n \not\equiv \pm 2 \pmod{16}, p|n \Rightarrow p=2 \text{ or } \left(\frac{-1}{p}\right)=1.$$

$$B: 2n^2 - 2; n \equiv 0 \pmod{3}, p|n \Rightarrow p=2 \text{ or } \left(\frac{-2}{p}\right)=1.$$

$$C: 2n^2 + 2; n \equiv \pm 4 \pmod{9}, p|n \Rightarrow p=2 \text{ or } \left(\frac{2}{p}\right)=1.$$

$$D: n^2 + 2; n \equiv 0 \pmod{3}, n \not\equiv 0 \pmod{8}.$$

$$E: 2n^2 + 2; p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{2}{p}\right)=1.$$

$$F: 6n^2 - 2; p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{-6}{p}\right)=1.$$

$$G: 6n^2 + 2; p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{6}{p}\right)=1.$$

$$H: n^2 - 2; n \not\equiv \pm 2 \pmod{16}, p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{-1}{p}\right)=1.$$

$$I: 2n^2 - 2; p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{-2}{p}\right)=1.$$

$$J: 2n^2 + 2; n \equiv \pm 3 \pmod{9}, p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{2}{p}\right)=1.$$

$$K: 3n^2 - 2; n \not\equiv 0 \pmod{4}, p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{-3}{p}\right)=1.$$

$$L: 3n^2 + 2; n \not\equiv \pm 6, \pm 22 \pmod{48}, p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{3}{p}\right)=1.$$

$$M: n^2 - 2; n \equiv \pm 3 \pmod{9}, n \not\equiv \pm 2 \pmod{16}, p|n \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } \left(\frac{-1}{p}\right)=1.$$

$$N: n^2 + 2; n \not\equiv 0 \pmod{8}.$$

$$O: 12n^2 + 2; 12n^2 + 2 = m^2 - 2 \text{ for an integer } m,$$

$$p|mn \Rightarrow p=2, 3 \text{ or } p \equiv \pm 1 \pmod{12}.$$

以上の準備によって, missing trace values の集合 S_ℓ ($0 \leq \ell \leq 12$) を記述することができる。つぎの命題は筆者が観察の結果として得たもので予想として提出した。しかし僅か1ヶ月足らずの後に 齋藤裕氏によって証明が完成した。ここでは 予想 = 定理 とするゆえんである。

(予想 = 定理)

$$S_0 = A, S_1 = B, S_2 = \phi \text{ (empty)}, S_3 = C,$$

$$S_4 = D, S_5 = E \cup O, S_6 = \phi,$$

$$S_7 = B \cup F \cup G \cup O, S_8 = H, S_9 = I \cup J,$$

$$S_{10} = K \cup L, S_{11} = E \cup F \cup G, S_{12} = M \cup N.$$

ただし集合 O については筆者の予想では単に $O = \{14\}$ であった。齋藤氏によれば数列 O において 14 に続く数は $14282150107684^2 - 2$ という大きなものであって、高々 5 万程度の数値を観察していた筆者にとっては到底予想し得ることではなかった。しかしながらこの問題でパソコンの果たした役割は大きく、対象としては Euler の五角数定理と並ぶほどの素朴かつ初等的な現象ではあるが、手計算のみでは気付く難しいことに思われる。その意味ではこの結果もまたパソコン、すなわち核兵器産業のおいほれと知り胸が痛む。

こうして 1985 年 3 月末までには除外値の問題が一応の解決を見た。次節で述べられるように齋藤氏の言証明は $\xi(\sigma)$ についてのもうひとつのよく知られた公式、いわゆる (Weber-) Petersson の公式に基くもので Dedekind 和は Jacobi 記号に退化している。なお長坂氏の予想については正確には後半は未解決であることを念のために付言しておく。

§ 2. 定理の証明

この節では、§1 で述べられた予想 = 定理の証明を略述する。我々の方法で定理の完全な証明を与えるには、かなり個別の計算が必要になるので、ここでは集合 $A \sim 0$ を定める条件のうち主な二条件 (I) $\delta = an^2 \pm 2$, (II) $p|n \Rightarrow \left(\frac{\pm a}{p}\right) = 1$ ($a = 1, 2, 3, 6$) が、どのようにして出て来るかということに主眼をおいて述べることにする。

$X = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ とし、 $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $\ell(\sigma) \in X$ を

$$\varepsilon(\sigma) = \zeta^{\ell(\sigma)}, \quad \zeta = e^{\pi i/12},$$

で定める。 $\ell(\sigma)$ に対して次の Petersson の公式が成り立つ。
([5] 参照)

$$(1) \ell(\sigma) = \begin{cases} bd(1-c^2) + c(\text{tr}(\sigma) - 3) + 6\left(\left(\frac{d}{c}\right) - 1\right), & c \text{ 奇数} \\ ac(1-d^2) + d(b-c) + 3(d-1) + 6\left(\left(\frac{c}{|d|}\right) - 1\right), & d \text{ 奇数} \end{cases}$$

まず、次の2点に注意する。

Lemma 1. $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$(1) \text{tr}(\sigma) > 2 \Rightarrow \ell(\gamma^{-1}\sigma\gamma) = \ell(\sigma), \quad \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

(実は $\text{tr}(\sigma) > 2 \Rightarrow \nu(Y^{-1}\sigma Y) = \nu(\sigma)$ が成り立つ。)

即ち, $\ell(\sigma)$ は σ の $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類で決まる。そこで、各共役類の中から公式 (1) を用いて計算するのに都合がよい元を選ぶことを考える。

Lemma 2. 各 $\tau \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し, τ と $SL_2(\mathbb{Z})$ に関して共役な元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で、次の条件を満たすものが存在する。

$$(2) \quad \nu_p(b), \nu_p(a-d) \geq \nu_p(c), \quad p = 2, 3.$$

ここで ν_p は $\nu_p(p) = 1$ である p 進加法付値。

これは、[3] の Th. 2.3 と $SL_2(\mathbb{Z})$ が $SL_2(\mathbb{Z}_2) \times SL_2(\mathbb{Z}_3)$ の中で稠密であることを用いて示される。この条件の下では、 $\ell(\sigma) \in X$, なる $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は、 $(c, 6) = 1$ を満たす。また、次の Lemma が成り立つ。

Lemma 3. $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が (2) を満たし、 $c = 2^u 3^v N$, $(N, 6) = 1$, $c > 0$ とする。

(1) 2, 3 と異なる素数 p に対し

$$p^2 \mid N \Rightarrow l(\sigma) = l\left(\begin{pmatrix} a & p^2 b \\ c/p^2 & d \end{pmatrix}\right).$$

$$(ii) \ u \geq 5 \Rightarrow l(\sigma) = l\left(\begin{pmatrix} a & 2^2 b \\ c/2^2 & d \end{pmatrix}\right).$$

$$(iii) \ v \geq 3 \Rightarrow l(\sigma) = l\left(\begin{pmatrix} a & 3^2 b \\ c/3^2 & d \end{pmatrix}\right).$$

これは、公式 (1) と $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$, $2^u \equiv 2^{u-2} \pmod{24}$
 $u \geq 5$, $3^v \equiv 3^{v-2} \pmod{24}$, $v \geq 3$ により容易にわかる。

この Lemma により, $s > 2$ に対し, X の部分集合 $\{l(\sigma) \mid \text{tr}(\sigma) = s\}$ を決めるには, 考察を条件 (2) 及び次の条件 (3) を満たす σ に制限してよいことがわかる。

$$(3) \ c = 2^u 3^v N, \ u \leq 4, v \leq 2, (N, 6) = 1, N \text{ square-free.}$$

一般の場合を扱うには (1) の二番目の式も必要になり, 叙述が複雑になるので, 以下 $l(\sigma) = X, X = (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^X$ の場合に限ることにする。このときには, 前述のように $(c, 6) = 1$, $c = N$ である。 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $\sigma_0 = \begin{pmatrix} a & Nb \\ 1 & d \end{pmatrix}$ と置く。 σ_0 は $\begin{pmatrix} s-1 & s-2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と共役で, $l(\sigma_0) = s-3$ ($s = \text{tr}(\sigma)$) である。 $l(\sigma)$ と $l(\sigma_0)$ の関係を表すために, 群 G と G の X への作用を

$$G = (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^X \times \{\pm 1\},$$

$$(a, b)x = ax + b(b-1), (a, b) \in G, x \in X,$$

で定める。このとき $X = \bigcup X_i$ が G の作用に関する X

の軌道分解を与えている。) G の元 g_N を $g_N = (N, (\frac{d}{N}))$ で定めると, (1) により

$$l(\sigma) = g_N l(\sigma_0) = g_N (tr(\sigma) - 3)$$

が成り立つ。ここで次のことに注意する。 $f(x) = x^2 - sx + 1$ ($s = tr(\sigma)$) と置くと

$$a = s - d, \quad b = -f(d)/N$$

である。 b は整数だから $f(d) \equiv 0 \pmod{N}$ であり、従って

$$(4) \quad p \mid N \implies p \mid D (= s^2 - 4) \quad \text{又は} \quad \left(\frac{D}{p}\right) = 1$$

であり, $(\frac{d}{N})$ の値は N にのみ依存している。(即ち,

$f(d) \equiv f(d') \equiv 0 \pmod{N} \implies (\frac{d}{N}) = (\frac{d'}{N})$) ことから g_N の定義が well-defined であることがわかる。

逆に (4) を満たす平方因子を含まない整数 N に対しては,

$$f(d) \equiv 0 \pmod{N}$$

を満たす整数 d が存在し, $\sigma = \begin{pmatrix} s-d & -f(d)/N \\ N & d \end{pmatrix}$ とすれば, σ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の元で

$$l(\sigma) = g_N l(\sigma_0) = g_N (s - 3)$$

が成り立つ。(4)を満たし、平方因子を含まない整数 M, N に対し、 $(M, N) = 1$ ならば

$$g_{MN} = g_M g_N$$

が成り立つ。以上の考察により次のことがわかる。

Proposition 4. $\Delta > 2$, $\Delta \equiv \pm 1 \pmod{6}$ なる Δ に対し G の部分群 Z_Δ, T_Δ を

$$Z_\Delta = \{ g_N \mid (N, 6) = 1, p \mid N \Rightarrow \left(\frac{D}{p}\right) = 1 \}$$

$$T_\Delta = \{ g_N \mid (N, 6) = 1, p \mid N \Rightarrow p \mid D \}$$

で定義すると

$$\{ \ell(\sigma) \mid \text{tr}(\sigma) = \Delta \} \cap X_1 = Z_\Delta T_\Delta (\Delta - 3)$$

が成立する。

Z_Δ を記述するためには、整数 M に対し G の部分群

$$Z(M) = \left\{ (m, \left(\frac{M}{m}\right)) \mid (m, 6M) = 1 \right\}$$

を考える。容易にわかるように $\mathbb{Q}(\sqrt{M}) \neq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ ならば、 $Z(M) = G$ である。

Proposition 5. $D_{\pm 1} = s \pm 2$ (複号同順) と置くと

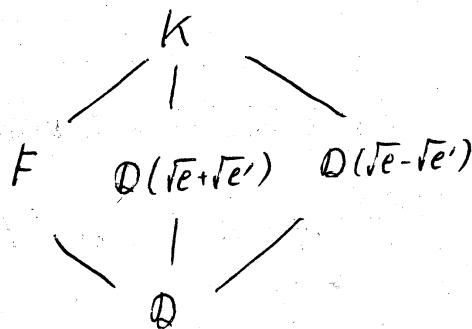
$$Z_s = Z(D_1) \cap Z(D_{-1})$$

が成り立つ。

Corollary 6. $\{Q(\sqrt{D_1}), Q(\sqrt{D_{-1}})\} \cap \{Q, Q(\sqrt{2}), Q(\sqrt{3}), Q(\sqrt{6})\} = \emptyset$, ならば $Z_s = G$ であり従って s は除外値ではない。

s が除外値であるならば, $Q(\sqrt{D_1})$ または $Q(\sqrt{D_{-1}})$ が $Q, Q(\sqrt{2}), Q(\sqrt{3}), Q(\sqrt{6})$ のいずれかと一致しなければならず, $s = an^2 \pm 2$ となり条件 (I) が出て来る。

Proposition の証明には, $F = Q(\sqrt{D})$ と, F の元 e で $f(e) = 0$ となるものから得られる拡大 $K = F(\sqrt{e})$ を考える。 e の Q 上の共役を e' とし $\sqrt{e'}$ を $\sqrt{e}\sqrt{e'} = 1$ となるように定めると, $(\sqrt{e} \pm \sqrt{e'})^2 = s \pm 2 = D_{\pm 1}$ (複号同順) であり, K は $Q(\sqrt{D_{\pm 1}})$ を含む。 p が F/Q で分解する素数であるとき, s を



$f(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす整数とすると

$$\left(\frac{\xi}{p}\right) = \left(\frac{D_1}{p}\right) = \left(\frac{D-1}{p}\right)$$

が成り立つ。Proposition はこれから容易に導かれる。

次に T_Δ について考える。

$$T_{\Delta, \pm 1} = \left\langle \left(p, \left(\frac{2\Delta}{p}\right)\right) \mid p \mid \Delta \pm 2, (p, 6) = 1 \right\rangle$$

(複号同順)

とすれば $T_\Delta = T_{\Delta, 1} T_{\Delta, -1}$ であり、次の命題が容易に証明できる。

Proposition 7. $\lambda = \pm 1$ とし、 $\Delta + 2\lambda = an^2$, $a = 1, 2, 3, 6$, とする。

$$(i) \quad Z(D_\lambda) \supset T_{\Delta, -\lambda}.$$

$$(ii) \quad Z(D_\lambda) \supset T_{\Delta, \lambda} \iff \left(\frac{-a\lambda}{p}\right) = 1, \quad p \mid \Delta + 2\lambda \text{ (i.e. } p \mid n), \\ (p, 6) = 1.$$

これから条件 (II) が出てくる。

Δ が除外値であるとき Δ に対して除外値になるのは、

$Z_\Delta T_\Delta (\Delta - 3)$ を個別に計算して決める。例えば、 B の元は

Prop. 5, Prop. 7 により除外値であるが、 $\Delta \in B$ に対して

$$\text{は } Z_\Delta T_\Delta = Z(2) \text{ である。}$$

$$Z_{\Delta} T_{\Delta} (a-3) = Z(2) (a-3) = \{\pm 5, \pm 11\}$$

である。従って B の元は ± 1 と ± 7 に対して除外値になっている。

詳細については [6] を御参照下さい。

§ 3. 新たな観察

長坂氏はこの節のための原稿をほぼきりとは遺されなかったのであるが 研究集会に先立って 筆者(A.)のもとに送って頂いた ひとつの草稿が ここにある。内容は講演のものとほぼ同じであり、かつ記録に残す価値の高いものと考えられるので、誰の了解を得べきかとまどうのであるけれど、これをそのまま掲載させて頂きたいと思う。はじめに小さな導入を試ることをお叙述願いたい。

例えば 30 という数は D -関数の値となるのであるが：

$$\begin{aligned} 30 &= D(1, 7) = D(2, 11) = D(3, 16) = D(5, 31) = D(7, 32) \\ &= D(8, 35) = D(12, 43) = D(13, 44) = D(9, 47) = D(13, 55) \end{aligned}$$

というように 値 30 を実現する (n, k) の組は n を

$1 \leq k < n$ の範囲に限っても (性質②を参照), 無限に存在する. 明らかに 最小の k (この場合は $k=7$) に ひとつの意味がある. 長坂氏は つぎのような 定義をされた.

$$\text{ord}(n) = \inf \{ k : n = D(h, k) \text{ for some } h \}.$$

ここで n は, $n > 0$ で $n \equiv 0, \pm 2 \text{ or } \pm 6 \pmod{18}$ を満たすもののみについて考えるのである. 上の例では $\text{ord}(30)=7$. 除外値とは $\text{ord}(n) = \infty$ となる n を意味することになる.

先述の筆者の基準は つぎのように 換言される.

$$n > 52 \Rightarrow \text{ord}(n) < \frac{n}{2} \text{ or } \infty.$$

他方 k を 定めたときの 最大の D -値は $D(1, k) = k^2 - 3k + 2$ であるから 下からの評価としては $\text{ord}(n) > \sqrt{n} + \frac{3}{2}$.

しかしこれらの評価は 甚だしく 雑なので, 長坂氏は より 正確な $\text{ord}(n)$ の 評価に 情熱を 抱かれていた. 氏は 大計算によって $\text{ord}(n)$ の 表や graph ([4]にある) を 作成されていた. それによると n が たとひ 除外値でなくても $n = 2(n^2 + 1)$ の 形のとき $\text{ord}(n)$ が 著るしく 大きくなるという 傾向がある. このことから 氏は つぎの「方程式」を「解く」ことに 執心された.

$$(1) \quad D(h, k) = 2(n^2 + 1).$$

沢山の 実例を 観察された 結果, (1) の 解, とりわけ n が 素数の 場合には $h \equiv 1 \pmod{n}$, $k \equiv 0 \pmod{n}$ を

満たす特徴のあることに注目された。従って (イ) より強く、

$$(ロ) \quad D(\lambda n+1, \mu n) = 2(n^2+1)$$

を考察の文対象にすべく進んでおられたのである。(ロ)を群論的(?)に云えば、(n :素数として)

$$\text{tr}(\sigma) = 2(n^2+1), V(\sigma) = \pm 3 \stackrel{?}{\Rightarrow} \sigma \in \Gamma(n)$$

ということになろう。 $\Gamma(n)$ は主合同部分群である。また $\text{ord}(\sigma)$ の問題は $V(\sigma)$ が σ の共役類の不変量([5])であることを考慮すると $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が与えられたとき共役類の中から最小正の c を見出すことと関連している。(しかし $\text{tr}(\sigma) = \lambda$ が大きくなると類数が大きくなるので $\text{ord}(\sigma)$ はこのことだけで片付くのかもなからう。)

最後に記号であるが長坂氏は D -関数よりは伝統を主んじて、 $(h, k) = \frac{1}{2} D(h, k)$ を好まれ、これを Dedekind 記号と呼んでおられる。粗雑な導入であるが関心のある人の眼に氏の遺稿が親しく触れられることを祈ってやまない。

思えば、除外値の問題は最後は齋藤氏の明晰に助けられたのであったが、最も重要な step は長坂氏の直観による発見であったのは明らかである。この素朴な問題がさらに深く解明されて発展することを氏とともに強く願ひ また 努力したい。

Some facts and observations on the Dedekind symbol

Chiaki Nagasaka

May 22, 1985

Let us consider the equation in $n, \mu \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in \mathbb{Z}$:

$$(\lambda n + 1, \mu n) = n^2 + 1. \quad (1)$$

I. Obvious congruences for λ, μ, n with (1).

1. $3 \nmid n \implies 3 \mid \mu$.
2. $\lambda \equiv n \pmod{3}$.
3.
 - i) $n \equiv 1 \pmod{4} \implies \mu \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{4}$,
 - ii) $n \equiv 2 \pmod{4} \implies \mu \text{ even}$,
 - iii) $n \equiv 3 \pmod{4} \implies \mu \equiv 2 \text{ or } 3 \pmod{4}$,
 - iv) $\mu \equiv 0 \pmod{4} \implies n \text{ even}$,
 - v) $\mu \equiv 1 \pmod{4} \implies n \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{4}$,
 - vi) $\mu \equiv 3 \pmod{4} \implies n \equiv 0 \text{ or } 3 \pmod{4}$.

II. Solutions (λ, μ, n) of (1).

Let m be in $\mathbb{N}$. The followings are solutions of (1):

1. $(\pm 2, 2m, 3m)$.
- 2.* $(\alpha m + \beta, 3(Am + B), 18(am^2 + bm + c) + (-1)^{d(a)} \cdot 5)$ with
 $a, b, c, A, B, \alpha, \beta$ in the Table and
 $d(a) = 1$ if $a \equiv 1 \pmod{3}$; $d(a) = 0$ if $a \equiv -1 \pmod{3}$.

III. Observations.

1. Let (λ, μ, n) satisfy (1) and $n = 2^e \nu$ with ν odd.
 - i) The 2-ordinal of μ is equal to e or $e + 1$.
 - ii) If $\nu \equiv \pm 1 \pmod{8}$, then μ and n have a common prime divisor $\equiv \pm 3 \pmod{8}$.

For such n that $n^2 + 1$ is not missing we define

$$M(n) = \inf \{ \mu \mid (\lambda, \mu, n) \text{ satisfies (1)} \}.$$

2. Let p be a prime $\equiv \pm 5, \pm 13 \pmod{72}$.
 - i) ^{**} If $p > 13$, then $M(p) \geq \sqrt{2(p+5)} + 3$, where the equality holds only when p is of the form $18m^2 - 5$.
 - ii) If $p > 1733$, then $M(p)$ is odd.
3. For any positive integer m , a triple $(\lambda, 2m, 3m)$ satisfies (1) if and only if $\lambda = 2\ell$ with ℓ prime to m .

The statement i) in Observation 1 is true for n odd. Observation 2 is true up to $p = 19949$. Observation 3 is true up to $m = 1000$.

^{**}) $w \equiv 0, \pm 1, \pm 3 \pmod{9}$, not missing

$\rho = \inf \{ r \mid \text{ord}(w) = O(w^r) \}$ とおこす。先主の結果と Salie の結果から $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ であるが、2. i) は $\rho \geq \frac{3}{4}$ であることを示唆している。私の数値実験では、 $\frac{3}{4} < \rho < \frac{2}{3}$ という感じがする。

a	b	c	A	B	(α, β)
1	0	0	2	1	$(0, 1), (0, -2)$
2	-2	0	4	$-1(\emptyset)1$	$(0, -4), (6, -1)$
2	2	-1	4	$5(I)0$	$(0, -4), (6, 8)$
4	0	0	8	$1(0)$	$(0, -8), (6, 1)$
4	-4	1	8	$-5(1)$	$(0, -8), (-6, 4)$
4	4	-4	8	$13(2)$	$(0, -8), (6, 10)$
4	0	-3	8	$7(3)$	$(0, -8), (-6, -5)$
5	2	-4	10	$11(0)$	$(0, 5), (-6, -7)$
5	-8	3	10	$-7(1)$	$(0, 5), (-12, 8)$
5	8	-1	10	$17(3)$	$(0, 5), (12, 20)$
5	-2	0	10	$-1(4)$	$(0, 5), (6, -1)$
5	-4	-1	10	$1(0)$	$(0, -10), (-12, -10)$
5	10	-4	10	$23(1)$	$(0, -10), (6, 14)$
5	0	1	10	$-3(3)$	$(0, -10), (-6, 2)$
5	4	-1	10	$9(4)$	$(0, -10), (12, 11)$
7	-6	0	14	$1(0)$	$(0, 7), (18, 1)$
7	-10	4	14	$-11(1)$	$(0, 7), (6, -5)$
7	4	-7	14	$19(2)$	$(0, 7), (12, 16)$
7	-4	1	14	$-5(4)$	$(0, 7), (-12, 4)$
7	10	-4	14	$25(5)$	$(0, 7), (-12, -11)$
7	6	0	14	$13(6)$	$(0, 7), (-18, -17)$
7	2	0	14	$1(0)$	$(0, -14), (12, 1)$
7	2	-8	14	$17(1)$	$(0, -14), (18, 22)$
7	0	-3	14	$-9(2)$	$(0, -14), (-6, 4)$

a	b	c	A	B	(α, β)
7	14	-12	14	37(4)	$(0, -14), (6, 16)$
7	-2	0	14	-3(5)	$(0, -14), (-18, 4)$
7	12	-3	14	27(6)	$(0, -14), (-12, -23)$
8	-4	-1	16	1(0)	$(0, -16), (-18, -1)$
				(1)	
8	24	-9	16	53(2)	$(0, -16), (6, 20)$
8	-4	-4	16	7(3)	$(0, -16), (18, 8)$
8	4	-1	16	9(4)	$(0, -16), (-18, -10)$
8	8	-4	16	-5(5)	$(0, -16), (-6, 2)$
8	0	-1	16	-3(6)	$(0, -16), (6, -1)$
8	4	-4	16	15(7)	$(0, -16), (18, 17)$
10	6	0	20	1(0)	$(0, -20), (18, 1)$
10	-10	1	20	-17(1)	$(0, -20), (6, -5)$
				(2)	
10	10	-11	20	-13(3)	$(0, -20), (-6, 4)$
10	-6	0	20	-11(4)	$(0, -20), (-18, 10)$
10	6	-15	20	31(5)	$(0, -20), (18, 28)$
10	30	-24	20	73(6)	$(0, -20), (6, 22)$
				(7)	
10	10	-16	20	37(8)	$(0, -20), (-6, -11)$
10	14	-11	20	39(9)	$(0, -20), (-18, -35)$

*): これは (λ, μ, n) μ odd n prime の data から構成されたものの一部です。相互法則を使って確認しました。

(この稿、終)